ESERCITAZIONE BIOMECCANICA

- Dimostrazione formula della VES, da cui:

$$VES = \frac{2}{9}\frac{(\rho_g - \rho_p)R^2}{\eta_p} g \Rightarrow \boxed{R} = \sqrt{\frac{9}{2}\frac{\eta_p VES}{(\rho_g - \rho_p) g}} =$$

$$\simeq 1{,}833\ m = \boxed{18\ \mu m}$$

$VES = 60\ mm/h = 1{,}67 \cdot 10^{-5}\ m/s$

$\eta_p = 4\ cP = 4 \cdot 10^{-3}\ Pa\,s$

$\rho_p = 1025\ kg/m^3 \quad \rho_g = 1110\ kg/m^3$

- Il corpo si arresta istantaneamente, l'energia assorbita è pari a quella cinetica all'impatto

$U_{morte} = \frac{1}{2} m v^2 = 20{,}8\ kJ$

con $m = 70\ kg$ massa uomo standard

$v = 88\ km/h = 24{,}4\ m/s$

trascurando l'attrito viscoso durante la caduta, dalla conservazione dell'energia si ha

$U_g = U_{morte}$

$\cancel{m} g h = \frac{1}{2}\cancel{m} v^2 \Rightarrow \boxed{h} = \frac{v^2}{2g} = \boxed{30{,}3\ m}$

si confronta quindi l'energia che il femore immagazzina nella ...

con la sua energia di rottura

$$U_{imm} = \frac{1}{2}\rho_{osso} V v^2 \simeq 1{,}8\ kJ$$

con $V = 3L = 3\cdot 10^{-3} m^3$

$\rho_{osso} = 2000\ kg/m^3$

$$U_{rott} = V\int \sigma d\varepsilon = \frac{1}{2} V \sigma_{rott}\varepsilon_{rott} = \frac{1}{2} V \frac{\sigma_{rott}^2}{E} =$$

$$= 220{,}6\ J$$

$U_{imm} > U_{rott} \Rightarrow$ il femore si rompe

- La potenza meccanica erogata dal cuore del ratto sarà data da

$$P = \Delta p Q = \Delta p f V_e \Rightarrow \boxed{V_e} = \frac{P}{\Delta p f} \simeq \boxed{840 mL}$$

con $f = 250\ min^{-1} = 4{,}17 Hz$

$P = 56\ W$

$\Delta p = 120\ mmHg = 1{,}6\cdot 10^4\ Pa$

sapendo che per un uomo standard $M_u = 70\ Kg$ e $f_u = 70\ min^{-1} = 1{,}17\ Hz$ e sfruttando la legge allometrica per la frequenza cardiaca, si ha

$$f_u = a M_u^{-1/4} \Rightarrow a = f_u M_u^{1/4}$$

$$f_r = a M_r^{-1/4} \Rightarrow \boxed{M_r} = \left(\frac{a}{f_r}\right)^4 = \left(\frac{f_u}{f_r}\right)^4 M_u \simeq \boxed{430\ g}$$

- Dimostrazione espressione del modulo complesso, da cui:

$$E^* = E' + jE'' = E_0(\cos\delta + j\sin\delta)$$

quindi, noti E' e E'', si ha

$$\begin{cases} E' = E_0 \cos\delta \\ E'' = E_0 \sin\delta \end{cases} \quad \begin{cases} E_0 = \dfrac{E'}{\cos\delta} \\ E'' = E' \tan\delta \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$\delta = \arctan(E''/E')$, per cui per i due materiali si ricava

$$\boxed{\delta_A} = \arctan(E''_A/E'_A) = \boxed{63{,}4°} > \pi/4$$

$$\boxed{\delta_B} = \arctan(E''_B/E'_B) = \boxed{26{,}6°} < \pi/4$$

A ha un comportamento prevalentemente viscoso, B prevalentemente elastico

- Ponendosi in condizioni di riposo, si determina la costante b

$$bF_{max} = av_{max} \Rightarrow b = \frac{av_{max}}{F_{max}} = 0{,}28 V_{max} =$$

$$= 1{,}12\ cm/s$$

si applica quindi la legge di Hill

$$b(F_{max} - mg) = (a + mg)v$$

$$\boxed{v} = \frac{b(F_{max} - m_{\sigma})}{a + m_{\sigma}} = \boxed{3{,}24 \ cm/s}$$

la massima potenza è erogata per $F \cong 1/3 F_{max}$, quindi la velocità di contrazione corrispondente è

$$v^* = \frac{2/3\, b F_{max}}{a + 1/3 F_{max}} = \frac{2/3\, b}{0{,}28 + 1/3} = 1{,}22 \ cm/s$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{P_{max}} = \frac{1}{3} F_{max} v^* = \boxed{40{,}7 \ mW}$$

- Partendo dalla legge di Hill si ha

$$b(F_{max} - F) = (a + F)v$$

$$v = \frac{b(F_{max} - F)}{a + F} \Rightarrow P = vF = \frac{bF(F_{max} - F)}{a + F}$$

si è espressa la potenza erogata come funzione della sola forza, quindi si massimizza P rispetto a F e si ha

$$\left.\frac{dP}{dF}\right|_{F=F^*} = 0$$

$$\left.\frac{b(F_{max} - 2F)(a+F) - bF(F_{max} - F)}{(a+F)^2}\right|_{F=F^*} = 0$$

si risolve quindi la seguente equaz. di II grado in F^*

$$b(F_{max} - 2F^*)(a + F^*) - bF^*(F_{max} - F^*) = 0$$

$$-\cancel{b}F^{*2} - 2a\cancel{b}\ F^* + a\cancel{b}F_{max} = 0$$

$$-F^{*2} - 0{,}56 F_{max} F^* + 0{,}28 F_{max}^2 = 0$$

sostituisco $\varphi = F^*/F_{max}$, con φ frazione della forza massima, ottenendo

$$\varphi^2 + 0{,}56\varphi - 0{,}28 = 0 \qquad \Delta' = 1{,}43$$

$$\varphi = \frac{-0{,}56 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \begin{cases} -0{,}88 \rightarrow \text{impossibile} \\ 0{,}32 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi = 0{,}32 \Rightarrow F^* = 0{,}32 F_{max} \cong 1/3 F_{max} \ \square$$

- La deformazione applicata è costante e la rigidezza del materiale, quindi lo sforzo, decresce nel tempo $\Rightarrow$ prova di stress relaxation

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 = 0{,}0015$$

$$E(t) = E_e + E_1 e^{-t/\tau_1} + E_2 e^{-t/\tau_2}$$

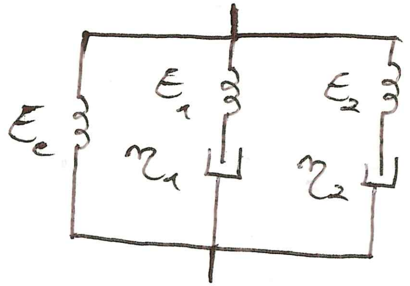
dal grafico si stima che:

$$\begin{cases} E(t=0) = E_e + E_1 + E_2 \cong 40 \ MPa \\ E(t \rightarrow \infty) = E_e \cong 15 \ MPa \end{cases}$$

da cui le risposte istantanea e di equilibrio

$$\begin{cases} \boxed{\sigma(t=0)} = E(t=0)\,\varepsilon_0 \cong \boxed{60\ kPa} \\ \boxed{\sigma(t\to\infty)} = E(t\to\infty)\,\varepsilon_0 \cong \boxed{22,5\ kPa} \end{cases}$$

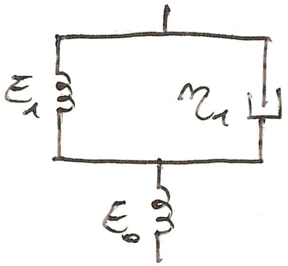
la schematizzazione a parametri concentrati più adatta è un modello SLS a due bracci paralleli



$\tau_1 = \eta_1 / E_1$

$\tau_2 = \eta_2 / E_2$

- La prova descritta è una prova di creep (applicazione di uno sforzo di trazione costante), per cui si approssima il tessuto con un modello SLS serie di I ordine



$\tau = \eta_1 / E_1$, tempo caratteristico di creep

passando nel dominio di Laplace e antitrasformando, si ricava la risposta del materiale

$$\varepsilon(t) = \left(\frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\right)\sigma_0$$

il modulo elastico all'equilibrio è quindi dato da $\left(E_e = \sigma_0 / \varepsilon(t\to\infty)\right)$

$$\frac{1}{E_e} = \frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1} \Longrightarrow E_e = \frac{E_0 E_1}{E_0 + E_1}$$

$$E_1 = \frac{E_0 E_e}{E_0 - E_e} = 1,25\ MPa$$

per $t = t^*$, la deformazione del materiale è:

$$\varepsilon(t^*) = \frac{e(t^*) - e_0}{e_0} = \frac{1,13\cancel{e_0} - \cancel{e_0}}{\cancel{e_0}} = 0,13$$

da cui si ricava che

$$\varepsilon(t^*) = \left(\frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1}\left(1 - e^{-t^*/\tau}\right)\right)\sigma_0$$

$$e^{-t^*/\tau} = 1 - E_1\left(\frac{\varepsilon(t^*)}{\sigma_0} - \frac{1}{E_0}\right)$$

$$\boxed{\tau} = -\frac{t^*}{\ln\left(1 - E_1\left(\frac{\varepsilon(t^*)}{\sigma_0} - \frac{1}{E_0}\right)\right)} \cong \boxed{3,3\ h}$$