

Obiettivi:

- 1) Quale equazione ammette come soluzione un'onda che viaggia come \Rightarrow risolvere con Fourier.
 - 2) Risoluzione eq. telegrafisti
 - 3) Analogie con la fluidodinamica
 - 4) Modello McDonald - Womersley
-

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

$p(x, t)$ - pressione

PDE: eq. alle derivate parziali

$$p(x, t) \xrightarrow{\mathcal{F}_x} p(k, t)$$

k = frequenza

$\downarrow \mathcal{F}_x$

ODE: eq. differenziale ordinaria

$$p(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, t) e^{-j2\pi kx} dx \Rightarrow \mathcal{F}_x \left[\frac{\partial^2 p(k, t)}{\partial x^2} \right] = (j2\pi k)^2 p(k, t)$$

$$\left| \frac{\partial^2 p(k, t)}{\partial t^2} = -c^2 4\pi^2 k^2 p(k, t) \right|$$

$$\lambda^2 + c^2 4\pi^2 k^2 = 0$$

$$\lambda = \pm j c 2\pi k$$

$$P(k, t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t} = \underbrace{A e^{j 2\pi c k t}}_{A(k)} + \underbrace{B e^{-j 2\pi c k t}}_{B(k)} \quad \text{famiglia soluzioni} \quad \forall k$$

Applico la trasformata inversa $\rightarrow p(x, t)$

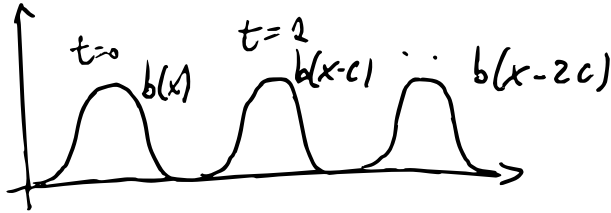
$$p(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} P(k, t) e^{j 2\pi k x} dk =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\underbrace{A(k) e^{j 2\pi c k t}}_{A(k)} \underbrace{e^{j 2\pi k x}}_{e^{j 2\pi k x}} + \underbrace{B(k) e^{-j 2\pi c k t}}_{B(k)} \underbrace{e^{j 2\pi k x}}_{e^{j 2\pi k x}} \right) dk =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(A(k) e^{j 2\pi k (x + ct)} + B(k) e^{j 2\pi k (x - ct)} \right) dk =$$

$$= \underbrace{a(x + ct) + b(x - ct)}_{\text{variabili spaziali}} \quad e(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{j 2\pi k x} dk$$





solution implique le connaissance de

- conditions de contour

$$p(0, t)$$

$$p(L, t)$$

- conditions initiales

$$p(x, 0)$$

$$\frac{\partial p(x, 0)}{\partial t}$$

Modello di McDonald - Womersley

Ipotesi:

- 1) velocità del flusso sanguigno è molto piccola rispetto alla velocità di propagazione dell'onda
- 2) sforzi nelle arterie trascurabili
- 3) sangue è un fluido Newtoniano ed è incomprimibile
- 4) accelerazioni del flusso sono trascurabili
- 5) il comportamento delle pareti delle arterie è lineare ed elastico

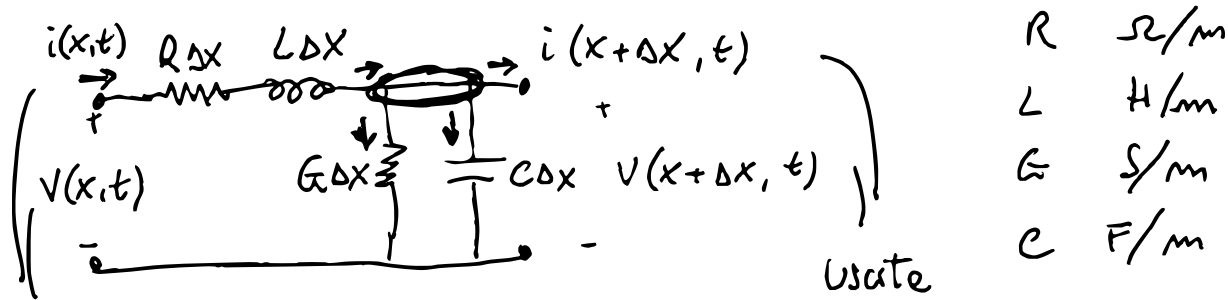
$\rightarrow i(x, t)$

$+v(x, t)$

$\rightarrow x$

q. telegrafati \rightarrow lge tensione e corrente
in un tratto infinitesimo

Controlwiderstand um treibend inszenieren



Integration

$$\begin{cases}
 i(x, t) - G\Delta x V(x + \Delta x, t) - C\Delta x \frac{\partial V(x + \Delta x, t)}{\partial t} - i(x + \Delta x, t) = 0 \\
 V(x, t) - R\Delta x i(x, t) - L\Delta x \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} - V(x + \Delta x, t) = 0
 \end{cases}$$

I Kirchhoff II Kirchhoff

$$\underline{V(x + \Delta x, t) - V(x, t) = -R\Delta x i(x, t) - L\Delta x \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Rightarrow \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = -Ri(x, t) - L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \quad \bullet \quad T1$$

- $$\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = - \underline{G V(x,t)} - C \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} \quad T2 \text{ eq. telegrafati}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial mS}{\partial x} = 0 \\ \rho \frac{\partial mS}{\partial t} = - S \frac{\partial P}{\partial x} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \nearrow F1 \\ F2 \end{array}$$

$mS = \text{portata} \Rightarrow \text{analogo corrente}$
 $P = \text{pressione} \Rightarrow \text{analogo tensione}$

Applichiamo trasformate di Fourier rispetto al tempo e T1-2

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V(x,f)}{\partial x} = -R I(x,f) - j2\pi f L I(x,f) \\ \frac{\partial I(x,f)}{\partial x} = -G V(x,f) - j2\pi f C V(x,f) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V(x,f)}{\partial x} = - (R + j2\pi f L) I(x,f) \\ \frac{\partial I(x,f)}{\partial x} = - (G + j2\pi f C) V(x,f) \end{array} \right.$$

Facciamo le derivate
rispetto a x

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -(R + j2\pi fL) \left(\frac{\partial I}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \underbrace{(R + j2\pi fL)(G + j2\pi fC)}_{\gamma^2} V \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \gamma^2 V}$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = -(G + j2\pi fC) \frac{\partial V}{\partial x} = \underbrace{(R + j2\pi fL)(G + j2\pi fC)}_{\gamma^2} I \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = \gamma^2 I}$$

$$\gamma = \sqrt{(R + j2\pi fL)(G + j2\pi fC)} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

costante di propagazione dell'onda

ammortore come soluzione
un'onda viaggiante

soluzioni

$$V(x) = V_0^+ e^{-\gamma x} + V_0^- e^{+\gamma x}$$

$$I(x) = I_0^+ e^{-\gamma x} + I_0^- e^{+\gamma x}$$

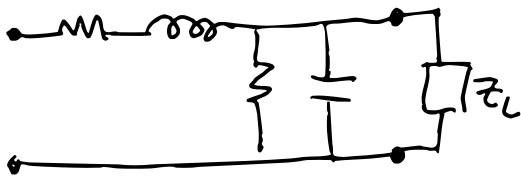
$$\frac{V_0^+}{I_0^+} = \frac{V_0^-}{I_0^-} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = Z_0 \quad \begin{array}{l} \text{impedenza} \\ \text{caratteristica} \end{array}$$

termini dissipativi

se

il sistema
è senza perdite

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

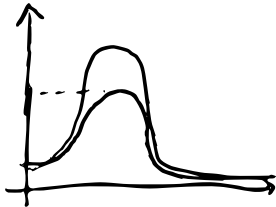


Z_L impedenza di carico su
modellare l'onda riflessa

onda riflessa ed onde incidenti sono legati da un
coefficiente di riflessione

$$\Gamma = \frac{V_0^-}{V_0^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

- variazioni brusche della posizione delle pareti del vaso
- biforcazioni



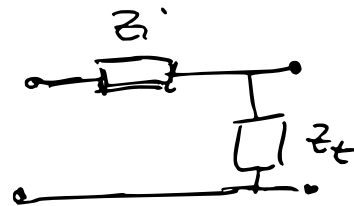
McDonnell - Womersley

$$P(x, y) = \mathcal{F}_t (p(x, t))$$

$$Q(x, y) = \mathcal{F}_t (q(x, t))$$

modello in impedance

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = Q Z_i \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{P}{Z_t} \end{cases}$$

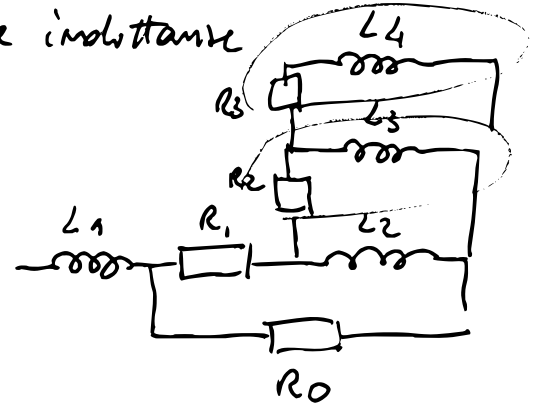


Z_i = impedenza longitudinale

Z_t = impedenza trasversale

impedenza longitudinale \rightarrow resistenza e induttanze

$$R_m = \frac{\rho \pi \mu}{S^2} \quad L_m = \int \frac{1}{2(m-1)}$$



Vasi con npp molto piccolo
prevale il termine resistivo

$$Z_i = \frac{\rho \mu}{\pi \pi_0^4}$$

per npp grandi / alte frequenze
prevale il termine induttivo

$$Z_i = \frac{j\omega \rho}{\pi \pi_0^2}$$

$$\alpha = \frac{\pi_0^2 \omega}{\nu}$$

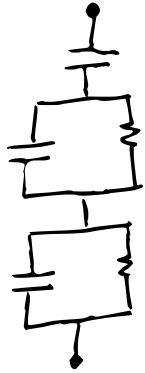
ν = viscosità cinematica

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

$$\text{se } \alpha < 1 \quad Z_i = R_i$$

$$\alpha > 1 \quad Z_i = j\omega L_i$$

impedenze trasversale



nel caso paramente
elastico (es. aorta)
trascurando termini resistivi

→

$$\frac{1}{j\omega C} \quad Z_c = \frac{1}{j\omega C}$$

$$C = \frac{3\pi r_0^3}{2l_f E}$$

↓
spessore
parete

↘
modulo
di Young

$Z_i, Z_c \Rightarrow$ impedenze caratteristiche
 $Z_0 = \sqrt{Z_i \cdot Z_c}$

$$P(x) = P_0 (e^{\gamma x} + \Gamma e^{-\gamma x})$$

$$Q(x) = \frac{Q_0}{Z_0} (e^{\gamma x} + \Gamma e^{-\gamma x})$$