

# Robotica II (Fondamenti di Automatica - IV)

Tratti dal corso tenuto dal Prof. Antonio Bicchi

Versione Provvisoria del 10 Gennaio 2013



# Indice

## I Controllo di Sistemi Meccanici Completamente Attuati

5

<b>1</b>	<b>Controllo Cinematico</b>	<b>7</b>
1.1	Catene Cinematiche Seriali . . . . .	8
1.2	Veicolo planare vincolato su binario rettilineo . . . . .	9
1.3	Veicolo planare vincolato su binario circolare . . . . .	11
1.4	Veicolo planare con vincolo di ruota singola (Uniciclo) . . . . .	12
1.4.1	Inseguimento di traccia con uniciclo . . . . .	14
1.4.2	Inseguimento del moto di un punto con uniciclo . . . . .	21
1.4.3	Controllo di postura (regolazione) di un veicolo uniciclo . . . . .	30
1.5	Veicolo planare con vincolo di ruota doppia (Biciclo) . . . . .	34
1.5.1	Inseguimento di traccia con biciclo . . . . .	37
<b>2</b>	<b>Controllo Dinamico di Sistemi Lagrangiani Completamente Attuati</b>	<b>43</b>
2.1	Controllori PD Indipendenti . . . . .	44
2.2	Controllo a Coppia Calcolata . . . . .	46
2.2.1	Robustezza del Controllo a Coppia Calcolata . . . . .	47
2.2.2	Controllo Robusto o a Struttura Variabile . . . . .	51
2.2.3	Controllo a Coppia Calcolata Adattivo . . . . .	53
2.2.4	Controllo Adattivo alla Li-Slotine . . . . .	55
2.3	Backstepping Control . . . . .	57
2.3.1	Backstepping Control of Completely Actuated Lagrangian Systems . . . . .	58
2.3.2	Adaptive Backstepping Control for Lagrangian Systems . . . . .	61
2.3.3	Backstepping Control of Constrained Lagrangian Systems . . . . .	63
2.3.4	Applicazione: Controllo dinamico dell'uniciclo . . . . .	64
<b>II</b>	<b>Sistemi Nonlineari</b>	<b>79</b>
2.4	Introduzione . . . . .	81
2.5	Esistenza e unicità delle soluzioni . . . . .	81
2.6	Proprietà strutturali e nonlinearità intrinseche. . . . .	83

2.6.1	Stabilità . . . . .	83
2.6.2	Controllabilità . . . . .	84
2.6.3	Osservabilità . . . . .	86
2.6.4	Stabilizzabilità . . . . .	88
<b>3</b>	<b>Nonlinear Systems: a Survival Kit</b>	<b>91</b>
3.1	State Space Description . . . . .	91
3.1.1	Coordinate changes and tangent spaces . . . . .	94
3.2	Analysis tools . . . . .	100
3.2.1	Functions, Vectors and Covectors . . . . .	100
3.2.2	Operations on Functions, Vectors and Covectors . . . . .	102
3.2.3	Distributions and Codistributions . . . . .	105
3.2.4	Operations on Distributions and Codistributions . . . . .	107
3.2.5	Integrability . . . . .	108
3.3	Reachability . . . . .	108
<b>4</b>	<b>Controllo di Sistemi Nonlineari</b>	<b>133</b>
4.1	Introduzione . . . . .	133
4.2	Linearizzazione Input-Stati . . . . .	133
4.2.1	Procedura Operativa (Sistemi SISO) . . . . .	143
4.2.2	Linearizzazione Ingresso-Uscita . . . . .	145
4.3	Inseguimento di traiettorie . . . . .	152
4.4	Linearizzazione in retroazione MIMO . . . . .	154
4.5	Pendolo inverso . . . . .	159
4.5.1	Modello fisico . . . . .	159
4.5.2	Linearizzazione approssimata . . . . .	160
4.5.3	Linearizzazione esatta . . . . .	161
4.5.4	Confronto tra i due metodi di linearizzazione . . . . .	163
4.5.5	Linearizzazione in feedback . . . . .	164
4.5.6	Linearizzazione standard . . . . .	164
4.5.7	Controllo con $K=12.5$ e $K=100$ . . . . .	164
4.5.8	Conclusioni . . . . .	165
4.6	Appendice: stabilità* . . . . .	165

# Parte I

## Controllo di Sistemi Meccanici Completamente Attuati



# Capitolo 1

## Controllo Cinematico

La grandissima maggioranza delle macchine a controllo automatico, dei sistemi per l'automazione ed in particolare dei robot, sono caratterizzate da dinamica fortemente nonlineare. Inoltre, per la loro stessa natura riprogrammabile e la capacità di modificare reattivamente i comportamenti programmati in reazione alle modifiche dell'ambiente, un approccio di linearizzazione attorno a traiettorie prestabilite è difficilmente applicabile. Per questi sistemi è quindi opportuno studiare la possibilità di effettuare un controllo che tenga conto integralmente delle caratteristiche nonlineari, per poterle compensare e – laddove possibile – addirittura sfruttare.

Inizieremo questo studio considerando sistemi meccanici completamente attuati, ovvero meccanismi che hanno a disposizione tanti attuatori quanti gradi di libertà, e che sono in grado di raggiungere e mantenere l'equilibrio in una configurazione arbitraria del meccanismo (purché compatibile con i vincoli del sistema stesso).

Una intuizione diretta del significato di sistema completamente attuato è che un tale sistema resta immobile in una qualsiasi configurazione se le gli attuatori sono bloccati (ed i vincoli rispettati). Esempi di sistemi completamente attuati sono un braccio articolato con un attuatore per ogni giunto, o un veicolo planare vincolato a procedere su un binario con un solo motore per la propulsione (e frenatura), o ancora un modello planare di autovettura che abbia un attuatore per la propulsione ed uno per lo sterzo. Un esempio di sistema “non completamente attuato” è un carrello spinto da un attuatore su un binario sospeso, che sposti un carico mediante un cavo libero di oscillare: il sistema è controllabile e può essere stabilizzato in alcune configurazioni, ma non in una arbitraria.

Una prima tecnica di controllo per sistemi meccanici completamente attuati, detta *controllo cinematico* o controllo in velocità, consiste nel conside-

rare un modello semplificato del sistema, in cui si considerano solo le relazioni cinematiche tra le velocità del sistema astraendo dalla dinamica.

Progettata così una legge da assegnare alle velocità del sistema per fare in modo che le configurazioni seguano un andamento desiderato, queste velocità possono poi venire imposte come riferimenti ad anelli di controllo interni, veloci e robusti, che si prendono cura di farle inseguire accuratamente dal sistema dinamico.

I principali obiettivi di controllo che si incontrano nelle applicazioni robotiche sono tre

**Controllo di Postura** (o *Point-to-point control*): è assegnata una particolare postura costante  $\hat{\mathbf{q}}$  in cui si desidera che il sistema si porti e rimanga;

**Inseguimento di Traccia** (o *Path following*): è assegnata una curva nello spazio, descritta ad esempio dal luogo delle soluzioni di una equazione  $\Gamma(\mathbf{q}) = 0$ , che il sistema deve raggiungere e percorrere;

**Inseguimento di Moto** (o *Trajectory tracking*): è assegnata una legge di moto di un obiettivo, ad esempio nella forma  $\hat{\mathbf{q}}(t)$ , che il sistema deve raggiungere e seguire.

## 1.1 Catene Cinematiche Seriali

Un esempio di controllo cinematico è quello già incontrato nella inversione della cinematica di un manipolatore, che si richiama qui rapidamente. Sia  $\xi \in \mathbb{R}^n$  una variabile che rappresenta la configurazione del sistema nello spazio operativo, sia  $q \in \mathbb{R}^m$  la configurazione nello spazio delle variabili di giunto, e  $\xi = Q(q)$  rappresenti la mappa cinematica diretta.

Consideriamo innanzitutto il problema dell'inseguimento di un moto nello spazio operativo. Assegnata una traiettoria  $\hat{\xi}(t)$ , si desidera trovare una corrispondente legge temporale per i giunti  $q(t)$ . Nel caso in cui l'inversione della cinematica in forma chiusa non sia fattibile, si può procedere a progettare un *controllo cinematico* delle variabili di giunto, che consiste nel considerare a nostra disposizione la scelta delle velocità dei giunti. Indichiamo con il simbolo  $u$  la variabile di controllo cinematico che pensiamo di progettare ovvero, in altri termini, poniamo

$$\dot{q} = u.$$

Lo scopo è in questo caso quello di annullare l'errore di inseguimento della traiettoria desiderata  $\tilde{\xi}(t) = \xi(t) - \hat{\xi}(t)$ . Posta  $V(t) = \tilde{\xi}^T \tilde{\xi}$ , e indicando

con  $J(q) = \frac{\partial Q}{\partial q}$  il Jacobiano analitico del manipolatore (per il quale vale  $\dot{\xi} = J(q)\dot{q}$ ), si ha  $\dot{V} = \tilde{\xi}^T (J(q)u - \dot{\hat{\xi}})$ . Laddove il Jacobiano sia invertibile, dunque, la semplice legge di controllo cinematico

$$u = J^{-1}(q) \left( \dot{\hat{\xi}} - \Lambda \tilde{\xi} \right) \quad (1.1)$$

fa sì che la  $V(t)$  sia una funzione di Lyapunov per il sistema in  $\xi = \hat{\xi}$ , essendo

$$\dot{V} = -\tilde{\xi}^T \Lambda \tilde{\xi}.$$

La dinamica dell'errore di inseguimento risulta

$$\dot{\tilde{\xi}} = -\Lambda \tilde{\xi}$$

quindi, scelta  $\Lambda$  come matrice positiva definita, l'errore decade esponenzialmente a zero (per i casi in cui il Jacobiano non sia invertibile, o vi sia ridondanza, o ancora si consideri un Jacobiano non analitico, si rimanda alle tecniche di inversione cinematica dei bracci manipolatori).

La legge di controllo cinematico (1.1) definisce quindi un andamento delle velocità  $\dot{q}(t) = u$  che, se seguito a partire da una qualsiasi configurazione  $q(0)$ , annullerebbe asintoticamente l'errore di inseguimento. Quando dal modello cinematico si passa al modello dinamico del sistema, non sarà possibile applicare direttamente questa velocità ai giunti, ma la si dovrà considerare come una *velocità di riferimento*  $\dot{q}_r = u$ , cui far tendere la effettiva velocità del sistema, governata dalla equazione della dinamica Lagrangiana del sistema mediante il controllo delle forze generalizzate mediante gli attuatori. A tale controllo dinamico sarà dedicato un capitolo successivo.

Si può facilmente osservare che il problema del controllo di postura per questo sistema si riduce semplicemente ad un caso particolare dell'inseguimento di moto, se si pone  $\hat{\xi}(t) = \tilde{\xi}$  costante. Questo semplifica la legge di controllo (1.1), in quanto  $\dot{\hat{\xi}} = 0$  (vedremo più avanti che non sempre il controllo di postura è più agevole dell'inseguimento di moto).

## 1.2 Veicolo planare vincolato su binario rettilineo

Si consideri un veicolo la cui posizione e orientazione nel piano sono descritte dalle coordinate  $q = (x, y, \theta)$ , e lo si consideri in moto su un binario rettilineo come rappresentato in figura 1.1. Se la retta del binario rettilineo passa dal

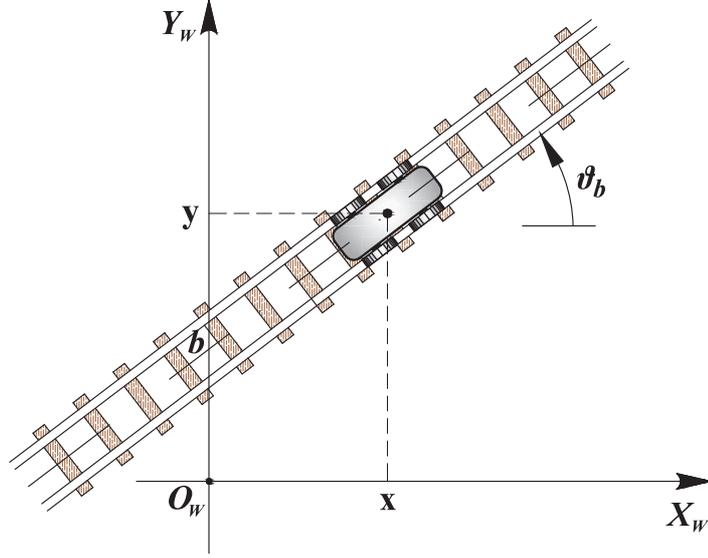


Figura 1.1: Veicolo vincolato su un binario rettilineo, con  $(x_0, y_0) = (0, b)$

punto  $(x_0, y_0)$  ed è inclinata dell'angolo  $\theta_b$  rispetto all'asse delle ascisse, si avranno due equazioni di vincolo geometrico esprimibili come

$$\begin{cases} C_1(q) = (y - y_0) \cos \theta_b - (x - x_0) \sin \theta_b = 0 \\ C_2(q) = \theta - \theta_b = 0. \end{cases}$$

Gli stessi vincoli, espressi in termini cinematici, possono essere facilmente ottenuti come

$$\begin{cases} \frac{dC_1(q)}{dt} = \dot{y} \cos \theta_b - \dot{x} \sin \theta_b = 0 \\ \frac{dC_2(q)}{dt} = \dot{\theta} = 0 \end{cases},$$

ovvero riscritti in forma lineare nelle velocità (forma Pfaffiana),

$$A(q)\dot{q} = \begin{bmatrix} \sin \theta_b & -\cos \theta_b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = 0.$$

Si noti che il rango della matrice dei vincoli cinematici  $A(q)$  è costante e pari a due. Le velocità consentite al veicolo sono tutte e solo quelle appartenenti allo spazio nullo di  $A(q)$ , che è di dimensione unitaria e può essere descritto da una base  $S(q)$  nella forma

$$\dot{q} = S(q)\nu = \begin{bmatrix} \cos \theta_b \\ \sin \theta_b \\ 0 \end{bmatrix} \nu,$$

dove  $\nu$  è la quasi velocità lungo il vincolo.

Si consideri ora una ascissa lungo il binario  $s = \sqrt{(y - y_0)^2 + (x - x_0)^2}$ , per la quale vale

$$\dot{s} = \frac{2(x - x_0) \cos \theta_b + 2(y - y_0) \sin \theta_b}{2s} \nu = \nu.$$

L'inseguimento di moto è molto semplice in questo caso. Se è assegnata una legge oraria desiderata nella forma  $\hat{s}(t)$ , infatti, il controllo cinematico del tipo  $\nu = u$ , con

$$u = \dot{\hat{s}} - \Lambda(s - \hat{s})$$

è in grado di far convergere  $s$  a  $\hat{s}$  asintoticamente, come mostrato dalla funzione di Lyapunov  $V = (s - \hat{s})^T (s - \hat{s})$ . Il caso di controllo di postura è un caso particolare del precedente, mentre l'inseguimento di traccia è del tutto banale in questo caso.

### 1.3 Veicolo planare vincolato su binario circolare

Si consideri ora un veicolo come il precedente, posto su un binario circolare di centro  $(x_0, y_0)$  e raggio  $R$  come rappresentato in figura 1.2. In corrispondenza al vincolo di posizione e di orientazione si avranno due equazioni di vincolo geometrico esprimibili come

$$\begin{cases} C_1(q) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 = 0 \\ C_2(q) = \theta - \arctan\left(\frac{y - y_0}{x - x_0}\right) - \frac{\pi}{2} = 0 \end{cases}$$

In termini cinematici si avrà poi

$$\begin{cases} \frac{dC_1(q)}{dt} = 2(x - x_0)\dot{x} + 2(y - y_0)\dot{y} = 0 \\ \frac{dC_2(q)}{dt} = \dot{\theta} + \frac{y - y_0}{R^2}\dot{x} - \frac{x - x_0}{R^2}\dot{y} = 0 \end{cases},$$

ovvero, in forma Pfaffiana,

$$A(q)\dot{q} = \begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 & 0 \\ y - y_0 & -(x - x_0) & R^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = 0,$$

Anche in questo caso il rango di  $A(q)$  è due ovunque, e le velocità consentite al veicolo sono descritte da

$$\dot{q} = S(q)\nu = \begin{bmatrix} -(y - y_0) \\ (x - x_0) \\ 1 \end{bmatrix} \nu.$$

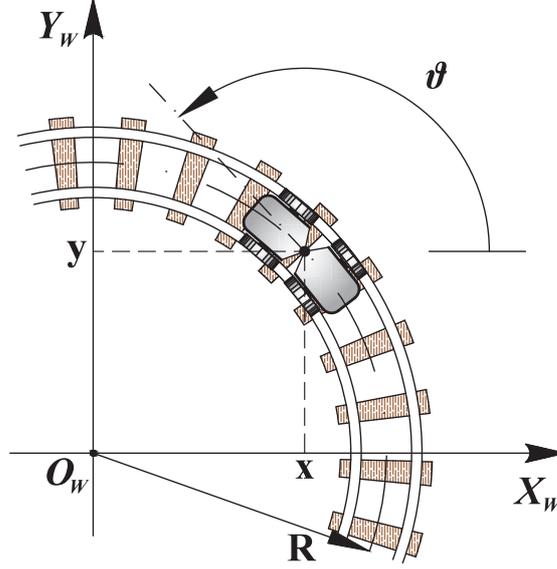


Figura 1.2: Carrello vincolato su un binario circolare di raggio  $R$  centrato nell'origine.

Considerando ora una ascissa curvilinea lungo il binario  $s = R \arctan\left(\frac{y-y_0}{x-x_0}\right)$ , si ha nuovamente

$$\dot{s} = R \frac{(x-x_0)(\dot{x}-\dot{x}_0) + (y-y_0)(\dot{y}-\dot{y}_0)}{R^2} \nu = R\nu.$$

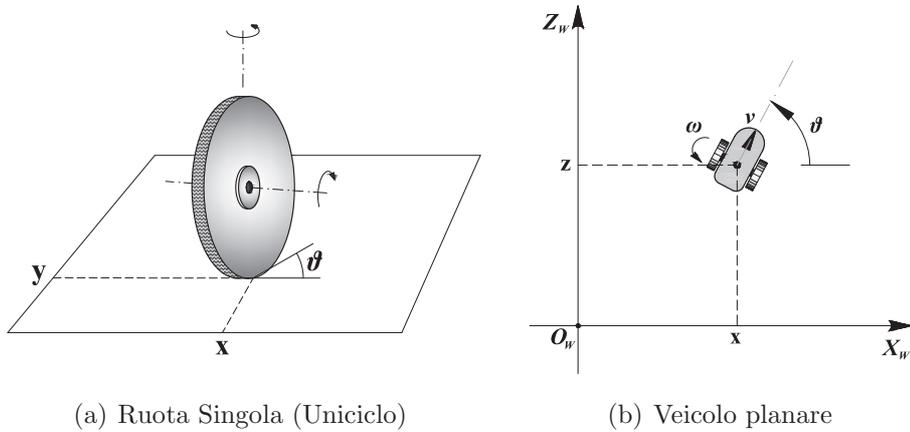
In modo del tutto analogo al caso precedente, per una assegnata legge oraria nella forma  $\hat{s}(t)$ , il controllo cinematico

$$\nu = u = R^{-1} \left( \dot{\hat{s}} - \Lambda(s - \hat{s}) \right)$$

fa convergere  $s$  a  $\hat{s}$  asintoticamente, con funzione di Lyapunov  $V = (s - \hat{s})^T (s - \hat{s})$ .

## 1.4 Veicolo planare con vincolo di ruota singola (Uniciclo)

Si consideri adesso un veicolo che si muove nel piano, cui sia fissata una sola ruota, di asse parallelo al piano, e libera di ruotare attorno al proprio asse e



(a) Ruota Singola (Uniciclo)

(b) Veicolo planare

Figura 1.3: Veicolo planare con due ruote sullo stesso asse (b), il cui modello è equivalente a quello di un uniciclo con una singola ruota (a) centrata nel punto medio dell'asse.

attorno ad un asse perpendicolare al piano e passante per il punto di contatto sul piano stesso. Si supponga inoltre che la ruota si opponga a qualsiasi traslazione nella direzione parallela al proprio asse (fig. 1.3). Scegliendo come coordinate del veicolo  $q = [x, y, \theta]^T$ , dove la coppia  $(x, y)$  indica la posizione proiettata sul piano del centro della ruota, e  $\theta$  l'orientazione della ruota rispetto all'asse delle ascisse. Il vincolo imposto dalla ruota alla traslazione del veicolo è espresso nella forma

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \tan \theta, \quad (1.2)$$

ovvero, in forma Pfaffiana,

$$A(q)\dot{q} = \begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = 0. \quad (1.3)$$

Si noti l'analogia con il primo vincolo definito sul carrello con binario rettilineo: anche in quel caso la direzione lungo la direzione dell'interasse delle ruote era interdetta dalla presenza del binario. In quel caso però tale angolo era costante, mentre adesso è esso stesso una variabile di configurazione.

La matrice dei vincoli cinematici  $A(q)$  ha rango uno ovunque, quindi il suo spazio nullo avrà dimensione pari a due. Una base delle velocità compatibili

con il vincolo è ad esempio

$$\dot{q} = S(q)\nu = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Dall'equazione (1.4) appare evidente un'interpretazione fisica delle quasi velocità: la prima componente  $\nu_1$ , corrispondente alla prima colonna di  $S(q)$  che è diretta perpendicolarmente all'interasse delle ruote, rappresenta infatti la velocità di avanzamento del veicolo (che indicheremo anche con  $v$ ), mentre  $\nu_2$  corrisponde alla velocità angolare ( $\omega$ ) attorno all'asse verticale passante per  $(x, y)$ . L'equazione (1.4) può essere quindi riscritta esplicitamente

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega. \quad (1.5)$$

È da notare che il vincolo imposto da una singola ruota nel piano non può essere ottenuto per derivazione di un vincolo geometrico. Se così fosse, infatti, questo vincolo ridurrebbe il numero delle configurazioni indipendenti del sistema, il che evidentemente non è possibile visto che il veicolo unicycle rimane in grado di raggiungere, muovendosi compatibilmente con il vincolo, qualsiasi posizione e orientazione  $q$ .

Passiamo adesso a considerare il controllo cinematico del veicolo unicycle. Considereremo i tre obiettivi di controllo precedentemente descritti, illustrati in fig. 1.4.

### 1.4.1 Inseguimento di traccia con unicycle

Nel problema dell'inseguimento di una traccia o percorso (path following) si suppone che al controllore sia fornita una descrizione di un luogo geometrico sul quale il veicolo si deve portare e rimanere. In questo problema, il moto del veicolo lungo la traccia assegnata è di interesse secondario, poichè si suppone che il luogo possa venire percorso con velocità qualsiasi, purchè non nulla.

Considereremo quindi il problema di controllare lungo una traccia assegnata il modello di un unicycle (2.78), dove la velocità  $v(t)$  si considererà assegnata (o controllata indipendentemente) e pari a  $\bar{v}(t) \neq 0$ . L'obiettivo primario è quello di progettare una legge di retroazione per la velocità di rotazione (o sterzo)  $\omega(x, y, \theta)$  (o più generalmente  $\omega(x, y, \theta, \bar{v}(t))$ ) in grado di rendere asintoticamente nulla la distanza tra il veicolo e la traccia (fig. 1.4-b)).

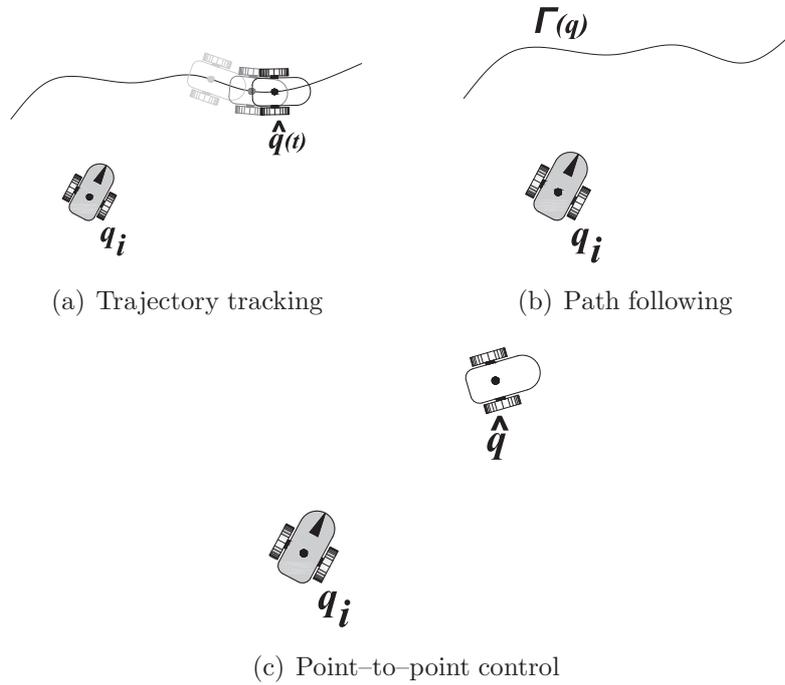


Figura 1.4: Problemi di controllo per unicycle.

Inizieremo considerando una traccia rettilinea che, senza perdere di generalità, può essere pensata giacere sull'asse orizzontale  $y = 0$ . Fissata una velocità di avanzamento  $\bar{v}(t)$ , il modello cinematico del veicolo 2.78 diviene

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \bar{v}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega. \quad (1.6)$$

Il moto desiderato del veicolo, descritto da  $\hat{y}(t) \equiv 0$ , implica  $\dot{\hat{y}}(t) \equiv 0$ , quindi dalla seconda equazione (2.78) anche  $\hat{\theta}(t) \equiv 0$ . Scopo del controllore è quindi regolare a zero le due variabili  $y$  e  $\theta$ . In generale non vi sono specifiche sulla traiettoria delle ascisse  $x(t)$ , che dipenderà dalla velocità assegnata  $\bar{v}(t)$ : questa potrebbe essere in realtà determinata da una legge di retroazione indipendente, tesa ad esempio a mantenere costante la distanza da un veicolo di riferimento che si muove sulla stessa retta.

### Controllo mediante linearizzazione approssimata

Consideriamo di nuovo il modello cinematico dell'unicycle in coordinate cartesiane linearizzato attorno alla traiettoria nominale di un veicolo che avanza

lungo  $y = 0$  con velocità  $\bar{v}(t)$ . Detto  $\tilde{\xi} = [x - \int_0^t \bar{v}(t) dt, y, \theta]^T$ ,  $\tilde{v} = v - \bar{v}(t)$  si ha

$$\dot{\tilde{\xi}} = A\tilde{\xi} + B_v\tilde{v} + B_\omega\omega$$

con

$$A = \left[ \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \bar{v}(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|cc} A_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & A_2 \\ 0 & & \end{array} \right],$$

e

$$B_v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{v,1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad B_\omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -B_{\omega,2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Il sistema risulta quindi effettivamente scomposto in due sottosistemi, ciascuno completamente raggiungibile da uno dei due ingressi e irraggiungibile dall'altro:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\xi}}_1 &= B_{v,1}\tilde{v} \\ \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\xi}}_2 \\ \dot{\tilde{\xi}}_3 \end{bmatrix} &= A_2 \begin{bmatrix} \tilde{\xi}_2 \\ \tilde{\xi}_3 \end{bmatrix} + B_{\omega,2}\omega \end{aligned}$$

I due sottosistemi sono anche in forma canonica di controllo. La stabilizzazione del secondo sottosistema nell'origine, che è sufficiente a portare il veicolo sulla traccia desiderata, può essere ottenuta semplicemente con una retroazione degli errori in  $y$  e  $\theta$  ponendo

$$\omega = -K_2\tilde{\xi}_2 - K_3\tilde{\xi}_3,$$

dove la scelta di  $K_2, K_3 > 0$  alloca gli autovalori nel semipiano sinistro. Se in aggiunta si desidera che il veicolo raggiunga il riferimento lungo la traccia, basterà porre ulteriormente  $\tilde{v} = -K_1\tilde{\xi}_1$ ,  $K_1 > 0$ .

Naturalmente, questo risultato si appoggia sulla ipotesi che lo stato sia noto, e garantisce la convergenza sull'asse  $x$  solo per condizioni iniziali sufficientemente piccole. Qualora lo stato non sia completamente noto, si può ricorrere ad un osservatore asintotico che sulla base di alcune uscite permetta di risalire all'intero stato. Ad esempio, scegliendo come uscita la distanza  $y$  dalla carreggiata sulla quale vogliamo stabilizzare il veicolo, si ottiene la seguente matrice di osservabilità per il sistema linearizzato

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{v}(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

da cui  $\text{Ker}(\mathcal{O}) = \text{Im}([1 \ 0 \ 0])$ . A partire da tale uscita il sistema linearizzato approssimato non è completamente osservabile. Tuttavia, essendo  $x$  lo

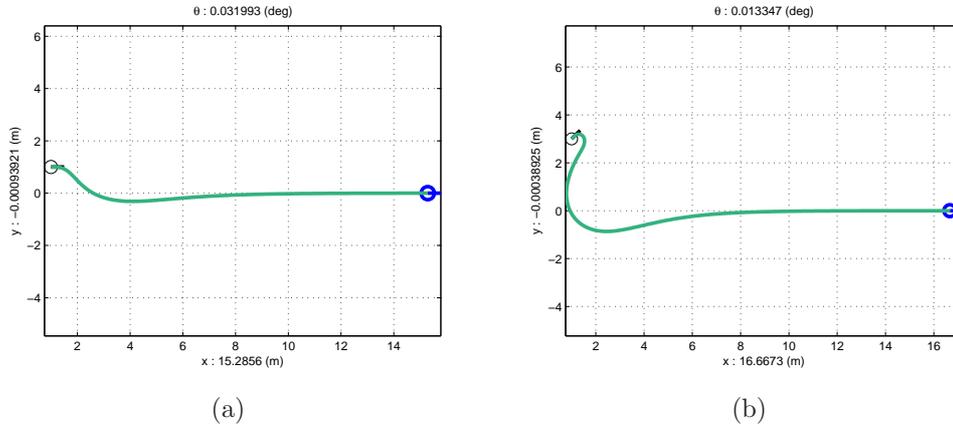


Figura 1.5: Risultati della simulazione per la stabilizzazione dell'uniciclo sulla retta  $y = 0$  mediante controllore basato sul sistema linearizzato approssimato attorno alla traccia di riferimento con  $\hat{v} = 10$  e stato iniziale: (a)  $q_0 = [x_0, y_0, \theta_0]^T = [1, 1, 0]$ ; (b)  $q_0 = [x_0, y_0, \theta_0]^T = [1, 3, \frac{\pi}{4}]$ .

stato non ricostruibile, rimane comunque possibile utilizzare tale uscita per ricostruire  $\theta$  e realizzare quindi l'inseguimento di traccia sull'asse  $x$ .

I risultati di alcune simulazioni (svolte con **Simulink**) sono riportati in fig. 1.5.

### Controllo mediante funzione di Lyapunov

È possibile osservare che in effetti la dinamica delle variabili  $y$  e  $\theta$  non dipende in alcun modo dalla  $x$ . Quindi possiamo studiare la seconda e terza equazione di (2.78) come un sottosistema a sé stante, con variabili di stato  $(y, \theta)$  ed ingresso  $\omega$  che le deve regolare a zero<sup>1</sup>. Possiamo quindi costruire una funzione candidata di Lyapunov di controllo positiva definita intorno all'origine nello spazio di stato ridotto  $(y, \theta)$  nella forma

$$V(q) = \frac{1}{2}(y^2 + \theta^2),$$

per la quale si ha

$$\dot{V}(q) = y \sin \theta \bar{v}(t) + \theta \omega.$$

<sup>1</sup>Si osservi che, in termini del sistema linearizzato approssimato sopra visto con  $\hat{\omega} = 0$ , questa suddivisione del sistema corrisponde a considerare il solo sottosistema controllabile da  $\omega$ .

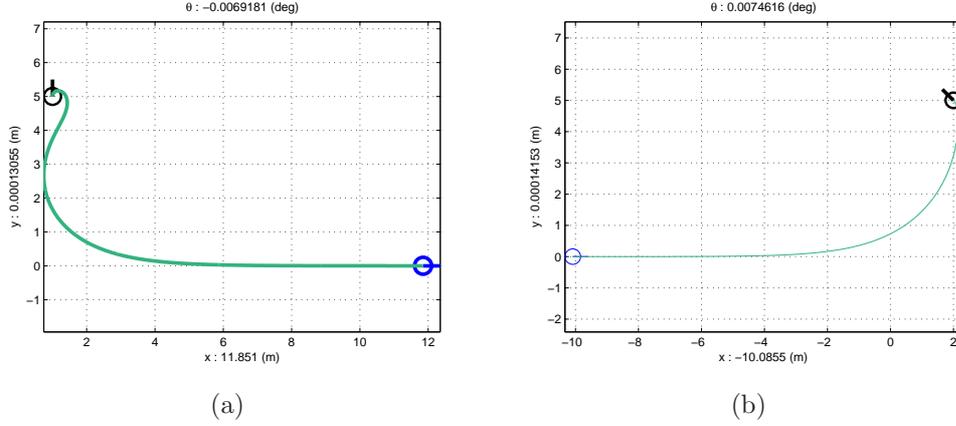


Figura 1.6: Risultati della simulazione per la stabilizzazione dell'uniciclo sulla retta  $y = 0$ : (a) stato iniziale  $q_0 = [x_0, y_0, \theta_0]^T = [1, 5, \frac{\pi}{2}]^T$  e  $\hat{v} = 10$ ; (b) stato iniziale  $q_0 = [x_0, y_0, \theta_0]^T = [2, 2, \frac{3\pi}{4}]^T$  e  $\hat{v} = -10$ . Per tutte le simulazioni la costante di controllo  $K_\theta$  è stata scelta pari a 20.

Scegliendo come legge di controllo

$$\omega(y, \theta) = -y \frac{\sin \theta}{\theta} \bar{v}(t) - K_\theta \theta \quad (1.7)$$

con  $K_\theta > 0$  costante, si ottiene  $\dot{V}(q) = -K_\theta \theta^2$ , che è negativa semi-definita. Si noti che la funzione di retroazione  $\omega(y, \theta)$  è ben definita e continua ovunque, in particolare anche in  $\theta = 0$ , dove vale  $\omega(y, 0) = -y \bar{v}(t)$ .

Si ottiene immediatamente che l'insieme  $R = \{\dot{V}(q) = 0\}$  è dato da  $R = \{y, \theta | \theta = 0\}$ . Da qui si ricava facilmente che l'unica traiettoria del sistema interamente contenuta in  $R$  è caratterizzata da  $\dot{\theta} = 0 = \omega = -y \bar{v}(t)$ , dalla quale infine si ottiene che, per  $\bar{v}(t) \neq 0$ , tutte le traiettorie che partono dall'interno di una curva di livello di  $V$  convergono al punto di equilibrio  $(y, \theta) = (0, 0)$ . Inoltre, essendo  $V$  radialmente illimitata, è possibile concludere per la globale asintotica stabilità dell'equilibrio.

I risultati di alcune simulazioni (svolte con **Simulink**) sono riportati in fig. 1.6.

### Controllo mediante linearizzazione in retroazione

Come già detto precedentemente, stabilizzare l'uniciclo sull'asse  $x$ , implica controllare a zero la variabile di stato  $y$  e l'orientazione  $\theta$ . Supponiamo di avere accesso alla variabile di stato  $y$  che rappresenta istante per istante la

distanza del veicolo dalla carreggiata ( $y = 0$ ) sulla quale vogliamo stabilizzarlo, e consideriamola come uscita del sistema ( $h(q) = y$ ). Deriviamo l'uscita stessa finchè non appare l'unico ingresso ancora a disposizione, ovvero la velocità angolare  $\omega$  (la velocità  $v$  essendo stata assegnata in altro modo, pari a  $\bar{v}(t)$ , non necessariamente costante):

$$\begin{aligned} z_1 &= y \\ \dot{z}_1 &= \bar{v}(t) \sin \theta \\ \ddot{z}_1 &= \dot{\bar{v}}(t) \sin \theta + \bar{v}(t) \omega \cos \theta = \nu \end{aligned}$$

dove  $\nu$  è un nuovo ingresso da progettare opportunamente. Da quest'ultima equazione si ricava il controllo

$$\omega = \frac{\nu - \dot{\bar{v}}(t) \sin \theta}{\bar{v}(t) \cos \theta}. \quad (1.8)$$

Si noti che, assumendo  $\bar{v}(t) \neq 0$ , tale controllo non è definito per  $\theta = \pm\pi/2$ . Si consideri adesso il seguente cambio parziale di coordinate

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \bar{v}(t) \cos \theta \end{bmatrix}$$

ottenuto scegliendo l'uscita  $y$  e la sua derivata prima. La dinamica di queste due variabili è

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \dot{y} = \bar{v}(t) \cos \theta = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \dot{\bar{v}}(t) \cos \theta - \bar{v}(t) \omega \sin \theta, \end{cases}$$

ed imponendo il controllo definito in (1.8) si ottiene

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \nu \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \nu,$$

ovvero un sistema lineare. Di fatto la scelta del controllo (1.8) ci permette di eliminare alcune delle nonlinearità presenti nel sistema. Scegliendo poi  $\nu = -k_o \xi_1 - k_1 \xi_2$ , si garantisce che  $\xi_1 \rightarrow 0$  (ovvero che  $y \rightarrow 0$ ) asintoticamente nel modo desiderato, in relazione al valore assegnato alle costanti  $k_o$  e  $k_1$ . Come già detto precedentemente, il cambio di coordinate introdotto non è completo. Per completarlo, consideriamo una delle variabili di stato  $q$  che descrivono l'uniciclo con l'unico vincolo che, insieme a  $\xi_1$  e  $\xi_2$ , formi un cambio di variabili ammissibili. Scegliendo  $x$  otteniamo

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \bar{v}(t) \cos \theta \\ x \end{bmatrix} = \Phi(q)$$

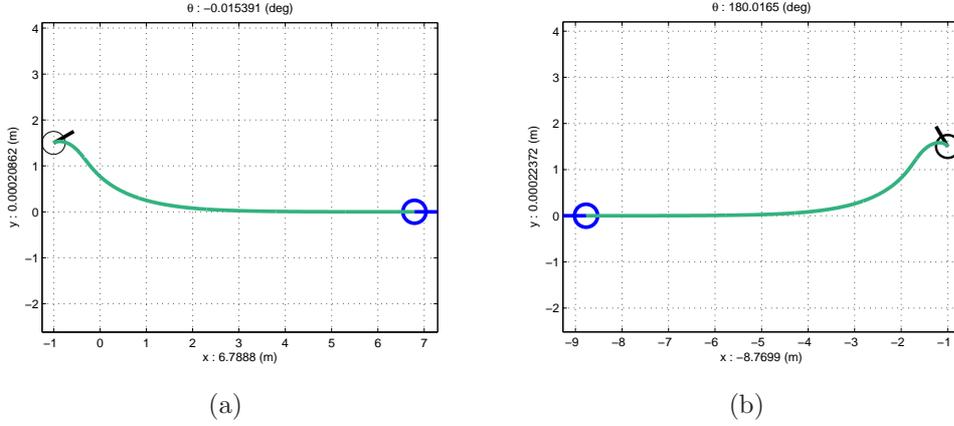


Figura 1.7: Risultati della simulazione per la stabilizzazione dell'uniciclo sulla retta  $y = 0$ , a partire dalla posizione iniziale  $x_o = -1$  e  $y_o = 1.5$  con orientamento iniziale: (a)  $\theta_o = \pi/2$ , (b)  $\theta_o = 2\pi/3$ . Si noti come il veicolo, pur raggiungendo in entrambi i casi la retta  $y = 0$ , assume un orientamento finale pari a 0 (a) o  $\pi$  (b), a seconda delle condizioni iniziali.

il quale rappresenta un cambio di variabili ammissibile in quanto  $\det \left[ \frac{\partial \Phi(q)}{\partial q} \right] \neq 0$  purchè  $\theta \neq \pm\pi/2$ . La dinamica completa del sistema, con la scelta fatta per  $\nu$ , diviene quindi

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = -k_o \xi_1 - k_1 \xi_2 \\ \dot{\eta} = \bar{v}(t) \cos \theta. \end{cases}$$

La scelta fatta per  $\nu$  garantisce che  $\xi_1 = 0$  per  $t \rightarrow \infty$ . Questo implica che  $\dot{\xi}_1 = 0 \Rightarrow \xi_2 = 0 = \hat{v}(t) \sin \theta$ , la quale, assumendo che  $\bar{v}(t) \neq 0$ , è soddisfatta se  $\theta = 0, \pi$ . Analizzando il comportamento della variabile  $\eta$  si osserva che

$$\dot{\eta} = \begin{cases} \bar{v}(t) & \text{se } \theta = 0 \\ -\bar{v}(t) & \text{se } \theta = \pi. \end{cases}$$

Questo implica a sua volta che il veicolo si muove con velocità  $\hat{v}(t)$  nella direzione delle  $x$  crescenti o decrescenti a seconda delle condizioni iniziali. Il compito di stabilizzare il veicolo sull'asse  $x$  risulta quindi compiuto (cioè  $y = 0$  per  $t \rightarrow \infty$ ), tuttavia, la convergenza a zero dell'orientamento  $\theta$  del veicolo dipende fortemente dalle condizioni iniziali ed è governato dalla dinamica  $\eta$  non accessibile. I risultati di un paio di simulazioni (svolte con Simulink) sono riportati in figura 1.7.

**Esercizio.** Si progetti un controllore che permetta ad un unicycle di inseguire una traccia consistente in una retta generica, ovvero in una circonferenza, o ancora in una curva arbitraria nel piano (in quest'ultimo caso, si diano condizioni sufficienti affinché il problema sia risolubile). *Suggerimento:* si consideri il problema di inseguire la retta tangente al punto istantaneamente più vicino al veicolo sulla traccia.

## 1.4.2 Inseguimento del moto di un punto con unicycle

Per l'inseguimento di un moto assegnato (figura 1.8), è da considerare il fatto che i vincoli cui è sottoposto l'unicycle possono rendere impossibile raggiungere e mantenere il veicolo sul punto obiettivo, se questo si muove con legge arbitraria.

Si consideri infatti un moto desiderato generale, descritto da una terna di funzioni assegnate  $\hat{q}(t) = (\hat{x}(t), \hat{y}(t), \hat{\theta}(t))$ . Definito l'errore di posizionamento tra il veicolo da controllare e l'obiettivo come  $\tilde{e} = [x - \hat{x}, y - \hat{y}, \theta - \hat{\theta}]^T$ , il problema è ricondotto a un problema di stabilizzazione nell'origine per  $\tilde{e}$ . Notando che l'errore di inseguimento prescinde dalla posizione assoluta dei due veicoli rispetto ad una terna fissa di riferimento  $\langle W \rangle$ , ma dipende solamente dalla loro posizione relativa, è possibile riferire le variabili errore rispetto ad una terna di riferimento solidale con il veicolo "inseguitore"  $\langle I \rangle$  ed orientata opportunamente, come riportato in figura 1.8. Il legame tra le due terne è espresso da una trasformazione rigida di rototraslazione nel piano  ${}^I T_W$ , che trasforma la posizione dell'obiettivo secondo l'espressione (in coordinate omogenee)

$$\begin{bmatrix} {}^I \hat{x} \\ {}^I \hat{y} \\ 1 \end{bmatrix} = {}^I T_W \begin{bmatrix} {}^W \hat{x} \\ {}^W \hat{y} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

dove

$${}^I T_W = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & -x \cos \theta - y \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta & x \sin \theta - y \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nelle nuove coordinate, quindi, si scrive l'errore

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -{}^I \hat{x} \\ -{}^I \hat{y} \\ \theta - \hat{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x - \hat{x}) \cos \theta + (y - \hat{y}) \sin \theta \\ -(x - \hat{x}) \sin \theta + (y - \hat{y}) \cos \theta \\ \theta - \hat{\theta} \end{bmatrix}$$

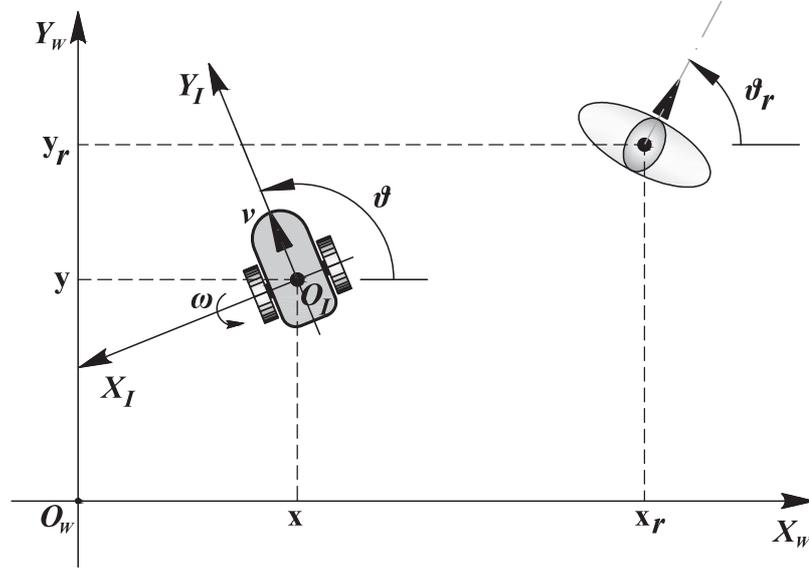


Figura 1.8: Riferimento assoluto  $\langle W \rangle$  e riferimento solidale al veicolo inseguitore  $\langle I \rangle$ .

Derivando rispetto al tempo questa espressione si ha

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v + e_2\omega - \cos(e_3 + \hat{\theta})\dot{\hat{x}} - \sin(e_3 + \hat{\theta})\dot{\hat{y}} \\ -e_1\omega + \sin(e_3 + \hat{\theta})\dot{\hat{x}} - \cos(e_3 + \hat{\theta})\dot{\hat{y}} \\ \omega - \dot{\hat{\theta}} \end{bmatrix}. \quad (1.10)$$

Si consideri ora la possibilità di avere un equilibrio con errore nullo, cioè un inseguimento perfetto con  $e \equiv 0$  e  $\dot{e} \equiv 0$ . Dalla prima e terza delle (1.10) si ottiene immediatamente che deve essere

$$\begin{aligned} v &= \dot{\hat{x}} \cos \hat{\theta} + \dot{\hat{y}} \sin \hat{\theta} \\ \omega &= \dot{\hat{\theta}} \end{aligned},$$

mentre per soddisfare la seconda equazione delle (1.10) è necessario che sia

$$\dot{\hat{x}} \sin \hat{\theta} - \dot{\hat{y}} \cos \hat{\theta} = \begin{bmatrix} \sin \hat{\theta} & -\cos \hat{\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{y}} \end{bmatrix} = 0.$$

Questa condizione esprime un vincolo sul moto del punto da inseguire, che è dello stesso tipo di quello cui è sottoposto il veicolo inseguitore. In altri termini, l'inseguimento esatto da parte di un unicyclo è possibile solo se il punto

obiettivo si muove anch'esso come un uniciclo (questa può essere considerata una istanza del cosiddetto “principio del modello interno” nella teoria del servocontrollo).

Se il moto dell'obiettivo da inseguire è generato proprio da un modello di uniciclo, ovvero se

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{y}} \\ \dot{\hat{\theta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \hat{\theta} \\ \sin \hat{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} \hat{v} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \hat{\omega},$$

la dinamica dell'errore di inseguimento (1.10) assume la forma semplificata

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v + e_2 \omega - \hat{v} \cos e_3 \\ -e_1 \omega + \hat{v} \sin e_3 \\ \omega - \hat{\omega} \end{bmatrix}. \quad (1.11)$$

### Controllo mediante linearizzazione approssimata

Il sistema (1.11) ha adesso un equilibrio in  $e = 0$  corrispondente agli ingressi  $v = \hat{v}(t)$  e  $\omega = \hat{\omega}(t)$ . Ponendo  $\xi = e$  e definendo le variabili di controllo traslate  $u_1 = v - \hat{v}(t)$  e  $u_2 = \omega - \hat{\omega}(t)$ , il sistema assume la forma  $\dot{\xi} = f(\xi, t) + g(\xi)u$ , ovvero

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} \hat{v}(t)(1 - \cos \xi_3) + \hat{\omega}(t)\xi_2 \\ \hat{v}(t)\sin \xi_3 - \hat{\omega}(t)\xi_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} \xi_2 \\ -\xi_1 \\ 1 \end{bmatrix} u_2. \quad (1.12)$$

Per controllare il sistema (1.12) si può procedere a linearizzarne il modello intorno all'equilibrio nell'origine ( $\xi = 0, u = 0$ ), per poi applicare tecniche di controllo lineare. Il modello linearizzato  $\dot{\xi} = A\xi + Bu$  si ottiene facilmente come

$$A = \left. \begin{bmatrix} 0 & \hat{\omega}(t) + u_2 & \hat{v} \sin \xi_3 \\ -\hat{\omega} - u_2 & 0 & \hat{v} \cos \xi_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right|_{\substack{\xi = 0 \\ u = 0}} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{\omega}(t) & 0 \\ -\hat{\omega}(t) & 0 & \hat{v}(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \left. \begin{bmatrix} 1 & \xi_2 \\ 0 & -\xi_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right|_{\substack{\xi = 0 \\ u = 0}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il sistema è in generale tempo variante, essendo gli elementi della matrice dinamica  $A$  funzioni esplicite del tempo.

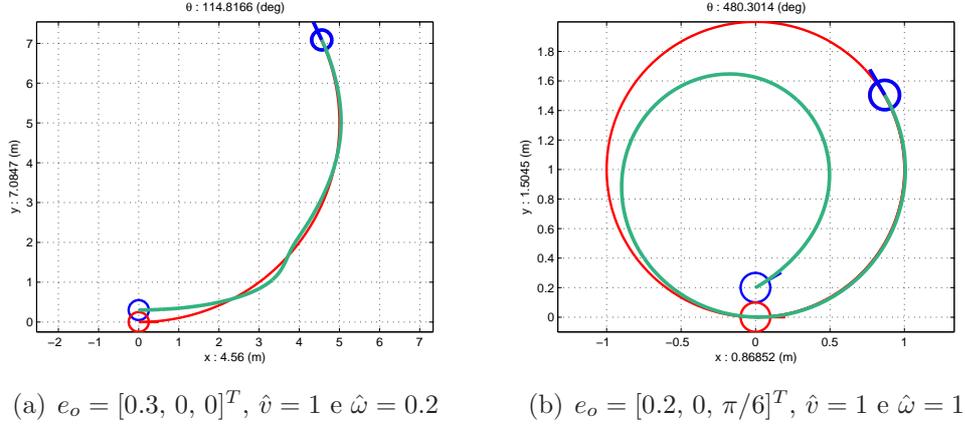


Figura 1.9: Inseguimento di obiettivi mobili (in rosso) con veicolo di tipo unicycle (in blu). Il controllore implementato, basato sul modello linearizzato, è costituito da una semplice retroazione dello stato ( $u = K\xi$ ) il quale è stato stimato utilizzando come unica uscita misurata l'errore  $e_1$ . Il sistema linearizzato risulta completamente osservabile dalla misura di  $e_1$  purchè la velocità di avanzamento e/o quella di rotazione dell'obiettivo da inseguire sia diversa da zero.

Il controllo del modello linearizzato si può effettuare con metodi elementari solo nell'ipotesi che il riferimento abbia velocità  $\hat{v}(t) = \hat{v}$ ,  $\hat{\omega}(t) = \hat{\omega}$  costanti. In questa ipotesi, il sistema linearizzato ha matrice di raggiungibilità

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\hat{\omega}^2 & \hat{\omega}\hat{v} \\ 0 & 0 & -\hat{\omega} & \hat{v} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ed è quindi completamente raggiungibile purchè la velocità di avanzamento e/o quella di rotazione dell'obiettivo da inseguire sia diversa da zero. Se questo è il caso, una semplice retroazione degli stati  $u = K\xi$  permette di allocare gli autovalori di  $A + BK$  liberamente nel semipiano sinistro, e quindi può rendere l'inseguimento asintoticamente stabile. Naturalmente, questo risultato si appoggia sulla ipotesi che sia lo stato (ovvero l'errore di inseguimento) che le velocità dell'obiettivo (da cui dipende la retroazione  $K = K(\hat{v}, \hat{\omega})$ ) siano note, e garantisce la convergenza sull'obiettivo solo per condizioni iniziali sufficientemente piccole. Ad illustrazione di questa tecnica, in figura 1.9 è riportato il risultato di un paio di simulazioni realizzate in ambiente Simulink/Matlab.

Nel caso più generale di velocità dell'obiettivo non costanti, il problema di stabilizzazione è più complesso. Una tecnica semplice, ma sulle cui caratteristiche di convergenza non è possibile dare garanzie precise, consiste

nell'applicare una versione "estesa" della tecnica di allocazione, calcolando una matrice di retroazione  $K(t) = K(\hat{v}(t), \hat{\omega}(t))$  che allochi gli autovalori istantanei di  $A(t) + BK(t)$  in una posizione costante nel semipiano sinistro (questo può venir fatto con un algoritmo di allocazione in forma simbolica, ovvero ricalcolando numericamente la retroazione ad intervalli di tempo sufficientemente brevi, in modo simile a come si procede in un filtro di Kalman esteso). Si noti che la procedura di allocazione estesa non è sufficiente a garantire la stabilità nel caso generale: comunque, se le velocità  $\hat{v}(t)$  e  $\hat{\omega}(t)$  sono limitate e le loro derivate  $\dot{\hat{v}}(t)$  e  $\dot{\hat{\omega}}(t)$  sono sufficientemente piccole, il teorema di Rosenbrock sulla stabilità dei sistemi lineari lentamente tempo varianti garantisce l'esponenziale stabilità del sistema linearizzato risultante.

### Controllo mediante funzione di Lyapunov

Torniamo a considerare la dinamica dell'errore di tracking (1.11).

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v + e_2\omega - \hat{v} \cos e_3 \\ -e_1\omega + \hat{v} \sin e_3 \\ \omega - \hat{\omega} \end{bmatrix}.$$

Si scelga come funzione candidata

$$V(e) = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2) + K(1 - \cos e_3),$$

con  $K > 0$ , per la quale si ha

$$\dot{V}(e) = e_1(v + e_2\omega - \hat{v} \cos e_3) + e_2(\hat{v} \sin e_3 - e_1\omega) + K \sin e_3(\omega - \hat{\omega}).$$

Scegliendo i controlli

$$\begin{cases} v = \hat{v} \cos e_3 - \lambda_1 e_1 \\ \omega = \hat{\omega} - \frac{e_2}{K} \hat{v} - \lambda_2 \sin e_3 \end{cases},$$

con  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  guadagni positivi, si ottiene

$$\dot{V} = -\lambda_1 e_1^2 - K \lambda_2 \sin^2 e_3.$$

Richiamando il teorema di Lasalle-Yoshizawa (versione del teorema di Lasalle che lo generalizza a sistemi tempo varianti), avendosi  $V(e)$  positiva definita,  $\dot{V}(e) = -W(e)$  negativa semi-definita, e definito l'insieme  $S = \{e | W(e) = 0\}$ , si ha che  $e(t) \rightarrow S$  per  $t \rightarrow \infty$ . Per  $e \in S$  vale  $v = \hat{v}$  e  $\omega = \hat{\omega} - \frac{e_2}{K} \hat{v}$ , da cui la dinamica del sistema diviene

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{e}_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_2 \hat{\omega} - \frac{1}{K} e_2^2 \hat{v} \\ 0 \\ -\frac{1}{K} e_2 \hat{v} \end{bmatrix},$$

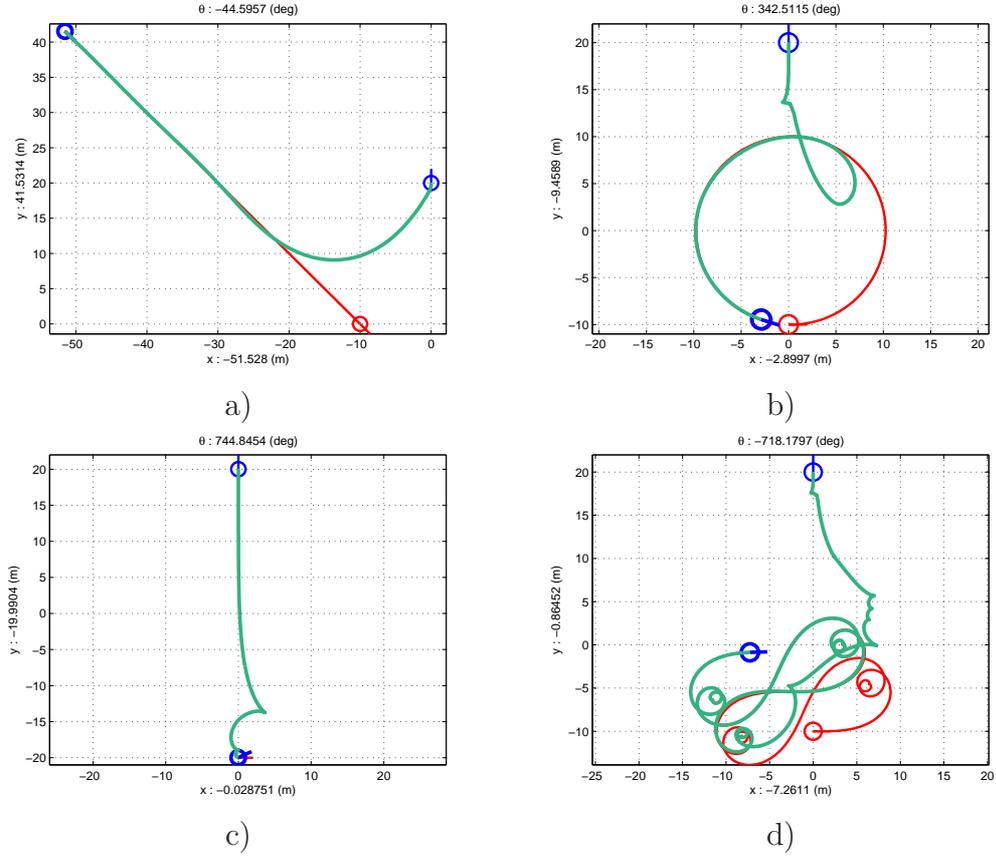


Figura 1.10: Inseguimento di obiettivi mobili con veicolo di tipo unicycle.

da cui si ricava che, se almeno una velocità dell'obiettivo da inseguire è diversa da zero, l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema (1.11). Ad illustrazione di questa tecnica, fissando  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ,  $K = 10$ , e scegliendo come condizione iniziale del veicolo inseguitore il punto  $q_0 = [x_0, y_0, \theta_0]^T = [0, 20, \frac{\pi}{2}]^T$  si ottengono vari risultati a seconda delle velocità del riferimento.

Nel primo esempio (fig. 1.10-a) il veicolo di riferimento ha come condizione iniziale  $\hat{q}_0 = [-10, 0, -\frac{\pi}{4}]^T$  e velocità  $[\hat{v}, \hat{\omega}]^T = [-10, 0]^T$ , che definiscono una retta di equazione  $y = -x - 10$ . Se il veicolo di riferimento ha come condizione iniziale  $\hat{q}_0 = [0, -10, 0]^T$  e velocità  $[\hat{v}, \hat{\omega}]^T = [10, 1]^T$ , la sua traiettoria descrive una circonferenza di raggio  $R = 10$  nello spazio di stato del veicolo, percorsa a velocità costante (fig. 1.10-b). Nel terzo esempio (fig. 1.10-c) il veicolo di riferimento ha come condizione iniziale  $\hat{q}_0 = [0, -20, 0]^T$ . Le velocità del riferimento sono stavolta  $[\hat{v}, \hat{\omega}]^T = [0, 1]^T$  corrispondenti ad una traiettoria di rotazione sul posto. Nel quarto ed ultimo esempio (figura 1.10

in basso a destra) il veicolo di riferimento ha come condizione iniziale  $\hat{q}_0 = [0, -10, 0]^T$  e velocità tempo variante  $[\hat{v}, \hat{\omega}]^T = [20 \cos(t), 10 \sin(t)]^T$ , le quali descrivono una traiettoria generica nello spazio di stato.

### Controllo mediante linearizzazione in retroazione

Affinché l'inseguimento abbia esito positivo è necessario annullare l'errore di posizione

$$e = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - \hat{x} \\ y - \hat{y} \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

dove con  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  indichiamo la posizione dell'uniciclo di riferimento e con  $x$  e  $y$  la posizione di quello che insegue. Con questa definizione di errore è naturale scegliere come funzioni di uscita per l'uniciclo inseguitore (quello che controlleremo)

$$\begin{cases} h_1(q) = x \\ h_2(q) = y. \end{cases}$$

Deriviamo ripetutamente entrambe le uscite  $h_i$ ,  $i = 1, 2$  fino alla comparsa di almeno uno dei due ingressi a disposizione  $v$  e  $\omega$ :

$$\begin{cases} z_1 = h_1(q) = x \\ \dot{z}_1 = v \cos \theta \end{cases} \quad \begin{cases} z_2 = h_2(q) = y \\ \dot{z}_2 = v \sin \theta \end{cases}$$

Per entrambe le uscite, le derivate prime dipendono solo dalla velocità lineare  $v$ , ma non da  $\omega$ . Questo sta ad indicare che l'ingresso  $\omega$  agisce sulle uscite scelte con un certo ritardo rispetto all'altro ingresso  $v$ . Assumiamo quindi di non poter agire direttamente sull'ingresso  $v$ , ma sulla sua derivata per mezzo di un nuovo ingresso  $\mu$ , cioè  $\dot{v} = \mu$ . Questo di fatto corrisponde in tempo continuo a ritardare l'effetto dell'ingresso  $v$  sulle uscite.

Di conseguenza, lo stato adesso è  $[x \ y \ \theta \ v]^T$ , gli ingressi sono  $(\mu, \omega)$  e il modello dell'uniciclo assume la seguente forma:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos \theta \\ v \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mu + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \omega. \quad (1.14)$$

Procedendo con le derivazioni delle funzioni di uscita ( $v$  non è più un ingresso adesso)

$$\begin{cases} z_1 = x \\ \dot{z}_1 = v \cos \theta \\ \ddot{z}_1 = \dot{v} \cos \theta - v \dot{\theta} \sin \theta = \\ = \mu \cos \theta - v \omega \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} z_2 = y \\ \dot{z}_2 = v \sin \theta \\ \ddot{z}_2 = \dot{v} \sin \theta + v \dot{\theta} \cos \theta = \\ = \mu \sin \theta + v \omega \cos \theta, \end{cases}$$

si può notare che per entrambe le uscite sono apparsi entrambi gli ingressi in corrispondenza della derivata seconda. Si consideri quindi il seguente cambio di coordinate

$$\xi = \Phi(q) = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \cos \theta v \\ y \\ \sin \theta v \end{bmatrix}$$

ottenuto prendendo le uscite  $x$  e  $y$ , e le sue derivate prime. La dinamica nelle nuove coordinate diviene

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \mu \cos \theta - v \omega \sin \theta \\ \dot{\xi}_3 = \xi_4 \\ \dot{\xi}_4 = \mu \sin \theta + v \omega \cos \theta. \end{cases} \quad (1.15)$$

Dalla derivata seconda di entrambe le uscite si ottiene

$$\begin{bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta v \\ \sin \theta & \cos \theta v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \omega \end{bmatrix} = E(q)u.$$

Se  $v \neq 0$  la matrice  $E(q)$  è *non singolare*. Imponendo  $\ddot{z}_1 = \nu_1$  e  $\ddot{z}_2 = \nu_2$ , con  $\nu_1$  e  $\nu_2$  ulteriori ingressi da progettare successivamente, si possono ottenere gli ingressi  $\mu$  e  $\omega$  funzione dei nuovi ingressi  $\nu_1$  e  $\nu_2$ , ovvero

$$u = \begin{bmatrix} \mu \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta/v & \cos \theta/v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix} = E^{-1}(q)\nu. \quad (1.16)$$

Sostituendo (1.16) in 1.15 si ottiene

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \nu_1 \\ \dot{\xi}_3 = \xi_4 \\ \dot{\xi}_4 = \nu_2 \end{cases} \quad (1.17)$$

ovvero un sistema lineare e disaccoppiato. In altre parole, la scelta fatta per gli ingressi  $\mu$  e  $\omega$  ha permesso la cancellazione di tutte le nonlinearità rimaste in 1.15.

Non rimane che costruire le retroazioni dei nuovi stati  $\xi_i$  sui nuovi ingressi  $\nu_i$  e posizionare i poli a nostro piacimento in modo da annullare l'errore  $e$

definito dall'equazione (1.13). In definitiva possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
\nu_1 &= \ddot{\xi}_1 = \ddot{x}_r + \lambda_1 \dot{x}_r + \lambda_0 x_r + \lambda \xi = \\
&= \ddot{x}_r + \lambda_1 \dot{x}_r + \lambda_0 x_r + \underbrace{\begin{bmatrix} -\lambda_0 & -\lambda_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\lambda} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} = \\
&= \ddot{x}_r + \lambda_1 \dot{x}_r + \lambda_0 x_r - \lambda_0 \xi_1 - \lambda_1 \xi_2 = \\
&= \ddot{x}_r - \lambda_1 (\dot{\xi}_1 - \dot{x}_r) - \lambda_0 (\xi_1 - x_r) \\
&\quad \downarrow \\
\underbrace{(\ddot{\xi}_1 - \ddot{x}_r)}_{\ddot{e}_x} + \lambda_1 \underbrace{(\dot{\xi}_1 - \dot{x}_r)}_{\dot{e}_x} + \lambda_0 \underbrace{(\xi_1 - x_r)}_{e_x} &= 0 \tag{1.18}
\end{aligned}$$

(dove si suppone di conoscere  $\dot{x}_r$  e  $\ddot{x}_r$ , rispettivamente velocità e accelerazione dell'uniciclo di riferimento lungo l'asse  $x$ ) quindi scegliendo opportunamente i coefficienti  $\lambda_0$  e  $\lambda_1$  possiamo annullare l'errore  $e_x$ . Analogamente per  $e_y$  scriviamo:

$$\begin{aligned}
\nu_2 &= \ddot{\xi}_3 = \ddot{y}_r + \gamma_1 \dot{y}_r + \gamma_0 y_r + \gamma \xi = \\
&= \ddot{y}_r + \gamma_1 \dot{y}_r + \gamma_0 y_r + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\gamma_0 & -\gamma_1 \end{bmatrix}}_{\gamma} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} = \\
&= \ddot{y}_r + \gamma_1 \dot{y}_r + \gamma_0 y_r - \gamma_0 \xi_3 - \gamma_1 \xi_4 = \\
&= \ddot{y}_r - \gamma_1 (\dot{\xi}_3 - \dot{y}_r) - \gamma_0 (\xi_3 - y_r) \\
&\quad \downarrow \\
\underbrace{(\ddot{\xi}_3 - \ddot{y}_r)}_{\ddot{e}_y} + \gamma_1 \underbrace{(\dot{\xi}_3 - \dot{y}_r)}_{\dot{e}_y} + \gamma_0 \underbrace{(\xi_3 - y_r)}_{e_y} &= 0 \tag{1.19}
\end{aligned}$$

I polinomi sono del secondo ordine pertanto in base ai coefficienti scelti possiamo avere due poli reali oppure complessi coniugati ottenendo andamenti diversi per  $e_x$  e  $e_y$ .

Ad illustrazione di questa tecnica, scegliendo come condizione iniziale del veicolo inseguitore il punto  $q_0 = [x_0, y_0, \theta_0]^T = [0, 20, \frac{\pi}{2}]^T$  si ottengono vari risultati a seconda delle velocità del riferimento.

Nel primo esempio (fig. 1.11-a) il veicolo di riferimento ha come condizione iniziale  $\hat{q}_0 = [-10, 0, -\frac{\pi}{4}]^T$  e velocità  $[\hat{v}, \hat{\omega}]^T = [-10, 0]^T$ , che definiscono

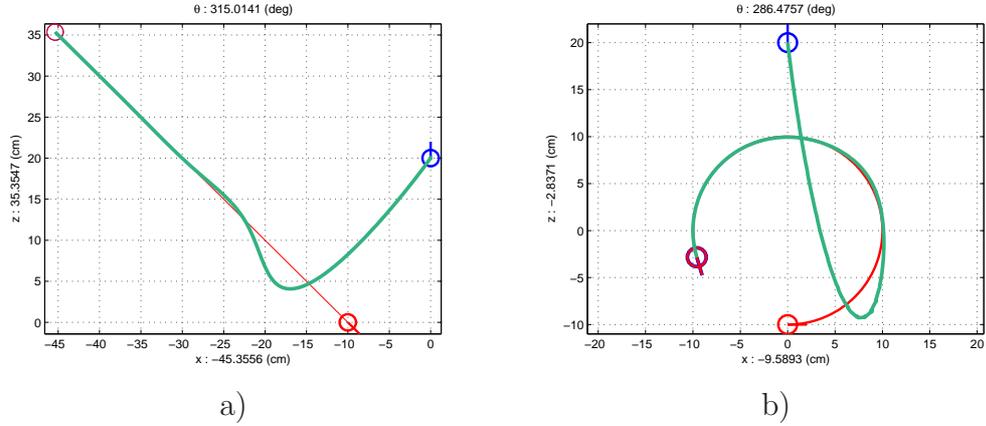


Figura 1.11: Inseguimento di obiettivi mobili con veicolo di tipo unicycle.

una retta di equazione  $y = -x - 10$ . Se il veicolo di riferimento ha come condizione iniziale  $\hat{q}_0 = [0, -10, 0]^T$  e velocità  $[\hat{v}, \hat{\omega}]^T = [10, 1]^T$ , la sua traiettoria descrive una circonferenza di raggio  $R = 10$  nello spazio di stato del veicolo, percorsa a velocità costante (fig. 1.11-b).

### 1.4.3 Controllo di postura (regolazione) di un veicolo unicycle

Dal punto di vista prettamente controllistico, il problema del controllo di postura (“point-to-point motion”) è un problema di stabilizzazione di un punto di equilibrio nello spazio di stato del veicolo.

Nel caso dei veicoli soggetti a vincoli anolonomi, questo problema è considerevolmente più difficile di quelli di inseguimento di un moto o di una traccia. Per illustrare questo punto, si consideri che il sistema linearizzato ottenuto nel paragrafo 1.4.2 diviene nn completamente raggiungibile quando il veicolo di riferimento sia immobile  $\hat{v} = \hat{\omega} = 0$ , come accade appunto se si desidera raggiungere una posizione e orientazione costanti. Ciò impone che la stabilizzazione di postura debba usare metodi di controllo intrinsecamente nonlineari.

Anche all’interno dei sistemi nonlineari, la stabilizzazione di un robot mobile in una assegnata postura rappresenta un problema con caratteristiche molto particolari. Si consideri infatti il seguente teorema di carattere molto generale, dovuto a Roger Brockett:

**Theorem 1.** *Sia dato il sistema  $\dot{x} = f(x, u)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , e sia  $x_0$  uno stato di equilibrio del sistema con ingresso nullo (ossia  $f(x_0, 0) = 0$ ). Condizione necessaria per l’esistenza di una legge di controllo differenziabile con*

continuità e tempo invariante  $u(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  che renda l'equilibrio asintoticamente stabile è che l'immagine della funzione  $f(x, u)$  applicata al dominio  $\{x \in B_{x_0}, u \in \mathbb{R}^m\}$  contenga un insieme aperto in  $\mathbb{R}^n$  di cui fa parte l'origine (ovvero  $f(x, u)$  sia surgettiva localmente in  $x$ ).

Per applicare la condizione di Brockett alla cinematica dell'uniciclo dovremmo poter trovare una soluzione in  $x, y, \theta, v, \omega$ , con  $x, y, \theta$  piccoli, per valori piccoli ma arbitrari del vettore  $[a, b, c]^T$  in

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos \theta \\ v \sin \theta \\ \omega \end{bmatrix}.$$

Ciò è chiaramente impossibile: basti pensare al caso  $a = 0, b \neq 0, \forall c$ , che impone  $\theta = \pm\pi/2$ . Questo esclude che si possa trovare una retroazione tempo invariante e differenziabile con continuità per stabilizzare l'uniciclo su una postura assegnata.

Nonostante l'ostruzione posta dal teorema di Brockett, si consideri il problema di stabilizzare una postura (che senza perdere di generalità supporremo sia l'origine dello spazio di stato  $(x, y, \theta)$ ) per il veicolo di tipo uniciclo. Si introduca un nuovo sistema di coordinate polari  $\bar{q}$  definito da

$$\begin{bmatrix} \rho \\ \phi \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi \\ \phi - \theta \end{bmatrix}, \quad (1.20)$$

dove  $\rho$  è la distanza del punto di mezzo dell'interasse delle ruote dall'origine,  $\phi$  è l'angolo formato con l'asse delle ascisse dal vettore che unisce il veicolo all'origine, e  $\alpha$  è l'angolo tra la direzione di avanzamento del veicolo ed il vettore stesso (figura 1.12). La trasformazione di coordinate inversa è data da

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho \cos \phi \\ -\rho \sin \phi \\ \phi - \alpha \end{bmatrix}. \quad (1.21)$$

Si osservi che il cambiamento di variabili è ben definito e biunivoco in ovunque nel piano<sup>2</sup>, eccetto che nell'origine. La coordinata  $\phi$  non è infatti definita in  $x = y = 0$ , mentre all'origine dello spazio  $(\rho, \phi, \alpha)$  corrisponde univocamente l'origine di  $(x, y, \theta)$ . Introducendo per convenienza la nuova variabile

---

<sup>2</sup>Si dà per inteso che la funzione  $\arctan(y/x)$  sia definita su tutti i quadranti del piano cartesiano come  $\text{atan2}(y, x)$ .

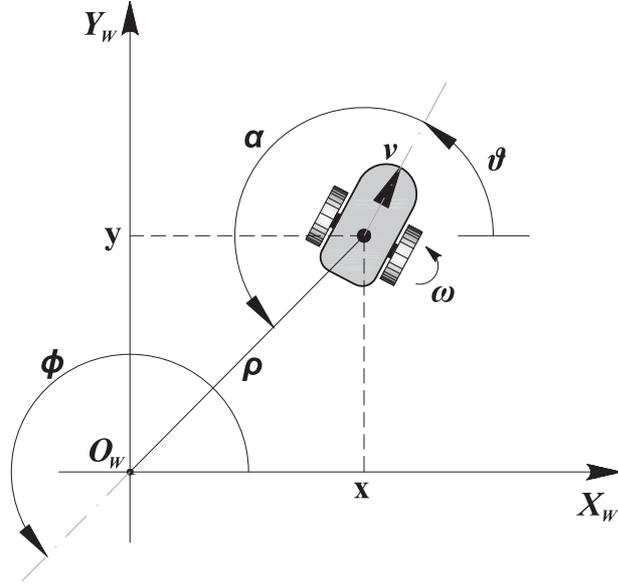


Figura 1.12: Coordinate usate per descrivere la postura dell'uniciclo.

di controllo  $w = v/\rho$  (definita anch'essa ovunque eccetto che nell'origine), il modello cinematico nelle nuove variabili di stato è dato da

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{\rho} v \\ \frac{-y \cos \theta + x \sin \theta}{\rho^2} v \\ \dot{\phi} - \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \omega \quad (1.22)$$

È possibile osservare che il sistema (1.22), ottenuto con un cambiamento non ovunque continuo di coordinate e quindi non perfettamente equivalente al sistema originario, soddisfa adesso la condizione necessaria per la stabilizzabilità.

Si può cercare quindi di stabilizzare il veicolo utilizzando un controllore alla Lyapunov. Si consideri a tal proposito la candidata

$$V(\bar{q}) = \frac{1}{2}(\lambda_1 \rho^2 + \lambda_2 \phi^2 + \alpha^2)$$

con  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  costanti positive di progetto, per la quale si ha

$$\dot{V} = -\lambda_1 \rho^2 \cos \alpha w + \lambda_2 \phi \sin \alpha w + \alpha \sin \alpha w - \alpha \omega.$$

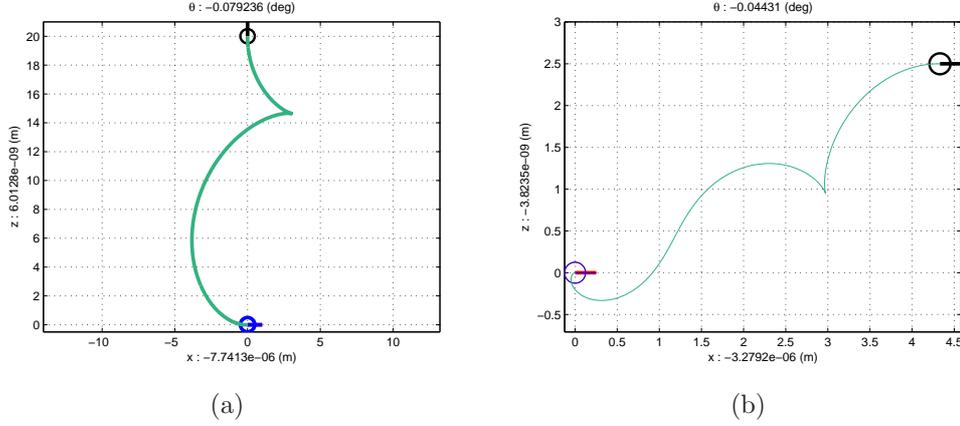


Figura 1.13: Risultati della simulazione per il controllo di postura di un unicyclo, a partire dalla posizione iniziale: (a)  $(\rho_o, \phi_o, \alpha_o) = (20, 3\pi/2, \pi)$ , (b)  $(\rho_o, \phi_o, \alpha_o) = (5, 7\pi/6, 7\pi/6)$ . Per entrambe le simulazioni, i valori delle costanti di controllo sono:  $k_1 = k_2 = 1$  e  $\lambda_2 = 0.5$ .

Si può porre una legge di controllo

$$\begin{aligned} w &= k_1 \cos \alpha, \quad k_1 > 0 \\ \omega &= k_1 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cos \alpha (\alpha + \lambda_2 \phi) + k_2 \alpha, \quad k_2 > 0, \end{aligned} \quad (1.23)$$

che è ben definita ovunque nelle coordinate  $\bar{q}$ . Si ottiene quindi

$$\dot{V}(\bar{q}) = -\lambda_1 k_1 \rho^2 \cos^2 \alpha - k_2 \alpha^2$$

che è negativa semi-definita. Notando che nell'insieme  $R = \{\bar{q} \mid \dot{V}(\bar{q}) = 0\} = \{\bar{q} \mid \rho = 0, \alpha = 0\}$  dalle (1.23) si ha  $w = k_1$  e  $\omega = k_1 \lambda_2 \phi$  e, sostituendo nella dinamica (1.22),  $\omega = k_1 \lambda_2 \phi = \dot{\alpha} = 0$ , quindi l'invariante massimo in  $R$  ha  $\phi = 0$ . Per Krasowsky si ha quindi che l'origine di  $\bar{q}$  è asintoticamente stabile. Essendo la candidata  $V(\bar{q})$  radialmente illimitata, si può concludere anche per la globale attrattività dell'origine.

I risultati di un paio di simulazioni (svolte con **Simulink**) sono riportati in figura 1.13.

In conclusione, si osserva che, nonostante la difficoltà del problema nelle coordinate originali, il progetto e l'analisi della stabilità nelle coordinate  $\bar{q}$  è stata svolta con tecniche semplici, e ha prodotto leggi di controllo continue e differenziabili con continuità. Naturalmente, vista la natura discontinua delle trasformazioni usate, è necessario porre attenzione al significato e agli effetti reali delle posizioni fatte.

Si osservi inanzitutto che la convergenza di  $\bar{q}$  all'origine è asintotica, e che quindi, se  $\rho(0) \neq 0$ ,  $\rho(t) \neq 0$  per ogni  $t$  finito. Se  $\rho(0) = 0$ , il controllo (1.23) resta ben definito. Si osservi in particolare che la velocità di traslazione  $v = \rho w$  si annulla in queste configurazioni, e che la coordinata  $\phi$  continua a convergere a zero, anche se perde significato fisico in relazione al veicolo originario.

Quando si esprimesse la legge di controllo (1.23) nelle originali coordinate  $q$  del veicolo, queste non rimarrebbero continue: in due configurazioni con veicoli in punti  $(x, y)$  arbitrariamente vicini (nella metrica naturale di  $q$ ,  $d = \sqrt{x^2 + y^2} + \alpha|\theta|$ ) ma in quadranti opposti del piano, i valori di  $\alpha$  e  $\phi$ , e quindi i controlli (1.23), assumono valori diversi per una differenza finita.

La praticità o meno del controllore proposto dipende dai sensori disponibili. Se le misure effettivamente ottenibili sono quelle delle configurazioni originali  $q$ , la discontinuità messa in evidenza rende difficile l'applicazione pratica nelle vicinanze dell'origine, dove il rumore di misura può provocare discontinuità a salto dell'azione di controllo. Se però i sensori a bordo veicoli rilevano proprio la distanza dall'obiettivo e gli angoli sotto i quali lo si traguarda, il metodo diviene efficace e facilmente applicabile.

## 1.5 Veicolo planare con vincolo di ruota doppia (Biciclo)

Un "biciclo" è la schematizzazione di un veicolo planare con due ruote (o due coppie di ruote sullo stesso asse), di cui una, che considereremo come quella anteriore, può ruotare attorno ad un asse perpendicolare al piano e passante per il punto di contatto della ruota stessa sul piano, mentre l'asse della seconda ruota è fissato perpendicolarmente al segmento che unisce i punti di contatto delle ruote (vedi figura 1.14). Per descrivere il sistema biciclo sono sufficienti solo quattro coordinate Lagrangiane. Con riferimento alla figura 1.14, si considerino le coordinate  $q_p = [x_p, y_p, \theta_a, \theta]^T$ , dove con  $(x_p, y_p)$  si descrive la posizione del centro dell'asse posteriore,  $\theta_a$  è l'orientazione dell'uniciclo anteriore e  $\theta$  è l'orientazione rispetto all'asse delle ascisse del segmento di lunghezza  $L$  che unisce i due assi. I vincoli di ruota singola propri dei due veicoli sono scritti da

$$\begin{cases} C_2(q_p) = \dot{x}_a \sin \theta_a - \dot{y}_a \cos \theta_a = 0 \\ C_3(q_p) = \dot{x}_p \sin \theta - \dot{y}_p \cos \theta = 0, \end{cases} \quad (1.24)$$

e, notando che la posizione dell'uniciclo anteriore è data da

$$\begin{cases} x_a = x_p + L \cos \theta \\ y_a = y_p + L \sin \theta \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} \dot{x}_a = \dot{x}_p - L\dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y}_a = \dot{y}_p + L\dot{\theta} \cos \theta, \end{cases} \quad (1.25)$$

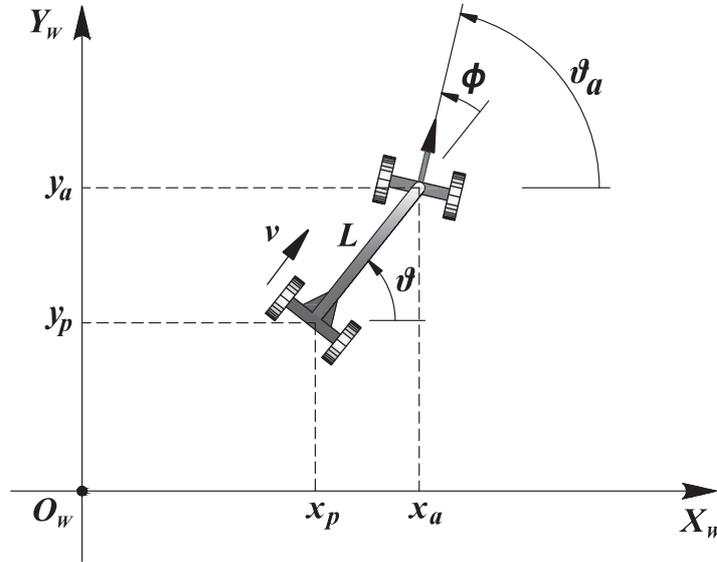


Figura 1.14: Veicolo di tipo “biciclo” equivalente ad un veicolo planare con due ruote.

si ottiene l'equazione cinematica dei vincoli

$$A(q_p)\dot{q}_p = \begin{bmatrix} \sin \theta_a & -\cos \theta_a & 0 & -L \cos(\theta_a - \theta) \\ \sin \theta & -\cos \theta & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{\theta}_a \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = 0. \quad (1.26)$$

La matrice dei vincoli  $A(q_p)$  ha rango pieno ovunque, ed il modello cinematico del veicolo può essere ottenuto da una base del suo kernel nella forma

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_a - \theta) \cos \theta & 0 \\ \cos(\theta_a - \theta) \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{L} \sin(\theta_a - \theta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix}. \quad (1.27)$$

È possibile notare che per questa scelta,  $\nu_1$  e  $\nu_2$  corrispondono rispettivamente alle velocità di avanzamento e di rotazione dell'uniciclo anteriore, che agisce da sterzo per l'intero biciclo. Per questo motivo, il modello cinematico (1.27) viene solitamente indicato come *biciclo a trazione anteriore*.

Si consideri adesso una diversa base del kernel di  $A(q)$ , ottenuta dividendo la prima colonna della precedente base per  $\cos(\theta_a - \theta)$  (escludendo quindi le

configurazioni  $\theta_a = \theta \pm \frac{\pi}{2}$ ), data da

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{L} \tan(\theta_a - \theta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix}. \quad (1.28)$$

Per questa scelta,  $\nu_1$  corrisponde alla velocità di avanzamento dell'uniciclo posteriore, mentre  $\nu_2$  è la velocità angolare dell'uniciclo anteriore, che agisce da sterzo. Il modello cinematico (1.28) è detto *biciclo a trazione posteriore*, ed è valido solo quando l'asse anteriore forma un angolo diverso da zero con la direzione del veicolo (in tale configurazione il modello può essere utilizzato solo se la velocità di avanzamento dell'asse posteriore è nulla).

Per un veicolo di questo tipo è più naturale scegliere come variabile di stato l'angolo  $\phi$  che il veicolo anteriore forma con il segmento di lunghezza  $L$  che unisce i due assi anziché il suo orientamento assoluto  $\theta_a$ . Con tale scelta, la configurazione del biciclo può essere descritta con  $q_p = [x_p, y_p, \phi, \theta]^T$  ed il modello cinematico del biciclo (1.27) a trazione anteriore con riferimento al posteriore diviene

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi & 0 \\ \sin \theta \cos \phi & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{L} \sin \phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix}. \quad (1.29)$$

Dividendo la prima colonna della precedente matrice  $S(q_p)$  per  $\cos \phi$ , si ottiene il modello cinematico (1.28) a trazione posteriore con riferimento al posteriore

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{L} \tan(\phi) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix}. \quad (1.30)$$

Un'ulteriore variante nella descrizione del biciclo si ottiene se la sua configurazione viene descritta dalla posizione di un punto  $m$  qualsiasi dell'asse del veicolo, a distanza  $L_m \neq 0$  dal centro dell'asse posteriore, ovvero  $q_m = [x_m, y_m, \phi, \theta]^T$  con

$$\begin{cases} x_m = x_p + L_m \cos \theta \\ y_m = y_p + L_m \sin \theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_m = \dot{x}_p - L_m \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y}_m = \dot{y}_p + L_m \dot{\theta} \cos \theta \end{cases}. \quad (1.31)$$

Si ottiene in questo caso (scegliendo un modello a trazione anteriore (1.27))

$$\dot{q}_m = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta - \frac{L_m}{L} (\sin \phi \sin \theta) & 0 \\ \cos \phi \sin \theta + \frac{L_m}{L} (\sin \phi \cos \theta) & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{L} \sin \phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix}. \quad (1.32)$$

Nel caso particolare in cui il punto  $m$  venga scelto sul centro dell'asse anteriore ( $L_m = L$ ), si ha poi

$$\dot{q}_a = \begin{bmatrix} \cos(\theta + \phi) & 0 \\ \sin(\theta + \phi) & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{L} \sin(\phi) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix}. \quad (1.33)$$

Il modello a trazione posteriore riferito al centro dell'asse anteriore, infine, è dato da

$$\dot{q}_a = \begin{bmatrix} \cos(\theta + \phi) \cos \phi & 0 \\ \sin(\theta + \phi) \cos \phi & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{L} \sin \phi \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix}, \quad (1.34)$$

### 1.5.1 Inseguimento di traccia con biciclo

Come già fatto precedentemente per l'uniciclo, anche in tal caso si assume che al controllore sia fornita una descrizione di un luogo geometrico sul quale il veicolo si deve portare e rimanere. Inoltre, poichè il moto del veicolo lungo la traccia assegnata è di interesse secondario, si supporrà che il luogo possa venire percorso con velocità qualsiasi, purchè non nulla.

Considereremo quindi il problema di controllare lungo una traccia assegnata il modello di un biciclo, dove la velocità  $v(t)$  si considererà assegnata (o controllata indipendentemente) e pari a  $\bar{v}(t) \neq 0$ . L'obiettivo primario è quello di progettare una legge di retroazione per la velocità di rotazione (o sterzo)  $\omega(x, y, \theta)$  (o più generalmente  $\omega(x, y, \theta, \bar{v}(t))$ ) in grado di rendere asintoticamente nulla la distanza tra il veicolo e la traccia (fig. 1.4-b)).

Inizieremo considerando una traccia rettilinea che, senza perdere di generalità, può essere pensata giacere sull'asse orizzontale  $y = 0$ . Fissata una velocità di avanzamento  $\bar{v}(t)$ , il modello cinematico del biciclo, a trazione anteriore e con riferimento di posizione al posteriore (1.29) diviene

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= \bar{v}(t) \cos \theta \cos \phi \\ \dot{y}_p &= \bar{v}(t) \sin \theta \cos \phi \\ \dot{\theta} &= \frac{\bar{v}(t)}{L} \sin \phi \\ \dot{\phi} &= \omega. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Il moto desiderato del veicolo, descritto da  $\hat{y}_p(t) \equiv 0$ , implica  $\dot{\hat{y}}_p(t) \equiv 0$ , quindi dalla seconda equazione (1.35) anche  $\hat{\theta}(t) \equiv 0$ , che implica  $\dot{\hat{\theta}}(t) \equiv 0$  e perciò dalla terza si ha  $\hat{\phi}(t) \equiv 0$ . Scopo del controllore è quindi regolare

a zero le tre variabili  $y_p$ ,  $\theta$  e  $\phi$ . In generale non vi sono specifiche sulla traiettoria  $x_p(t)$ , che dipenderà dalla velocità assegnata  $\bar{v}(t)$ .

### Controllo mediante linearizzazione approssimata

Si consideri il modello linearizzato di (1.35) attorno alla traiettoria di riferimento  $y = 0$  con velocità  $\bar{v}(t)$ . Detto  $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4]^T = [x_p - \int_0^t \bar{v}(t) dt, y_p, \theta, \phi]^T$  con ingressi  $\tilde{u}_1 = v - \bar{v}(t)$  e  $\tilde{u}_2 = \omega$ , si ha

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= (\tilde{u}_1 + \bar{v}(t)) \cos \tilde{x}_3 \cos \tilde{x}_4 - \bar{v}(t) \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= (\tilde{u}_1 + \bar{v}(t)) \sin \tilde{x}_3 \cos \tilde{x}_4 \\ \dot{\tilde{x}}_3 &= (\tilde{u}_1 + \bar{v}(t)) \sin \tilde{x}_4 \\ \dot{\tilde{x}}_4 &= \tilde{u}_2.\end{aligned}$$

Le matrici del linearizzato possono essere ricavate facilmente risalendo alla consueta forma di stato

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + B\tilde{u} \\ y &= C\tilde{x} + D\tilde{u},\end{aligned}$$

dove,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{v}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{v}(t)}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Supponendo inoltre di scegliere come uscita la distanza  $y_p$  dal centro della traccia del carrello posteriore, la matrice delle uscite risulta

$$C = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0],$$

mentre  $D = [0 \quad 0]$ .

Le matrici di raggiungibilità associate ai due ingressi sono:

$$\mathcal{R}_{\tilde{u}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathcal{R}_{\tilde{u}_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{v}(t)^2}{L} & 0 \\ 0 & \frac{\bar{v}(t)}{L} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ciascun ingresso preso singolarmente non rende il sistema completamente raggiungibile, mentre l'uso combinato di entrambi lo rende completamente raggiungibile e quindi stabilizzabile.

L'analisi dell'osservabilità porta invece alla seguente matrice:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{v}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{v}(t)}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

da cui  $\ker(\mathcal{O}) = \text{Im}([1 \ 0 \ 0 \ 0])$ . Il sistema non è quindi completamente osservabile, ma essendo  $x_p$  lo stato non ricostruibile, rimane comunque possibile utilizzare l'uscita scelta per ricostruire  $\theta$  e  $\phi$  e realizzare quindi il task.

Consideriamo quindi il sottosistema osservabile, le cui matrici sono

$$A_{RO} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{v}(t) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{v}(t)}{L} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{RO} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_{RO} = [1 \ 0 \ 0].$$

Il sistema risulta tempo variante per la presenza della velocità  $\bar{v}(t)$ . Nel caso particolare in cui  $\bar{v}(t) = \bar{v} = \text{cost.}$ , il sistema diventa tempo invariante e la stabilizzazione nell'origine può essere ottenuta semplicemente con una retroazione statica degli errori in  $y_p$ ,  $\theta$  e  $\phi$  ponendo

$$\omega = - [K_2 \ K_3 \ K_4] \begin{bmatrix} \tilde{\xi}_2 \\ \tilde{\xi}_3 \\ \tilde{\xi}_4 \end{bmatrix}$$

dove la scelta di  $K_2, K_3, K_4 > 0$  alloca gli autovalori nel semipiano sinistro. Infine, poichè a partire dalla sola misura di  $y_p$  è possibile ricostruire  $\theta$  e  $\phi$ , si può realizzare un osservatore di Luenberger atto allo scopo.

In figura 1.15 sono riportate due simulazioni corrispondenti a  $\bar{v} = 10$  e  $\bar{v} = -10$  e per medesime condizioni iniziali.

### Controllo mediante funzione di Lyapunov

Si consideri nuovamente il modello cinematico del biciclo a trazione anteriore, con riferimento di posizione al posteriore (1.34)

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= \bar{v} \cos \theta \cos \phi \\ \dot{y}_p &= \bar{v} \sin \theta \cos \phi \\ \dot{\theta} &= \frac{\bar{v}}{L} \sin \phi \\ \dot{\phi} &= \omega, \end{aligned}$$

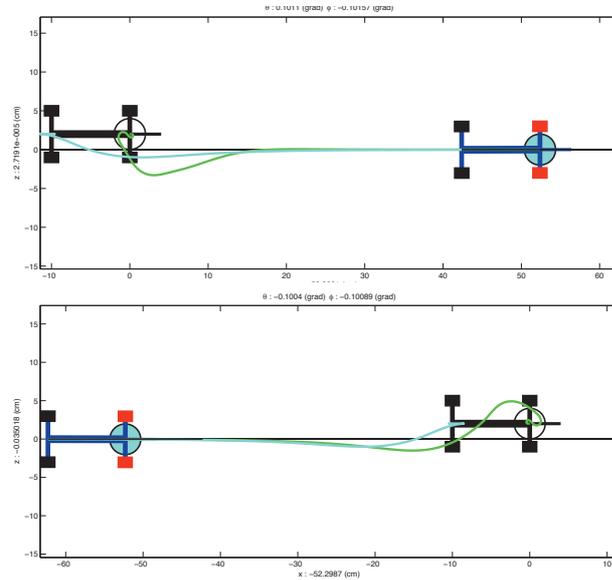


Figura 1.15: Risultati della simulazione per la stabilizzazione del Biciclo sulla retta  $y = 0$ : posizione iniziale  $q_a = [0 \ 2 \ 0 \ 0]$  e  $\bar{v} = 10$  (in alto) e  $\bar{v} = -10$  (in basso).

con  $\bar{v} = \text{cost.}$ . Per agevolare la ricerca di una legge di controllo regolare e tempo invariante si consideri il seguente cambio di coordinate:

$$\begin{aligned} x_a &= x_p + L \cos \theta \\ y_a &= y_p + L \sin \theta \end{aligned}$$

insieme a  $\beta = \theta + \phi$  dove  $\beta$  rappresenta l'angolo di sterzata assoluto, cioè rispetto all'asse delle ascisse del sistema di riferimento. Il sistema nelle nuove coordinate sarà

$$\begin{aligned} \dot{x}_a &= \bar{v} \cos \beta \\ \dot{y}_a &= \bar{v} \sin \beta \\ \dot{\beta} &= \frac{\bar{v}}{L} \sin(\beta - \theta) + \omega \\ \dot{\theta} &= \frac{\bar{v}}{L} \sin(\beta - \theta). \end{aligned}$$

In questo nuovo set di coordinate il task di path following su retta ( $y = 0$ )

è concluso se il veicolo raggiunge la configurazione di equilibrio

$$\begin{aligned}x_{aeq} &= \bar{v} t \\y_{aeq} &= 0 \\ \beta_{eq} &= 0 \\ \theta_{eq} &= 0.\end{aligned}$$

A tal proposito, si consideri la seguente funzione:

$$V(y_a, \beta) = \frac{1}{2}(y_a^2 + \beta^2).$$

Tale funzione non è definita positiva nel sottospazio di stato scelto. In ogni modo, la sua derivata direzionale è

$$\dot{V}(y_a, \beta) = \bar{v} y_a \sin \beta + \frac{\bar{v}}{L} \beta \sin(\beta - \theta) + \beta \omega.$$

Scegliendo come variabile di controllo

$$\omega = -\frac{\bar{v} y_a \sin \beta}{\beta} - \frac{\bar{v} \sin(\beta - \theta)}{L} - K_\omega \omega,$$

si ottiene  $\dot{V} = -K_\omega \beta^2$ , che risulta semidefinita negativa, anche nel sottospazio in cui è definita  $V$ . Tuttavia, notando che,

$$\dot{V} = 0 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \dot{\beta} = 0 = -\frac{\bar{v}}{L} \sin \theta + \omega = -y_a \bar{v} \Rightarrow y_a = 0.$$

Quindi, sul manifold invariante massimo si ha  $\dot{x}_a = \hat{v}$ ,  $y_a = 0$ ,  $\beta = 0$  e  $\dot{\theta} = -\frac{\bar{v}}{L} \sin \theta$ , la cui soluzione è,

$$\theta = 2 \arctan \left( \tan \left( \frac{\theta_0}{2} \right) e^{-\frac{\bar{v}}{L} t} \right),$$

con  $\theta_0$  condizione iniziale in generale diversa da zero. Si può concludere quindi che l'equilibrio è asintoticamente stabile solo quando la velocità di avanzamento è positiva ( $\bar{v} > 0$ ), instabile viceversa. In questo secondo caso, cioè  $\bar{v} < 0$  l'equilibrio è  $q_0 = [\bar{v}(t) t, 0, -\pi, 0]^T$ . Quindi utilizzando ancora una volta Krosowskii–Lasalle e il lemma di Barbalat è possibile concludere sulla asintotica stabilità dell'equilibrio solo nel caso in cui  $\hat{v} > 0$ .

Per una verifica pratica dei risultati ottenuti con la teoria di Lyapunov, anche in questo caso il controllore è stato implementato e simulato con **Simulink**. Fissando la costante di guadagno  $K_\omega = 10$ , lunghezza del veicolo  $L = 10$ , la velocità di avanzamento costante  $\bar{v} = \{10, -10\}$  e condizione iniziale  $q_0 = [x_0, y_0, \theta_0, \phi_0]^T = [0, 20, \frac{\pi}{2}, 0]^T$ , è possibile ottenere i risultati riportati in figura 1.16.

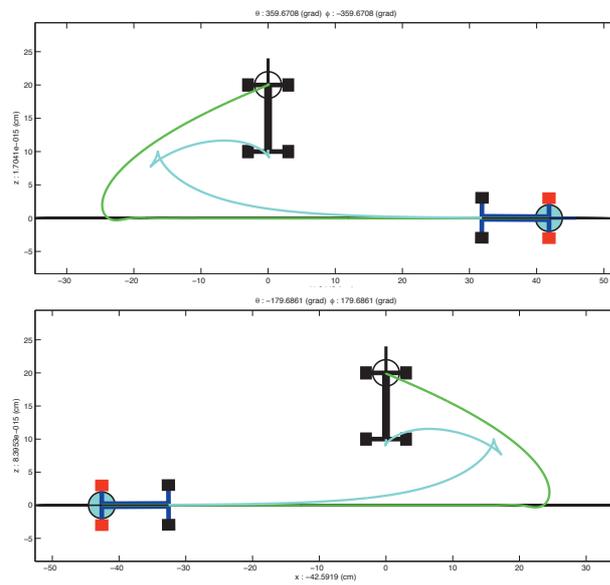


Figura 1.16: Risultati della simulazione per la stabilizzazione del Biciclo sulla retta  $y = 0$ : posizione iniziale  $q_a = [0, 20, \pi/2, 0]$  con  $\bar{v} = 10$  (in alto) e  $\bar{v} = -10$  (in basso).

## Capitolo 2

# Controllo Dinamico di Sistemi Lagrangiani Completamente Attuati

Riprendendo la nozione già introdotta in precedenza di “completa attuazione”, diremo più precisamente che un meccanismo è completamente attuato se ad ogni forza generalizzata della formulazione lagrangiana, eventualmente proiettata sui vincoli, può essere fatta corrispondere l’azione controllata di un attuatore.

Consideriamo dapprima l’espressione della dinamica di un sistema Lagrangiano descritto da  $n$  coordinate  $q$  non vincolate, soggetto alle forze generalizzate  $\tau$ , ovvero

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau, \quad (2.1)$$

Si noti che in generale le forze generalizzate  $\tau$  (cioè quelle che fanno lavoro sulle particolari coordinate lagrangiane  $q$  scelte) possono non coincidere con le forze  $f$  effettivamente esercitate dagli  $\ell$  attuatori. Vi sarà comunque tra esse una relazione che assumeremo lineare e che indicheremo in quel che segue con

$$\tau = F(q)f.$$

Il sistema si dirà *completamente attuato* se la matrice  $F(q)$  è quadrata ( $\ell = n$ ) e invertibile su tutto il dominio di configurazioni di interesse. Si dirà che il sistema è *sovra-attuato* (o che l’attuazione è *ridondante*) se  $\ell > n$  ed il rango di  $F(q)$  è  $n$  ovunque, mentre il sistema si dirà *sotto-attuato* se  $\text{rank}(F(q)) < n$ . Considereremo in questo capitolo sistemi completamente attuati. I sistemi con attuatori ridondanti possono essere facilmente ricondotti a quelli, introducendo solamente in più la opportunità di una scelta ottima di  $f$  per una data

sceita di  $\tau$ . Il caso di sistemi sottoattuati è lasciato ad un capitolo successivo.

Consideriamo adesso un sistema descritto da  $n$  coordinate  $q$  sottoposto a  $m$  vincoli descritti in forma Pfaffiana da  $A(q)\dot{q} = 0$ , e si introduca come consuetudine una matrice  $S(q)$  di base per il kernel di  $A(q)$ . La dinamica del sistema, proiettata sul vincolo, è descritta dalle equazioni

$$\begin{aligned} S^T(q)M(q)S(q)\dot{\nu} + S^T(q)(C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q)) &= S(q)^T\tau \stackrel{def}{=} \tau_c \\ \dot{q} &= S(q)\nu \end{aligned} \quad (2.2)$$

dove  $\tau_c$  indica le  $n - m$  componenti delle forze generalizzate proiettate sui vincoli. Anche in questo caso, si dirà che il sistema è completamente attuato se le forze o coppie  $f$  di  $n - m$  attuatori effettivamente agenti sul sistema sono in relazione biunivoca con le forze generalizzate proiettate sui vincoli, cioè se

$$\tau_c = F(q)f,$$

con  $F(q)$  invertibile su tutto il dominio di interesse. Definizioni analoghe a quanto sopra valgono per sistemi sovra- e sotto-attuati.

## 2.1 Controllori PD Indipendenti

La prima e più semplice possibile soluzione per la scelta di una legge per le coppie  $\tau$  per controllare la dinamica del sistema (2.1) prevede l'applicazione di controllori standard alle variabili di giunto, considerata ciascuna indipendentemente dalle altre.

Indicando i riferimenti che si desidera inseguire con  $q_d(t) : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}^n$ , definiamo gli errori di inseguimento  $e(t) = q_d(t) - q(t)$ . Consideriamo una legge di controllo per la  $i$ -esima coordinata data da un termine proporzionale all'errore più un termine proporzionale alla sua derivata,

$$\tau_i = K_{p,i}e_i + K_{v,i}\dot{e}_i$$

con  $K_{p,i} > 0$  e  $K_{v,i} > 0$ , ovvero in forma compatta

$$\tau = K_p e + K_v \dot{e}$$

con  $K_p = \text{diag}(K_{p,i})$  e  $K_v = \text{diag}(K_{v,i})$  matrici diagonali positive definite. Una legge di controllo di questo tipo, detto Proporzionale-Derivativo (PD), è stata utilizzata nei controllori dei manipolatori industriali articolati sin dai primi esemplari negli anni '60.

Utilizzando le variabili di stato  $(e, \dot{e}) \in \mathbb{R}^{2n}$ , la dinamica del sistema controllato diviene dunque

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = K_p e + K_v \dot{e}, \quad (2.3)$$

dove si legga  $q = e + q_d(t)$ ,  $\dot{q} = \dot{e} + \dot{q}_d(t)$ , etc. L'origine  $e = 0$ ,  $\dot{e} = 0$  è un equilibrio del sistema (2.3) se

$$M(q_d(t))\ddot{q}_d + C(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d + G(q_d) = 0.$$

Supponiamo quindi che sia  $\ddot{q}_d = \dot{q}_d = 0$ , e che valga  $G(q_d) = 0$ . La prima ipotesi significa limitarsi al caso in cui la configurazione desiderata sia costante ( $q_d(t) = q_d H(t)$ , con  $H(t)$  funzione gradino o di Heaviside). La seconda corrisponde a supporre l'assenza di elasticità nel sistema, e degli effetti della gravità. L'assenza degli effetti della forza peso sui giunti può essere giustificata in casi in cui essa sia trascurabile, ovvero perché il moto del sistema è limitato ad un piano orizzontale, o infine perché si immagina che il termine  $G(q)$  sia esattamente cancellato da un equivalente termine applicato agli attuatori (quindi con la legge di controllo modificata  $\tau = K_p e + K_v \dot{e} + G(q)$ ).

Per quanto la legge di controllo di ciascuna coordinata sia indipendente dai valori delle altre, i forti accoppiamenti dinamici rendono tutt'altro che ovvia la conclusione che il controllo PD possa stabilizzare il sistema nel valore desiderato  $e = \dot{e} = 0$ . Per studiare la stabilità del sistema complessivo, utilizzeremo la tecnica di Lyapunov diretta. Consideriamo la candidata di Lyapunov

$$V(t) = \frac{1}{2} \dot{e}^T M(q) \dot{e} + \frac{1}{2} e^T K_p e.$$

Osserviamo che, nell'ipotesi fatta  $\dot{q}_d = 0$ , il primo addendo in  $V$  corrisponde all'energia cinetica del sistema  $T = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} > 0$ . Il secondo addendo ha invece la forma di una energia potenziale associata ad un elemento elastico multidimensionale di rigidità  $K_p$ , elongato di  $e$ .

Derivando la candidata  $V(t)$  lungo le traiettorie del sistema (2.3), si ha

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \dot{q}^T M(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} + e^T K_p \dot{e} \\ &= \dot{q}^T (\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)) + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} - e^T K_p \dot{q} \\ &= \dot{q}^T K_p e - \dot{q}^T K_v \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \left( \dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q}) \right) \dot{q} - e^T K_p \dot{q} \\ &= -\dot{q}^T K_v \dot{q} \end{aligned} \quad (2.4)$$

dove il primo addendo si cancella con l'ultimo (si tratta di due scalari, la cui uguaglianza è evidente per trasposizione), e si è utilizzata la nota proprietà  $\frac{1}{2} \dot{q}^T \left( \dot{M} - 2C \right) \dot{q} = 0$ , che deriva dal teorema delle forze vive.

La  $\dot{V}(e, \dot{e})$  così ottenuta è negativa semi-definita, il che permette di concludere sulla stabilità marginale dell'equilibrio. Si può però facilmente proseguire l'analisi applicando il teorema dell'insieme invariante massimo. Osserviamo che, essendo  $M(q)$  e  $K_p$  positive definite (la prima in quanto matrice di inerzia, la seconda per scelta),  $V(e, \dot{e})$  è radialmente illimitata e le sue curve di livello  $\Omega_\ell = \{(e, \dot{e}) | V(e, \dot{e}) = \ell\}$  sono chiuse per qualsiasi livello  $\ell$ . Al loro interno l'insieme  $R = \{(e, \dot{e}) \in \Omega_\ell | \dot{V}(e, \dot{e}) = 0\}$  in cui  $V(t)$  non decresce è dato da  $R = \{(e, \dot{e}) \in \Omega_\ell | \dot{e} = 0\}$ . In  $R$  si ha quindi (per l'ipotesi  $\dot{q}_d = 0$ ) che  $\dot{q} \equiv 0$  e  $\ddot{q} \equiv 0$ . L'insieme invariante massimo in  $R$  è dunque ottenuto per sostituzione nel sistema (2.3) (nell'ipotesi  $G(q) = 0$ ) come  $M = \{(e, \dot{e}) \in R | K_p e = 0\}$ , quindi, essendo  $K_p$  definita positiva,  $M$  coincide con l'origine  $e = 0, \dot{e} = 0$ , punto cui converge qualsiasi traiettoria inizi da  $\Omega_\ell$ , il che dimostra la globale asintotica stabilità di questo equilibrio.

Il controllo PD indipendente ai giunti garantisce quindi il raggiungimento asintotico di riferimenti  $q_d$  costanti, utili ad esempio per eseguire traiettorie punto-punto di bracci manipolatori per operazioni tipo “pick and place”. Si noti però che i controllori PD non garantiscono il raggiungimento del valore desiderato, e neppure la stabilità del sistema nel caso che le ipotesi di cui sopra non siano verificate.

## 2.2 Controllo a Coppia Calcolata

Si desidera adesso affrontare il problema di controllare il sistema (2.1) lungo traiettorie desiderate  $q_d(t)$  di tipo più generale, come richiesto in molte applicazioni di robotica avanzata in cui il braccio non deve semplicemente posizionarsi (come nelle sezione 2.1), ma deve seguire percorsi prestabiliti con accuratezza geometrica e temporale.

A tale fine, è utile riconsiderare l'equazione di regime del sistema lungo un moto nominale, la cui soluzione soddisfa esattamente la specifica  $q(t) \equiv q_d(t)$ . In questo caso, dalla (2.1) si ha immediatamente per il controllo  $\tau$ , supposto una funzione delle configurazioni, degli errori di inseguimento e delle loro velocità, che si deve avere

$$\tau(q, \dot{q}, e, \dot{e})|_{q \equiv q_d} = M(q_d)\ddot{q}_d + C(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d + G(q_d).$$

In altri termini, per ottenere l'inseguimento perfetto il controllo deve contenere il modello del sistema dinamico, usato per calcolare una azione in avanti (feedforward) che possa complementare un'azione di pura retroazione quale quella usata nei controllori PD visti in precedenza. Una possibile scelta per

il controllo che segue queste indicazioni è data da

$$\tau(q, \dot{q}, e, \dot{e}) = M(q)\ddot{q}_d + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + K'_p e + K'_v \dot{e}, \quad (2.5)$$

dove  $K'_v$  e  $K'_p$  sono matrici positive definite. Si noti che, per la sintesi di questa legge di controllo, si assume qui di avere a disposizione il valore misurato di  $q(t)$  e  $\dot{q}(t)$ , nonché di essere in grado di calcolare un modello esatto per la dinamica, cioè di poter valutare le funzioni  $M(\cdot)$ ,  $C(\cdot, \cdot)$  e  $G(\cdot)$  in modo che esse corrispondano ai valori fisici del sistema (di tali ipotesi discuteremo la portata più avanti).

Sostituendo la (2.5) nella (2.1), e scegliendo per comodità di porre  $K'_p = M(q)K_p$ ,  $K'_v = M(q)K_v$ , si ha

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = M(q)(\ddot{q}_d + K_v \dot{e} + K_p e) + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)$$

da cui immediatamente

$$\begin{aligned} M(q)\ddot{q} &= M(q)(\ddot{q}_d + K_v \dot{e} + K_p e) \\ M(q)(\ddot{e} + K_v \dot{e} + K_p e) &= 0. \end{aligned}$$

Per l'invertibilità della matrice dinamica  $M(q)$  si ottiene

$$\ddot{e} + K_v \dot{e} + K_p e = 0 \quad (2.6)$$

che rappresenta la dinamica dell'errore di inseguimento, che risulta lineare. Se le matrici  $K_p, K_v$  sono diagonali, si hanno in effetti tanti sistemi del secondo ordine quanti giunti, ognuno disaccoppiato ed indipendente. La scelta di elementi diagonali  $K_{p,i}$  e  $K_{v,i}$  positivi garantisce la asintotica stabilità dell'equilibrio  $e = \dot{e} = 0$ , e determina il comportamento dinamico dell'inseguimento secondo le classiche regole del piazzamento dei poli.

In definitiva il controllo proposto, che viene detto “a coppia calcolata” (o “computed torque”), mostra come la perfetta conoscenza del modello dinamico di un manipolatore ne consenta la linearizzazione perfetta garantendo l'allocazione arbitraria dei poli del sistema a ciclo chiuso. È quindi garantita la possibilità di ottenere inseguimenti di traiettorie di posizione dei giunti con errore a regime nullo e tempi di convergenza arbitrariamente veloci.

### 2.2.1 Robustezza del Controllo a Coppia Calcolata

I risultati apparentemente molto buoni del controllo progettato nella sezione precedente sono stati ottenuti nelle ipotesi poco realistiche di disporre di un modello perfetto del sistema da controllare. Esaminiamo adesso il caso in cui questa ipotesi non sia verificata, o perché i parametri inerziali e geometrici del

sistema non sono noti, o anche semplicemente perchè il calcolo accurato del modello dinamico in ogni configurazione sul processore di controllo richiede più tempo di quanto disponibile per l'applicazione in tempo reale, e vi si rinunci.

Supponiamo dunque di applicare una legge di controllo che, approssimando quella a coppia calcolata nominale (2.5), sia descritta da

$$\tau = \bar{M}(q) (\ddot{q}_d + K_v \dot{e} + K_p e) + \bar{C}(q, \dot{q}) \dot{q} + \bar{G}(q) \quad (2.7)$$

dove  $\bar{M}(q)$ ,  $\bar{C}(q, \dot{q})$  e  $\bar{G}(q)$  rappresentano i modelli approssimati usati per le matrici dinamica, di Coriolis e del vettore delle coppie gravitazionali del manipolatore. Sostituendo la (2.7) nella (2.1), e compiendo passaggi analoghi ai precedenti, si ottiene

$$\ddot{e} + K_v \dot{e} + K_p e = \eta \quad (2.8)$$

dove si è posto

$$\eta = \bar{M}(q)^{-1} (\tilde{M}(q) \ddot{q} + \tilde{C}(q, \dot{q}) \dot{q} + \tilde{G}(q))$$

avendo introdotto le matrici di errore di modello

$$\begin{cases} \tilde{M}(q) = M(q) - \bar{M}(q), \\ \tilde{C}(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q}) - \bar{C}(q, \dot{q}), \\ \tilde{G}(q) = G(q) - \bar{G}(q) \end{cases}$$

Nel sistema (2.8) la dinamica dell'errore, analoga a quella vista in (2.6), risulta però adesso eccitata dal termine di disturbo  $\eta$ . Ignorando la dipendenza nonlineare di  $\eta$  da  $q(t)$ , e considerandolo invece come fosse un disturbo esterno, si potrebbe scrivere in termini di trasformate di Laplace

$$e(s) = (Is^2 + K_v s + K_p)^{-1} \eta(s).$$

Per una scelta opportuna dei guadagni  $K_p$  e  $K_v$  che renda il sistema (2.6) asintoticamente stabile, il sistema perturbato (2.8) è BIBO-stabile<sup>1</sup>. Di conseguenza, per qualche  $\beta_1 > 0$  e  $\beta_2 > 0$ , si potrà scrivere

$$\begin{aligned} \|e(t)\|_\infty &\leq \beta_1 \|\eta(t)\|_\infty \\ \|\dot{e}(t)\|_\infty &\leq \beta_2 \|\eta(t)\|_\infty \end{aligned} \quad (2.9)$$

Considerando che  $q(t) = q_d(t) - e(t)$ , si osserva però che il termine di disturbo  $\eta(\cdot)$  è esso stesso funzione dell'errore e della sua derivata. La (2.8) può quindi essere vista come la connessione in anello di due sistemi (si veda fig. 2.1). Nulla si può dire riguardo la stabilità del sistema connesso se non si

<sup>1</sup>“Bounded Input Bounded Output” stabile, ovvero per ogni  $\eta(t)$  limitato in norma, il corrispondente  $e(t)$  è anch'esso limitato in norma.

Figura 2.1: Sistema Lagrangiano controllato con compensazione imperfetta.

entra nel dettaglio delle particolari stime utilizzate, e degli errori conseguenti.

È utile notare che la dipendenza di  $\eta$  dalla accelerazione  $\ddot{q}$  può essere in effetti rimossa quando ci si metta nelle coordinate di errore  $(e, \dot{e})$ . Ponendo infatti per comodità nella (2.7)  $\bar{\tau} = (\ddot{q}_d + K_v \dot{e} + K_p e)$  e sostituendola nella (2.1), si ha

$$\begin{aligned}\ddot{q} &= M^{-1} \bar{M} \bar{\tau} + M^{-1} (\tilde{C} \dot{q} + \tilde{G}) + \bar{\tau} - \bar{\tau} \\ &= (M^{-1} \bar{M} - I) \bar{\tau} + M^{-1} (\tilde{C} \dot{q} + \tilde{G}) + \bar{\tau}\end{aligned}$$

e osservando che  $\bar{\tau} - \ddot{q} = \ddot{e} + K_v \dot{e} + K_p e = \eta$ , si ottiene

$$\eta(q, \dot{q}, \ddot{q}_d) = (M^{-1} \bar{M} - I) (\ddot{q}_d + K_v \dot{e} + K_p e) + M^{-1} (\tilde{C} \dot{q} + \tilde{G}(q)) \quad (2.10)$$

ovvero, con facili sostituzioni,  $\eta = \eta(e, \dot{e}, q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d)$ . Dalla (2.10), si può osservare che, per ogni data funzione da inseguire  $q_d(t)$ , il disturbo  $\eta$  dipende da funzioni degli errori nelle diverse coordinate  $e_i$ , delle loro derivate  $\dot{e}_i$ , e da termini di tipo  $\dot{e}_i \dot{e}_j$  che combinano tali derivate. Si può dimostrare che queste funzioni sono limitabili<sup>2</sup>, e, per opportuni valori  $\alpha_i > 0$ ,  $i = 1, 2 \dots 4$ , si potrà scrivere

$$\|\eta\|_\infty \leq \alpha_1 + \alpha_2 \|e\|_\infty + \alpha_3 \|\dot{e}\|_\infty + \alpha_4 \|\dot{e}\|_\infty^2. \quad (2.11)$$

È naturale attendersi che i coefficienti  $\alpha_i$  siano tanto più grandi quanto maggiori sono gli errori di modello, e quanto maggiori sono i riferimenti  $q_d(t)$ , le loro velocità  $\dot{q}_d(t)$  ed accelerazioni  $\ddot{q}_d(t)$ .

Combinando (2.9) con (2.11), si ottiene

$$\begin{cases} \|e\|_\infty \leq \beta_1 \alpha_1 + \beta_1 \alpha_2 \|e\|_\infty + \beta_1 \alpha_3 \|\dot{e}\|_\infty + \beta_1 \alpha_4 \|\dot{e}\|_\infty^2, \\ \|\dot{e}\|_\infty \leq \beta_2 \alpha_1 + \beta_2 \alpha_2 \|e\|_\infty + \beta_2 \alpha_3 \|\dot{e}\|_\infty + \beta_2 \alpha_4 \|\dot{e}\|_\infty^2. \end{cases} \quad (2.12)$$

A seconda dei valori numerici ottenuti per i guadagni  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ , le (2.12) rappresentano due regioni ammissibili nel primo quadrante del piano  $(\|e\|_\infty, \|\dot{e}\|_\infty)$ .

---

<sup>2</sup>Questa proprietà discende dalla presenza di funzioni limitate nelle espressioni delle matrici dinamiche, e dal fatto che la matrice di inerzia  $M(q)$  è sempre invertibile con inversa composta da funzioni limitate

Queste due regioni, il cui bordo è una parabola, possono a seconda dei casi intersecarsi o meno, come illustrato in fig. 2.2. Essendo le due norme per definizione positive, solo il primo quadrante è di interesse. Si possono dare due casi qualitativamente diversi. Per errori di modello sufficientemente piccoli e/o traiettorie desiderate sufficientemente lente, le regioni ammissibili si intersacano, lasciando una regione ammissibile compatta contigua all'origine (a sinistra in fig. 2.2): in questo caso, l'applicazione della coppia calcolata con modello imperfetto dà luogo ad inseguimento approssimato con errore non nullo, ma comunque limitato. Se le condizioni sono tali da non avere intersezione tra le due parabole (vedi fig. 2.2 a destra), non può essere invece garantita una evoluzione limitata dell'errore di posizione, ed il sistema può risultare quindi instabile.

Figura 2.2: Descrizione qualitativa delle possibili evoluzioni delle norme dell'errore di inseguimento e della sua derivata  $\|e\|, \|\dot{e}\|$ .

## Esempio da Sviluppare

Si potrebbe fare qui un esempio semplice, svolgendo i conti per un braccio a due o anche un grado di libertà, e trovando le regioni di stabilità per qualche modello e riferimento.

### 2.2.2 Controllo Robusto o a Struttura Variabile

Si consideri una semplice modifica del controllo a coppia calcolata con parametri non ideali ottenuta semplicemente aggiungendo ai termini proporzionale e derivativo un termine “correttivo”  $\Delta(t)$ , ovvero

$$\tau = \bar{M}(q) (\ddot{q}_d + K_v \dot{e} + K_p e + \Delta(t)) + \bar{C}(q, \dot{q}) \dot{q} + \bar{G}(q). \quad (2.13)$$

Sostituendo la (2.13) nella (2.1) si ottiene

$$\ddot{e} + K_v \dot{e} + K_p e = \eta(t) - \Delta(t) \quad (2.14)$$

Si supponga adesso di saper valutare, per una certa traiettoria di riferimento  $q_d(t)$ , per certi scostamenti iniziali  $e(0), \dot{e}(0)$  e per certi errori massimi nei parametri stimati (ovvero per tutto un insieme di tali condizioni), una maggiorazione in norma della perturbazione  $\eta(t)$ , ovvero una funzione scalare

$$\rho(t) \geq \|\eta(e(t), q_d(t))\|, \quad \forall t.$$

Naturalmente, è da aspettarsi che questa maggiorazione sia tanto più elevata quanto più grandi sono gli errori relativi di modello  $\bar{M}(q)^{-1} \tilde{M}(q)$ ,  $\bar{M}(q)^{-1} \tilde{C}(q, \dot{q})$  e  $\bar{M}(q)^{-1} \tilde{G}(q)$ . Inoltre, essa sarà tanto maggiore quanto più i riferimenti  $q_d(t)$  sono veloci ed accelerati. Infine, la maggiorazione dovrà essere tanto più alta quanto più grande può divenire l'errore  $e(t)$ , il che dipende dall'errore iniziale, ma anche dal termine stesso  $\eta(t) - \Delta(t)$  che ne eccita la dinamica (2.14). Si osservi che la scelta di  $\Delta(t)$  è ancora da farsi: si può supporre peraltro che valga

$$\|\eta(t)\| \leq \gamma \|\Delta(t)\| + \delta, \quad (2.15)$$

per qualche valore  $\alpha > 0$ ,  $\delta > 0$ . Supporremo nel seguito di scegliere modelli sufficientemente accurati e riferimenti sufficientemente lenti tali per cui valga  $\alpha < 1$ . Si consideri adesso lo stato  $\xi = (e, \dot{e})^T$  in dimensione  $2n$  del sistema (2.14), e la corrispondente equazione di stato

$$\dot{\xi} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -K_p & -K_v \end{pmatrix} \xi + \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} (\eta(t) - \Delta(t)),$$

che riscriviamo in forma compatta

$$\dot{\xi} = A\xi + B(\eta(t) - \Delta(t)). \quad (2.16)$$

Se la scelta fatta per i guadagni proporzionali e derivativi è stabilizzante (come ovvio), il sistema non eccitato  $\dot{\xi} = A\xi$ , è asintoticamente stabile. Data

quindi una qualsiasi matrice  $Q \in \mathbf{R}^{2n \times 2n}$  simmetrica e positiva definita, la soluzione  $P \in \mathbf{R}^{2n \times 2n}$  dell'equazione di Lyapunov

$$A^T P + P A = -Q$$

è simmetrica e positiva definita, e la funzione  $V(t) = \xi^T P \xi$  è di Lyapunov per il sistema libero, avendosi per quel sistema  $\dot{V} = -\xi^T Q \xi < 0$ . Considerando adesso la stessa funzione  $V(\xi)$  come candidata per il sistema perturbato (2.16), si ottiene

$$\dot{V}(t) = -\xi^T Q \xi + 2\xi^T P B (\eta(t) - \Delta(t)), \quad (2.17)$$

In questa funzione, il termine  $2\xi^T P B (\eta(t) - \Delta(t))$  può avere segno qualsiasi, e non è più quindi garantita essere negativa definita. Applicando una tecnica di progetto "alla Lyapunov", si può applicare un  $\Delta(t)$  tale per cui si possa ottenere  $\dot{V}(t) < 0$ . Per far ciò, definito il termine  $w(t) = B^T P \xi(t)$ , si consideri il prodotto scalare  $w(t)^T (\eta(t) - \Delta(t))$ . Il caso peggiore si ha quando  $\eta(t)$  è allineato a  $w(t)$ , quando si ha  $w(t)^T \eta(t) = \|w(t)\| \|\eta(t)\|$  massimamente positivo. Per dominare questo effetto e rendere  $w^T (\eta - \Delta)$  negativo, si può scegliere di porre

$$\Delta(t) = \begin{cases} \rho(t) \frac{w(t)}{\|w(t)\|}, & \text{se } \|w(t)\| \neq 0, \\ 0, & \text{se } \|w(t)\| = 0, \end{cases} \quad (2.18)$$

che implica  $\|\Delta(t)\| = \rho(t)$  per  $\|w(t)\| \neq 0$ . Dalla (2.18), e per la maggiorazione  $\rho(t) \geq \|\eta(t)\|$ , si ha quindi

$$\begin{cases} w(t)^T (\eta(t) - \Delta(t)) \leq -\|w(t)\| (\rho(t) - \|\eta(t)\|) < 0, & \|w(t)\| \neq 0 \\ w(t)^T (\eta(t) - \Delta(t)) = 0, & \|w(t)\| = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

Da notare che per la funzione maggiorante, a causa della (2.15), deve valere

$$\rho(t) \geq \gamma \|\Delta\| + \delta = \gamma \rho(t) + \delta$$

che può essere verificata solo nell'ipotesi  $\alpha < 1$  da

$$\rho(t) \geq \frac{\beta}{1 - \alpha} > 0,$$

Si noti che la legge di controllo  $\Delta(t)$  trovata in (2.19) è di tipo discontinuo. Nel caso particolare di una sola coordinata, cioè con  $\Delta \in \mathbf{R}^1$ ,  $\Delta = \rho \frac{w}{\|w\|}$  è la funzione segno  $\text{sign}(w) = \frac{w}{|w|} = \pm 1$ . Il controllo corrispondente è detto

*tutto-niente*, o *bang-bang*, o ancora *a relay*). Nel caso generale, invece, la funzione di controllo trovata è proporzionale alla derivata di un cono  $C = \sqrt{w(t)^T w(t)} \in \mathbf{R}^n$ , che è discontinua nel vertice del cono stesso.

Come conseguenza della natura discontinua del termine additivo  $\delta$ , possono insorgere fenomeni di *chattering* (ovvero oscillazioni sostenute ad alta frequenza del valore del controllo) nelle vicinanze della singolarità  $w(t) = 0$ , con conseguente innesco di vibrazioni, eccessiva usura degli attuatori etc. Per evitare il chattering, si può introdurre una correzione del tipo

$$\Delta = \rho(t) \frac{w(t)}{\sqrt{w(t)^T w(t) + \epsilon}}, \quad (2.20)$$

con  $\epsilon > 0$  valore piccolo scelto empiricamente. Uno schema di controllo di questo tipo è riportato in fig.2.3.

### 2.2.3 Controllo a Coppia Calcolata Adattivo

Si scelga una coppia di controllo  $\tau$  della forma

$$\tau = \hat{M}(q) (\ddot{q}_d + K_v \dot{e} + K_p e) + \hat{C}(q, \dot{q}) \dot{q} + \hat{G}(q) \quad (2.21)$$

dove  $\hat{M}(q)$ ,  $\hat{C}(q, \dot{q})$  rappresentano rispettivamente le stime delle matrici dinamica e di Coriolis, e  $\hat{G}(q)$  è la stima delle coppie gravitazionali del manipolatore, e si sostituisca nella dinamica (2.1). In tal modo si ottiene

$$\begin{aligned} M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) &= \hat{M}(q) (\ddot{q}_d + K_v \dot{e} + K_p e) + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \hat{G}(q) \rightarrow \\ (M(q) - \hat{M}(q))\ddot{q} + (C(q, \dot{q}) - \hat{C}(q, \dot{q}))\dot{q} + (G(q) - \hat{G}(q)) &= \\ \hat{M}(q) (\ddot{e} + K_v \dot{e} + K_p e) \rightarrow \\ \hat{M}(q)^{-1} Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \tilde{\pi} &= \ddot{e} + K_v \dot{e} + K_p e \end{aligned} \quad (2.22)$$

dove  $\tilde{\pi} = \pi - \hat{\pi}$  rappresenta l'errore di stima dei parametri dinamici, e avendo supposto l'invertibilità della stima  $\hat{M}(q)$  della matrice dinamica. Come evidenziato nella sezione 2.2.2, la dinamica dell'errore di posizione risulta affetta da un disturbo  $\eta = \hat{M}^{-1}(q) Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \tilde{\pi}$  che ne preclude l'asintotica convergenza a zero, e in alcuni casi la stabilità. Vedremo quindi come una scelta opportuna della dinamica  $\dot{\hat{\pi}}$  delle stime dei parametri dinamici garantisca la convergenza a zero dell'errore di stima. A tal proposito si sfrutta nuovamente il metodo diretto di Lyapunov.

Si esprima la (2.22) in forma di stato

$$\dot{\xi} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -K_p & -K_v \end{pmatrix} \xi + \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \hat{M}(q)^{-1} Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \tilde{\pi}$$

dove abbiamo posto  $\xi = (e, \dot{e})^T$ , e si scelga la funzione di Lyapunov

$$V(t) = \frac{1}{2}\xi^T P\xi + \frac{1}{2}\tilde{\pi}^T R\tilde{\pi}.$$

che derivata rispetto al tempo porta a

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= \frac{1}{2}\dot{\xi}^T P\xi + \frac{1}{2}\xi^T P\dot{\xi} - \tilde{\pi}^T R\dot{\tilde{\pi}} \rightarrow \\ \dot{V}(t) &= \frac{1}{2}\xi^T (A^T P + PA)\xi + \tilde{\pi}^T \left( Y^T(q, \dot{q}, \ddot{q})\hat{M}^{-T}(q)(0, I)P\xi - R\dot{\tilde{\pi}} \right) \rightarrow \\ \dot{V}(t) &= -\frac{1}{2}\xi^T Q\xi + \tilde{\pi}^T \left( Y^T(q, \dot{q}, \ddot{q})\hat{M}^{-T}(q)(0, I)P\xi - R\dot{\tilde{\pi}} \right),\end{aligned}\tag{2.23}$$

dove abbiamo sfruttato l'equazione di Lyapunov  $A^T P + PA = -Q$ ,  $Q > 0$ . A questo punto si nota che scegliendo la dinamica per le stime dei parametri

$$\dot{\tilde{\pi}} = R^{-1}Y^T(q, \dot{q}, \ddot{q})\hat{M}^{-T}(q)(0, I)P\xi\tag{2.24}$$

la (2.23) diventa

$$\dot{V}(t) = -\frac{1}{2}\xi^T Q\xi \leq 0.$$

Questa espressione implica che, con la scelta della coppia  $\tau$  in (2.21) e della dinamica per le stime (2.24), il sistema a ciclo chiuso tende asintoticamente alla configurazione di equilibrio  $\xi^T = (e, \dot{e}) = (0, 0)$ , ma *non è garantita* la convergenza a zero dell'errore di stima  $\tilde{\pi}$ . A tal proposito mostriamo che l'errore di stima tende a zero solo per quelle traiettorie di riferimento che risultino *persistentemente eccitanti* per le dinamiche (2.24).

- **Condizione di eccitazione persistente**

Una funzione  $f(t)$  soddisfa la *condizione di eccitazione persistente* se

$$\int_t^{t+\delta} f(t)^T f(t) dt \geq \alpha I, \forall t,\tag{2.25}$$

dove  $\alpha, \delta > 0$ .

A tal proposito si nota che la (2.22) diventa, una volta raggiunto l'equilibrio (i.e.  $\langle \xi, \dot{\xi} \rangle = \langle 0, 0 \rangle$ ),

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\tilde{\pi}(t) = 0\tag{2.26}$$

che non implica la convergenza a zero dell'errore di stima  $\tilde{\pi}(t)$ , basta infatti che  $\tilde{\pi}(t) \neq 0 \in \text{Ker}\{Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\}$ . Si può comunque notare che le dinamiche (2.24) delle stime dei parametri tendono a zero asintoticamente, vista l'asintotica convergenza a zero del vettore  $\xi$ , il che implica la costanza del vettore

$\tilde{\pi}(t) = \bar{\tilde{\pi}}$  per istanti temporali  $t$  grandi. Moltiplicando quindi la (2.26) per  $Y^T(q, \dot{q}, \ddot{q})$ , e integrandola in un intervallo temporale  $[t, t + \delta]$  si ottiene

$$\int_t^{t+\delta} Y^T(q, \dot{q}, \ddot{q})Y(q, \dot{q}, \ddot{q})dt \bar{\tilde{\pi}} = 0$$

che ha come unica soluzione  $\bar{\tilde{\pi}} = 0$  se è vera la (2.25).

In conclusione, è importante sottolineare che il controllo di Craig, il cui schema è riportato in fig.2.4, è affetto da alcuni problemi, quali la necessità di retroazionare le accelerazioni di giunto e la non sempre garantita invertibilità della matrice  $\hat{M}(q)$ . Tali problemi verranno superati dallo schema di controllo adattivo proposto nel paragrafo successivo.

## 2.2.4 Controllo Adattivo alla Li-Slotine

Per superare i limiti del controllo adattivo alla Craig, il controllo di Li-Slotine non si fonda sulla scelta di un controllo  $\tau$  del tipo a coppia calcolata, ma sfrutta la cosiddetta *velocità di riferimento*

$$\dot{q}_r = \dot{q}_d - \Lambda e$$

dove  $q_d$  è il riferimento di posizione dei giunti ed  $e = q - q_d$  è il relativo errore di posizione. La differenza tra la velocità ai giunti  $\dot{q}$  e la velocità di riferimento  $\dot{q}_r$  è rappresentata da

$$s = \dot{q} - \dot{q}_r = \dot{e} + \Lambda e.$$

A questo punto si definisce una funzione

$$V(t) = \frac{1}{2}s^T M(q)s + \tilde{\pi}^T R \tilde{\pi},$$

dove in particolare  $R > 0$  e  $\tilde{\pi} = \pi - \hat{\pi}$ . Si noti che  $V(t)$ , che ha significato simile ad una candidata di Lyapunov, è soltanto *semi-definita positiva*, in quanto  $V(t) = 0 \rightarrow \tilde{\pi} = 0, s = 0 \rightarrow \dot{e} = -\Lambda e$  che non implica  $(\dot{e}, e) = (0, 0)$ . Passando comunque alla derivazione della  $V(t)$  si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= s^T M(q)\dot{s} + \frac{1}{2}s^T \dot{M}(q)s - \tilde{\pi}^T R \dot{\tilde{\pi}} \rightarrow \\ \dot{V}(t) &= s^T M(q)(\ddot{q} - \ddot{q}_r) + \frac{1}{2}s^T \dot{M}(q)s - \tilde{\pi}^T R \dot{\tilde{\pi}} \rightarrow \\ \dot{V}(t) &= s^T (M(q)\ddot{q} - M(q)\ddot{q}_r) + \frac{1}{2}s^T \dot{M}(q)s - \tilde{\pi}^T R \dot{\tilde{\pi}} \rightarrow \\ \dot{V}(t) &= s^T (\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q) - M(q)\ddot{q}_r) + \frac{1}{2}s^T \dot{M}(q)s - \tilde{\pi}^T R \dot{\tilde{\pi}} \rightarrow \\ \dot{V}(t) &= s^T (\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q) - M(q)\ddot{q}_r) + \frac{1}{2}s^T \dot{M}(q)s - \tilde{\pi}^T R \dot{\tilde{\pi}} \rightarrow \end{aligned}$$

e sommando e sottraendo il termine  $s^T C(q, \dot{q})s$  si giunge alla

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= s^T(\tau - C(q, \dot{q})\dot{q}_r - G(q) - M(q)\ddot{q}_r) - \tilde{\pi}^T R \dot{\hat{\pi}} \rightarrow \\ \dot{V}(t) &= s^T(\tau - Y(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)\pi) - \tilde{\pi}^T R \dot{\hat{\pi}}\end{aligned}\quad (2.27)$$

dove abbiamo supposto che la matrice  $C(q, \dot{q})$  sia stata calcolata utilizzando il metodo di Christoffel, che comporta  $s^T (\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q}))s = 0, \forall s$ .

Si scelga la coppia di controllo

$$\tau = \hat{M}(q)\ddot{q}_r + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q}_r + \hat{G}(q) - K_d s = Y(q, \dot{q}, \ddot{q}_r, \dot{q}_r)\hat{\pi} - K_d s$$

e la si sostituisca nella (2.27) ottenendo

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= s^T (Y(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)(\hat{\pi} - \pi) - K_d s) - \tilde{\pi}^T R \dot{\hat{\pi}} \rightarrow \\ \dot{V}(t) &= s^T Y(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)\tilde{\pi} - s^T K_d s - \tilde{\pi}^T R \dot{\hat{\pi}} \rightarrow \\ \dot{V}(t) &= \tilde{\pi}^T \left( -Y^T(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)s - R \dot{\hat{\pi}} \right) - s^T K_d s\end{aligned}$$

Scegliendo come dinamica per le stime  $\hat{\pi}$  la

$$\dot{\hat{\pi}} = -R^{-1}Y^T(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)s$$

si ottiene

$$\dot{V}(t) = -s^T K_d s \leq 0.$$

Al fine di garantire l'asintotica stabilità del sistema (i.e.  $(e, \dot{e}) \rightarrow (0, 0)$ ) è necessario mostrare che  $\dot{V}(t) \rightarrow 0$ . Infatti

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) = 0 &\rightarrow s = \dot{e} + \Lambda e = 0 \rightarrow \dot{e} = -\Lambda e \rightarrow \\ e(t) &= e(0)e^{-\Lambda t}\end{aligned}$$

che impone  $(e, \dot{e}) \rightarrow (0, 0)$  per  $t \rightarrow \infty$ .

Poichè la  $V(t)$  non rappresenta una candidata di Lyapunov in senso stretto è necessario ricorrere ad un tecnicismo particolare, quale il

- **Lemma di Barbalat:**

Se la funzione differenziabile scalare  $V(t)$  soddisfa le seguenti condizioni

$$\begin{cases} V(t) \geq 0 \\ \dot{V}(t) \leq 0 \\ |\ddot{V}(t)| \leq M \end{cases}\quad (2.28)$$

in cui la terza condizione assicura l'uniforme continuità della  $\dot{V}(t)$ , allora  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(t) = 0$ .

Nel nostro caso è facile notare che la  $\ddot{V}(t)$  risulta inferiormente limitata. Infatti

$$\ddot{V}(t) = -2s^T K_d \dot{s} = -2(\dot{e} + \Lambda \tilde{q})^T K_d (\ddot{e} + \Lambda \dot{e}),$$

e le funzioni  $(e, \dot{e}, \ddot{e})$  da cui dipende sono limitate. Abbiamo quindi mostrato che il controllo proposto garantisce l'inseguimento asintotico dei riferimenti di posizione da parte dei giunti (resta il fatto che non garantisce l'asintotica convergenza a zero degli errori di stima, si veda a tal proposito i risultati riportati in 2.2.3).

Come anticipato, il controllo adattivo proposto (vedasi fig.2.5) risulta una tecnica di controllo adattivo preferibile allo schema presentato in 2.2.3, non richiedendo la retroazione della accelerazione  $\ddot{q}$  di giunto (in genere affetta da rumore), e principalmente l'inversione della stima della matrice dinamica  $\hat{M}(q)$ .

**NOTA:** Sono evidenti le somiglianze di questo controllore con il controllore a backstepping adattivo, che ne rappresenta una generalizzazione.

## 2.3 Backstepping Control

Consider a system whose state  $\xi$  can be partitioned so that the dynamics equation can be written as

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= f(\xi_1) + g(\xi_1)\xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= h(\xi_1, \xi_2) + \ell(\xi_1, \xi_2)u \end{aligned} \quad (2.29)$$

with  $\xi_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $\xi_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $u \in \mathbb{R}^{n_2}$ . Assume the origin is an equilibrium, and that  $\ell(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$  is invertible for all  $\xi_1, \xi_2$ .

The backstepping method assumes that a controller design exists for the "higher level" system

$$\dot{\xi}_1 = f(\xi_1) + g(\xi_1)u' \quad (2.30)$$

in the form of a stabilizing feedback law  $u' = \Gamma(\xi_1)$ , and that a Lyapunov function  $V(\xi_1)$  is available such that (omitting the argument of functions, and letting  $V_{\xi_1} = \frac{\partial V}{\partial \xi_1}$ )

$$\dot{V}(\xi_1) = V_{\xi_1} (f + g\Gamma)$$

is negative semi-definite (or negative definite).

In the backstepping method, the control for (2.29) is computed so that the state  $\xi_2$  tends to track the value of  $u' = \Gamma(\xi_1)$ . This can be obtained using the control Lyapunov function

$$W(\xi) = V + \frac{1}{2} (\xi_2 - \Gamma)^T P(\xi) (\xi_2 - \Gamma),$$

where  $P(\xi) \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$  is a positive definite “design” matrix (i.e. a matrix whose choice is at the controller designer’s disposal). Letting  $v = h(\xi_1, \xi_2) + \ell(\xi_1, \xi_2) u$  and  $\dot{\Gamma}(\xi_1) = \Gamma_{\xi_1}(f + g \xi_2)$ , we compute

$$\begin{aligned} \dot{W}(\xi) &= V_{\xi_1}(f + g \xi_2) + (\xi_2 - \Gamma)^T P (v - \dot{\Gamma}) + \\ &\quad + \frac{1}{2} (\xi_2 - \Gamma)^T \dot{P} (\xi_2 - \Gamma). \end{aligned}$$

Let us then choose

$$v = \dot{\Gamma} - P^{-1} \left( \frac{1}{2} \dot{P} (\xi_2 - \Gamma) - K (\xi_2 - \Gamma) \right) + \bar{v}$$

(with  $K$  a positive definite design matrix) so that we get

$$\dot{W} = V_{\xi_1}(f + g \xi_2) + (\xi_2 - \Gamma)^T P \bar{v} - (\xi_2 - \Gamma)^T K (\xi_2 - \Gamma).$$

We can now choose  $\bar{v}$  so as to obtain

$$V_{\xi_1} g \xi_2 + (\xi_2 - \Gamma)^T P \bar{v} = V_{\xi_1} g \Gamma,$$

which is achieved by setting  $\bar{v} = -P^{-1} g^T V_{\xi_1}^T$ . We therefore have

$$\dot{W} = \dot{V} - (\xi_2 - \Gamma)^T K (\xi_2 - \Gamma),$$

which is negative semi-definite (or definite, depending on the definiteness of  $\dot{V}(\xi_1)$ ) in the origin. We have thus shown that the overall control law

$$u = \ell(\xi)^{-1} (v(\xi) - h(\xi)),$$

with

$$v = \dot{\Gamma} - P^{-1} \left( \frac{1}{2} \dot{P} (\xi_2 - \Gamma) - K (\xi_2 - \Gamma) - g^T V_{\xi_1}^T \right)$$

stabilizes (asymptotically) the origin of system (2.29).

### 2.3.1 Backstepping Control of Completely Actuated Lagrangian Systems

Let us now apply the backstepping control approach to the model of a fully actuated robot arm - i.e. a Lagrangian system with coordinates  $q \in \mathbb{R}^n$ , kinetic energy  $T(q) = \frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) \dot{q}$  and gravitational potential energy  $U(q)$ ,  $\frac{\partial U}{\partial q} = G(q)$  as in (2.1), i.e.

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = F(q) f \stackrel{def}{=} \tau$$

where the actuator forces/torques map to generalized forces  $\tau \in \mathbb{R}^n$  through an always invertible map  $F(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Let  $\hat{q}(t)$  be the reference trajectory to be tracked. Letting  $e \stackrel{def}{=} q - \hat{q}$  and  $\dot{e} \stackrel{def}{=} w$  we write

$$\begin{aligned} \dot{e} &= w \\ \dot{w} &= \ddot{q} - \ddot{\hat{q}} \\ &= -\ddot{\hat{q}} - B^{-1}(C\dot{q} + G(q)) + B^{-1}\tau \end{aligned} .$$

It can be observed that this equation is in the form of (2.29), wherever we interpret  $e = \xi_1$ ,  $w = \xi_2$ ,  $f(e) = 0$ ,  $g(e) = 1$ ,  $\ell(e, t) = B(e + \hat{q})^{-1}$  (which is always invertible) and  $h(e, w, t) = -\ddot{\hat{q}}(t) - B^{-1}(C(\dot{e} + \dot{\hat{q}}) + G)$ .

Consider the higher level, purely kinematic system  $\dot{e} = u'$ , let  $V(e) = 1/2 e^T e$  and choose  $u' = \Gamma(e) = -\Lambda e$ , with  $\Lambda$  a symmetric, positive definite design matrix. We get  $\dot{V} = -e^T \Lambda e$  which is globally negative definite.

Consider now for the full dynamic system (2.3.1) the candidate Lyapunov function

$$W(e, w, t) = V(e) + \frac{1}{2}(w - \Gamma(e))^T B(e, \hat{q})(w - \Gamma(e)).$$

For convenience, introduce the variable  $s = w - \Gamma(e)$ , and observe that

$$\begin{aligned} s &= \dot{e} + \Lambda e \\ &= \dot{q} - \left( \dot{\hat{q}} - \Lambda e \right) \stackrel{def}{=} \dot{q} - \dot{q}_r \end{aligned} .$$

The term  $\dot{q}_r = \dot{\hat{q}} - \Lambda(q - \hat{q})$  is sometimes referred to as ‘‘reference velocity’’, and has the interpretation of the reference velocity to which the robot configuration should tend ( $\dot{q} \rightarrow \dot{q}_r$  when  $s \rightarrow 0$ ): notice that  $\dot{q}_r$  is increased, with respect to  $\dot{\hat{q}}$ , in the directions in which the actual configuration  $q$  lags behind the desired  $\hat{q}$ , decreased wherever  $q$  is ahead of  $\hat{q}$ .

Hence, in the new coordinates

$$W(e, s, t) = \frac{1}{2}e^T e + \frac{1}{2}s^T B(e, \hat{q})s,$$

and we compute

$$\begin{aligned} \dot{W} &= e^T \dot{e} + s^T B \dot{s} + \frac{1}{2}s^T \dot{B}s \\ &= e^T \dot{e} + s^T (B\dot{q} - B\dot{q}_r) + \frac{1}{2}s^T \dot{B}s \\ &= e^T \dot{e} + s^T (-C\dot{q} - G(q) + \tau - B\dot{q}_r) + \frac{1}{2}s^T \dot{B}s \end{aligned}$$

Summing and subtracting on the right the term  $s^T C s$ , which can be rewritten as  $1/2 s^T (2C) s$  and as  $s^T (C\dot{q} - C\dot{q}_r)$ , we further have

$$\dot{W} = e^T \dot{e} + s^T (-B\ddot{q}_r - C\dot{q}_r - G(q) + \tau) + \frac{1}{2} s^T (\dot{B} - 2C) s.$$

Now, assuming that the Coriolis and centrifugal force matrix  $C(q, \dot{q})$  is written in Christoffel form, the last term in the right-hand side is zero for all  $s$ . We can therefore choose generalized forces as

$$\tau = B\ddot{q}_r + C\dot{q}_r + G(q) - K_d s + \bar{\tau} \quad (2.31)$$

with  $K_d$  a positive definite design matrix, so that

$$\dot{W} = e^T \dot{e} - s^T K_d s + s^T \bar{\tau}.$$

Finally, setting  $\bar{\tau} = -e$ , we have

$$\begin{aligned} \dot{W} &= e^T \dot{e} - s^T K_d s - s^T e \\ &= -s^T K_d s + e^T \dot{e} - (\dot{e} + \Lambda e)^T e \\ &= -s^T K_d s - e^T \Lambda e. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Before concluding for stability, a few technical remarks are in order. Observe that  $W(e, s, t)$  is a time-varying candidate, because  $\hat{q}(t)$  appears explicitly in the inertia matrix  $B(q)$  when written in the error coordinates  $B(e + \hat{q})$ . However, for physical reasons, the norm of the inertia matrix is certainly bounded  $\max_q \|B(q)\| \leq \beta_M$ , and so is for its inverse  $\max_q \|B(q)^{-1}\| \leq 1/\beta_m$  (if two-norms are considered,  $\beta_M$  and  $\beta_m$  are upper and lower bounds on the maximum and minimum singular values of  $B(q)$ , respectively). Therefore one can write

$$\frac{1}{2} \|e\|^2 + \frac{1}{2} \beta_m^2 \|s\|^2 \leq W(e, s, t) \leq \frac{1}{2} \|e\|^2 + \frac{1}{2} \beta_M^2 \|s\|^2, \quad \forall t, \forall e, s$$

where the two bounding functions are in class  $\mathcal{K}_\infty$ <sup>3</sup>. These assumptions on a time-varying candidate Lyapunov function are needed to generalize a condition of positive definiteness and radial unboundedness for time-invariant Lyapunov candidates. From (2.32) we gather that  $\dot{W}$  is time-invariant and globally negative definite in the coordinates  $(e, s)$ . From Lyapunov theorem, then, the origin  $(e = 0, s = 0)$  is uniformly globally asymptotically stable, which implies that  $q(t)$  converges asymptotically to  $\hat{q}(t)$ .

---

<sup>3</sup>a function  $\alpha : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$  is in class  $\mathcal{K}_\infty$  if it is strictly increasing,  $\alpha(0) = 0$ , and  $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = \infty$ .

### 2.3.2 Adaptive Backstepping Control for Lagrangian Systems

Consider now the case that the dynamical model of the system is not known, but estimates are available as  $\hat{B}(q)$ ,  $\hat{C}(q, \dot{q})$ , and  $\hat{G}(q)$ . We want to design an update law for these estimates that, together with a control law for the generalized forces  $\tau$ , can guarantee asymptotic stability of trajectory tracking.

We make the assumption that all unknown parameters in the system dynamics can be combined and collected in a vector  $\pi \in \mathbb{R}^p$  such that the dynamics are linear in  $\pi$ , i.e. (2.1) can be rewritten as

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = Y(q, \dot{q}, \ddot{q}, \delta)\pi, \quad (2.33)$$

with  $Y(q, \dot{q}, \ddot{q}, \delta) \in \mathbb{R}^{n \times p}$  a dynamic regressor matrix whose elements depend on configurations, velocities and accelerations, and on a vector  $\delta$  containing parameters which are supposed to be known exactly (the dependence on  $\delta$  will be omitted when not necessary). The estimate  $\hat{\pi}$  of the true but unknown vector  $\pi$  changes in time as  $\dot{\hat{\pi}} = u_p$ , where the update law  $u_p$  is the objective of design. The “best effort” approximation of the backstepping control law (2.31) is

$$\begin{aligned} \tau &= \hat{B}\ddot{q}_r + \hat{C}\dot{q}_r + \hat{G}(q) - K_d s - e \\ &= Y(q, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)\hat{\pi} - K_d s - e. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Notice that through this choice, the dynamics of the lagrangian system become connected to the parameter update dynamics, so that stability and convergence must be studied in a larger state space, comprised of configurations  $q$ , velocities  $\dot{q}$ , and estimates  $\hat{\pi}$ .

Letting  $\tilde{\pi} = \pi - \hat{\pi}$  denote the estimate error, let us choose  $(e, s, \tilde{\pi})$  as coordinates for this state space, and propose a candidate Lyapunov function

$$\begin{aligned} W_\pi(e, s, \tilde{\pi}, t) &= W(e, s, t) + \frac{1}{2}\tilde{\pi}^T R \tilde{\pi} \\ &= \frac{1}{2}e^T e + \frac{1}{2}s^T B s + \frac{1}{2}\tilde{\pi}^T R \tilde{\pi} \end{aligned} \quad (2.35)$$

where  $R$  is a symmetric positive definite design matrix. If the unknown parameters can be assumed constant, which is often the case in practice, then  $\dot{\tilde{\pi}} = \dot{\pi} - \dot{\hat{\pi}} = -\dot{\hat{\pi}} = -u_p$  and, following the same derivation as in section 2.3.3, we get

$$\dot{W}_\pi = e^T \dot{e} + s^T (-B\ddot{q}_r - C\dot{q}_r - G(q) + \tau) - \tilde{\pi}^T R u_p.$$

Substituting (2.34) one gets

$$\begin{aligned} \dot{W}_\pi &= s^T \left( \tilde{B}\ddot{q}_r + \tilde{C}\dot{q}_r + \tilde{G}(q) \right) - s^T K_d s - e^T \Lambda e + \tilde{\pi}^T R u_p \\ &= s^T Y(q, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)\tilde{\pi} - s^T K_d s - e^T \Lambda e - \tilde{\pi}^T R u_p. \end{aligned}$$

Hence, choosing the update law as

$$\dot{\hat{\pi}} = u_p = R^{-1}Y^T(q, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)s \quad (2.36)$$

it holds

$$\dot{W}_\pi = -s^T K_d s - e^T \Lambda e, \quad (2.37)$$

In this case, being  $W_\pi$  again bounded by two functions in class  $\mathcal{K}_\infty$ , and  $\dot{W}_\pi$  being negative semi-definite in the  $(e, s, \tilde{\pi})$  state space, from Lyapunov theorem we can infer uniform stability of the origin.

To have a stronger result of convergence, some further analysis is necessary. Indeed, straightforward application of LaSalle's invariance principle is not warranted, because the system and  $W_\pi$  are time-varying. However,  $\dot{W}_\pi$  is time-invariant in our case. A generalized version of LaSalle theorem (known as LaSalle-Yoshizawa<sup>4</sup>) states in this case that  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{W}_\pi(e, s, \tilde{\pi}) = 0$ . From this and (2.37) we get  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ , hence  $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = \hat{q}(t)$ , as wished.

A few remarks are in order.

- No conclusion can be drawn on the convergence of parameter estimates, as it was to be expected. Indeed, we only know that  $\lim_{t \rightarrow \infty} s = 0$ , hence  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\hat{\pi}} = 0$ , and  $\hat{\pi}$  converges to a constant value  $\bar{\pi}$ . However, the residual error  $\pi - \bar{\pi}$  will not be zero in general, unless the trajectory  $\hat{q}(t)$  to be followed is *sufficiently rich* (cf. section 2.2.3);
- The update law (2.36) can be computed based only on the knowledge of the structure and known parameters  $\delta$  of the dynamic regressor  $Y(\cdot, \cdot, \cdot, \delta)$ , of the reference  $\hat{q}(t)$  with its derivatives, and on the real-time measurement of the configuration  $q$  and of its velocity  $\dot{q}$ , but *not* of the acceleration  $\ddot{q}$ . Indeed, it should be observed that  $\ddot{q}_r = \ddot{\hat{q}} - \Lambda \dot{e}$ ;
- The adaptive backstepping method for Lagrangian systems does not require the computation of the inverse of the estimated dynamics matrix  $\hat{B}$ , which was instead used in the adaptive feedback-linearization control (cf. section 2.2.4), with problems ensuing from the matrix not being guaranteed to exist;
- An example of a vector  $\pi$  for which the regressor form of the Lagrangian dynamics can be written, is the set of inertial parameters (masses, first and second moments of inertia) of a serial linkage robot arm. The method applies however in more general cases as well.

---

<sup>4</sup>see e.g. J. T. Spooner, M. Maggiore, R. Ord6nez, and K. M. Passino. Stable Adaptive Control and Estimation for Nonlinear Systems- Neural and Fuzzy Approximator Techniques. John Wiley & Sons, New York, NY, 2002.

### 2.3.3 Backstepping Control of Constrained Lagrangian Systems

Consider a system described by  $n$  Lagrangian coordinates  $q$ , with kinetic energy  $T(q) = \frac{1}{2}\dot{q}^T B(q)\dot{q}$  and gravitational potential energy  $U(q)$ ,  $\frac{\partial U}{\partial q} = G(q)$  as in (2.1), subject to  $m$  independent kinematic constraints in the form  $A(q)\dot{q} = 0$ , whose dynamics are

$$\tau = B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + A^T(q)\lambda \quad (2.38)$$

with  $\tau$  generalized forces and  $\lambda$  a vector of Lagrange multipliers for vincular reactions.

Letting  $S(q) \in \mathbb{R}^{n \times n-m}$  denote a basis for the kernel of  $A(q)$ , the kinematic system is described by

$$\dot{q} = S(q)\nu, \quad (2.39)$$

where  $\nu \in \mathbb{R}^{n-m}$  is the quasi-velocity vector corresponding to the  $n - m$  residual degrees-of-freedom of the system. By derivation we get

$$\ddot{q} = S(q)\dot{\nu} + \dot{S}(q)\nu, \quad (2.40)$$

with  $\dot{S}_{i,j}(q) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^{n-m} \frac{\partial S_{i,j}(q)}{\partial q_k} S_{k,\ell}(q)\nu_\ell$ . Substituting (2.39) and (2.40) in the dynamics, and premultiplying the equation by  $S^T(q)$ , we have

$$S^T B S \dot{\nu} + S^T (C S \nu + G) + S^T B \dot{S} \nu = S^T \tau$$

where the fact that  $S^T A^T = 0$  has been used.

The vector  $\tau_c = S^T \tau$  collects the  $n - m$  components of the projection of generalized forces on the constraint. The system is said to be completely actuated if the actuator forces  $f$  effectively acting on the system are biunivocally related to such projections, i.e. if there exists an invertible map  $F(q)$  such that  $\tau_c = F(q)f$ .

For notational convenience, let  $\bar{B}(q) \stackrel{def}{=} S^T B S$  and  $\bar{h}(q, \nu) \stackrel{def}{=} S^T (C S \nu + G + B \dot{S} \nu)$ . The overall constrained system can then be written in the form

$$\begin{aligned} \dot{q} &= S(q)\nu \\ \dot{\nu} &= -\bar{B}(q)^{-1}\bar{h}(q, \nu) + \bar{B}(q)^{-1}\tau_c. \end{aligned} \quad (2.41)$$

If a law  $\nu = \Gamma(q)$  is designed for the kinematic level, such that  $\dot{q} = S(q)\Gamma(q)$  is stabilized, and a Lyapunov function  $V(q)$  is available with  $\dot{V}(q) = V_q S \Gamma$  negative semi-definite, then

$$W(q, \nu) = V(q) + \frac{1}{2}(\nu - \Gamma)^T P (\nu - \Gamma)$$

is a Lyapunov control function for the overall system (2.41). The usual backstepping control derivations indeed yield

$$\tau_c(q, \nu) = \bar{h} + \bar{B}\dot{\Gamma} - \frac{1}{2}P^{-1}\dot{P}(\nu - \Gamma) - P^{-1}K(\nu - \Gamma) - \bar{B}P^{-1}S^T V_q^T \quad (2.42)$$

for which

$$\dot{W} = \dot{V} - (\nu - \Gamma)^T K(\nu - \Gamma),$$

which is in turn negative semi-definite (actually negative definite if such was  $\dot{V}$ ).

Remarks:

- An adaptive version of the adaptive backstepping control for constrained Lagrangian systems can be obtained if the constrained dynamics are written in regressor form, and a best effort approximation of the control law (2.42) is used;
- If the kinematic system is written in terms of error coordinates  $e = q - \hat{q}$ , one has in general  $\dot{e} = S(e, t)\nu + \hat{S}(e, t)\hat{\nu}$ . The derivation of the backstepping controller is somewhat more laborious in this case.

### 2.3.4 Applicazione: Controllo dinamico dell'uniciclo

Sia  $m$  la massa del veicolo e  $I_z$  il momento di inerzia rispetto all'asse verticale perpendicolare al piano di moto. Facendo riferimento alla figura 1.3, le coordinate generalizzate scelte per localizzare univocamente l'uniciclo sul piano sono  $q = [x, y, \theta]^T$ , dove la coppia  $(x, y)$  indica la coordinata cartesiana del punto di mezzo dell'interasse del veicolo, punto per il quale passa istante per istante l'asse perpendicolare al piano di moto, e con  $\theta$  orientazione del veicolo rispetto all'asse delle ascisse. Le energie cinetica e potenziale sono pari a

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I_z\dot{\theta}^2 \\ U &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} \right)^T = \begin{bmatrix} m\ddot{x} \\ m\ddot{y} \\ I_z\ddot{\theta} \end{bmatrix} = \tau, \quad (2.43)$$

dove le coppie  $\tau = [\tau_x, \tau_y, \tau_\theta]^T$ . L'energia potenziale è nulla ipotizzando il piano orizzontale di riferimento delle coordinate coincidente con il piano di moto.

Il vincolo (1.2) imposto da questo particolare tipo di sistema dinamico, riportato in forma Pfaffiana in (1.3), mette in evidenza come solo le forze dirette lungo l'interasse e con lo stesso verso devono essere assorbite dal

vincolo. Se il verso di tali forze è opposto sarà la struttura stessa del veicolo ad assorbirle.

Il calcolo dello spazio nullo della matrice  $A(q)$  permette di esprimere il legame tra la velocità delle coordinate generalizzate  $\dot{q}$  con le quasi velocità  $\nu$ :

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \nu \rightarrow \ddot{q} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{\nu} + \begin{bmatrix} -\dot{\theta} \sin \theta & 0 \\ \dot{\theta} \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \nu. \quad (2.44)$$

Il modello dinamico dell'uniciclo può essere determinato sia con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange qualora interessi il calcolo esplicito delle reazioni vincolari o con il metodo delle quasi velocità. Nel primo caso si ha

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & \sin \theta \\ 0 & m & 0 & -\cos \theta \\ 0 & 0 & I_z & 0 \\ \sin \theta & -\cos \theta & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_\theta \\ -\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta - \dot{y}\dot{\theta} \sin \theta \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

Il primo termine della equazione (2.45) è una matrice invertibile, quindi è possibile ottenere la seguente soluzione:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{\cos \theta}{m} (\tau_x \cos \theta + \tau_y \sin \theta) - \dot{\theta} \sin \theta (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta) \\ \ddot{y} = \frac{\sin \theta}{m} (\tau_x \cos \theta + \tau_y \sin \theta) + \dot{\theta} \cos \theta (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta) \\ \ddot{\theta} = \frac{\tau_\theta}{I_z} \\ \lambda = \tau_x \sin \theta - \tau_y \cos \theta + m\dot{\theta} (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta) \end{cases}, \quad (2.46)$$

dove la forza di reazione vincolare  $\lambda$  è composta da quattro termini: i primi due rappresentano le forze di reazione dirette lungo l'interasse del veicolo, mentre gli ultimi due tengono conto delle interazioni mutue tra le varie velocità. La presenza delle forze di Coriolis negli ultimi due termini di  $\lambda$  ne annulleranno l'effetto nella dinamica, la quale dipenderà solamente dalla matrice delle inerzie  $B(q)$ .

Il metodo delle quasi velocità viene applicato ponendo come al solito  $S(q)^T \tau = S(q)^T B(q) \dot{S}(q)^T \nu + S(q)^T B(q) S(q) \dot{\nu}$ . In questo modo si ottiene:

$$\begin{aligned} S(q)^T \tau &= \begin{bmatrix} \tau_x \cos \theta + \tau_y \sin \theta \\ \tau_\theta \end{bmatrix} \\ S(q)^T B(q) S(q) &= \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_z \end{bmatrix}, \\ S(q)^T B(q) \dot{S}(q) &= 0 \end{aligned} \quad (2.47)$$

che ci permette di ottenere:

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= \frac{1}{m}(\tau_x \cos \theta + \tau_y \sin \theta) \\ \dot{v}_2 &= \frac{\tau_\theta}{I_z}.\end{aligned}\quad (2.48)$$

Analizzando i risultati ottenuti in (2.48) si nota che l'accelerazione del veicolo  $\dot{v}_1$ , compatibile con il vincolo, è diretta lungo la perpendicolare all'interasse delle ruote, mentre l'accelerazione angolare  $\dot{v}_2$  sarà inversamente proporzionale al momento di inerzia  $I_z$  secondo la coppia di rotazione applicata al veicolo.

In definitiva il modello dinamico complessivo dell'uniciclo è dato da

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta \\ \dot{y} = v \sin \theta \\ \dot{\theta} = \omega \\ \dot{v} = \frac{1}{m}(\tau_x \cos \theta + \tau_y \sin \theta) \triangleq \frac{\tau_v}{m} \\ \dot{\omega} = \frac{\tau_\theta}{I_z}.\end{cases}\quad (2.49)$$

**Inseguimento di traccia con un uniciclo** Si consideri nuovamente il problema di stabilizzare un veicolo di tipo uniciclo su di un percorso assegnato. Considereremo che il percorso sia rettilineo e senza perdere di generalità assumeremo che tale retta coincida con l'asse delle ascisse  $y = 0$  del sistema di riferimento. Nella sezione 1.4.1 è stata determinata la legge di stabilizzazione in grado di assolvere al task di path following nel caso cinematico. In particolare, considerando il solo modello cinematico dell'uniciclo (2.78), e rinunciando alla velocità di avanzamento  $v = \hat{v}(t)$  dell'uniciclo che assumeremo assegnata in altro modo, la stabilizzazione dell'uniciclo sull'asse  $y = 0$  è ottenuta se  $y = 0$  e  $\theta = 0$ . Si consideri perciò la seguente candidata di Lyapunov

$$V(q) = \frac{1}{2}(y^2 + \theta^2) \quad (2.50)$$

e la sua derivata

$$\dot{V}(q) = y\hat{v}(t) \sin \theta + \theta\omega. \quad (2.51)$$

Scegliendo

$$\omega = -y\frac{\sin \theta}{\theta} - K_\theta\theta \quad (2.52)$$

si ottiene

$$\dot{V}(q) = -K_\theta\theta^2, \quad (2.53)$$

che risulta s.n.d.. Attraverso il teorema di Lasalle-Yoshizawa, si può comunque dimostrare la asintotica stabilità dell'equilibrio.

Per la stabilizzazione del modello dinamico si può applicare la tecnica dell'integratore backstepping. Si definisca quindi la candidata di Lyapunov estesa:

$$V_e(q, \omega) = V(q) + \frac{1}{2}(\omega - \Omega)^2, \quad (2.54)$$

dove  $\Omega$  rappresenta la legge di stabilizzazione nel caso cinematico (riportata in (2.52)). Derivando rispetto al tempo si ottiene:

$$\dot{V}_e(q, \omega) = \dot{V}(q) + (\omega - \Omega)\left(\frac{\tau_\theta}{I_z} - \dot{\Omega}\right). \quad (2.55)$$

Una possibile coppia di controllo  $\tau_\theta$  è:

$$\tau_\theta = I_z(\dot{\Omega} - K_b(\omega - \Omega) - \theta) \quad (2.56)$$

con  $K_b > 0$  costante di backstepping da definire in base alle desiderate velocità di convergenza del veicolo. Il calcolo della coppia  $\tau_\theta$  passa attraverso il calcolo di  $\dot{\Omega}$ , pari a:

$$\dot{\Omega} = Kv(t)y \cos \theta + K^2\theta - v^2(t)\frac{\sin \theta}{\theta} \left( \sin \theta + y^2 \frac{\sin \theta - \theta \cos \theta}{\theta^2} \right) - y\dot{v}(t)\frac{\sin \theta}{\theta},$$

sempre definita anche nel caso in cui  $\theta \rightarrow 0$ , dove vale  $\dot{\Omega} = y(Kv(t) - \dot{v}(t))$ .

Sostituendo tutto nella (2.55), si ottiene

$$\dot{V}_e(q, \omega) = -K_\theta\theta^2 - K_b(\omega - \Omega)^2$$

ovvero la (2.53) con l'aggiunta del termine di backstepping che risulta n.d.. Pertanto, le argomentazioni utilizzate per dimostrare la asintotica stabilità dell'equilibrio per il caso cinematico possono essere applicate alla stessa maniera anche in questo caso.

**Inseguimento del moto di un punto con unicyclo** Si consideri il problema dell'inseguimento di una traiettoria di riferimento nel caso di unicyclo. Le variabili di stato da stabilizzare sono in questo caso gli errori di tracking tra i due veicoli, con cinematica:

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v + e_2 - \hat{v} \cos e_3 \omega \\ -e_1 \omega + \hat{v} \sin e_3 \\ \omega - \hat{\omega} \end{bmatrix}. \quad (2.57)$$

La candidata di Lyapunov e la relativa derivata direzionale per il modello cinematico sono:

$$\begin{cases} V(e) = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2) + K(1 - \cos e_3) \\ \dot{V}(e) = e_1(v + e_2 - \hat{v} \cos e_3 \omega) + e_2(-e_1 \omega + \hat{v} \sin e_3) + K \sin e_3(\omega - \hat{\omega}). \end{cases} \quad (2.58)$$

Sostituendo i controlli:

$$\begin{cases} v = \hat{v} \cos e_3 + \lambda_1 e_1 \\ \omega = \hat{\omega} - \frac{1}{K} e_2 \hat{v} + \lambda_2 \sin e_3, \end{cases} \quad (2.59)$$

si ottiene

$$\dot{V}(e) = -\lambda_1 e_1^2 - K \lambda_2 \sin^2 e_3, \quad (2.60)$$

che è s.d.n.. Ciononostante, utilizzando il teorema di Lasalle-Yoshizawa è possibile concludere sulla asintotica stabilità del punto di equilibrio  $e = [e_1, e_2, e_3]^T = [0, 0, 0]^T$ .

Per la stabilizzazione del modello dinamico si applichi la tecnica dell'integratore in backstepping. Il modello dinamico complessivo è

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \\ \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v + e_2 \omega - \hat{v} \cos e_3 \\ -e_1 \omega + \hat{v} \sin e_3 \\ \omega - \hat{\omega} \\ \frac{\tau_v}{m} \\ \frac{\tau_\theta}{I_z} \end{bmatrix}. \quad (2.61)$$

Si definisca quindi la candidata di Lyapunov estesa:

$$\mathbf{V}_e(e, v, \omega) = \mathbf{V}(e) + \frac{1}{2}(v - \bar{V})^2 + \frac{1}{2}(\omega - \Omega)^2, \quad (2.62)$$

dove  $\Omega$  e  $\bar{V}$  rappresentano le leggi di stabilizzazione nel caso cinematico (riportate in (2.59)). Due possibili leggi per le coppie di controllo a disposizione  $\tau_v$  e  $\tau_\theta$  sono:

$$\begin{cases} \tau_v = m(-K_{bv}(v - \bar{V}(e)) + \frac{d\bar{V}(e)}{dt} - \frac{\partial \mathbf{V}(e)}{\partial e} g(e)) \\ \tau_\theta = I_z(-K_{b\omega}(\omega - \Omega(e)) + \dot{\Omega}(e) - \frac{\partial \mathbf{V}(e)}{\partial e} g(e)), \end{cases} \quad (2.63)$$

con  $K_{bv} > 0$  e  $K_{b\omega} > 0$  costanti di backstepping, rispettivamente per la velocità lineare ed angolare, da definire in base alle desiderate velocità di convergenza per il veicolo. Il calcolo delle coppie angolari  $\tau_v$  e  $\tau_\theta$  passa attraverso il calcolo delle derivate temporali delle rispettive leggi cinematiche di stabilizzazione  $\frac{d\bar{V}}{dt}$  e  $\dot{\Omega}$ , rispettivamente pari a:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{V}}{dt} = -(\omega - \hat{\omega}) \hat{v} \sin e_3 + \dot{\hat{v}} \cos e_3 - \lambda_1(v + e_2 \omega - \hat{v} \cos e_3) \\ \dot{\Omega} = \dot{\hat{\omega}} - \dot{\hat{v}} \frac{e_2}{K} - \frac{\hat{v}}{K}(-e_1 \omega + \hat{v} \sin e_3) - \lambda_2 \cos e_3(\omega - \hat{\omega}), \end{cases} \quad (2.64)$$

dipendenti dalla dinamica del riferimento tramite  $\dot{v}_r$  e  $\omega_r$ . Infine:

$$\begin{cases} \frac{\partial V(e)}{\partial e} g_1(e) = -e_1 \\ \frac{\partial V(e)}{\partial e} g_2(e) = -K_{e_3} \sin e_3. \end{cases} \quad (2.65)$$

Sostituendo (2.64) e (2.65) nella derivata direzionale di  $V_e(e, v, \omega)$  si ottiene subito:

$$\begin{aligned} \dot{V}_e(e, v, \omega) &= e_1(v_r \cos e_3 - v + e_2\omega) + e_2(v_r \sin e_3 - e_1\omega) \\ &\quad + K_{e_3} \sin e_3(\omega_r - \omega) - K_{bv}(v - \bar{V}(e))^2 - K_{b\omega}(\omega - \Omega(e))^2 \\ &\quad + (v - \bar{V}(e))e_1 + (\omega - \Omega(e))K_{e_3} \sin e_3, \\ &= -e_1^2 - K_{e_3} \sin e_3 - K_{bv}(v - \bar{V}(e))^2 - K_{b\omega}(\omega - \Omega(e))^2 \end{aligned} \quad (2.66)$$

dalla quale è possibile notare come si sia ottenuta la stessa derivata direzionale del caso cinamntico con l'aggiunta del termine di backstepping.

Fissando la costante di guadagno  $K_{e_3} = 10$  e le costanti di backstepping  $K_{bv} = 10$  e  $K_{b\omega} = 1000$  si ottengono vari risultati a seconda delle velocità del riferimento. La massa ed il momento di inerzia dei due unicicli sono supposti identici per i due veicoli (una differenza non comporta alcun problema dal punto di vista del controllore) e pari rispettivamente a  $m = 10$  e  $I_z = 1$ . Nel primo esempio (figura 2.6, in alto a sinistra) il veicolo inseguitore ha posizione iniziale  $q_0^i = [x_0^i, y_0^i, \theta_0^i, v, \omega]^T = [0, 20, \frac{\pi}{2}, 0, 0]^T$ , mentre il riferimento ha come condizione iniziale  $q_0^r = [x_0^r, y_0^r, \theta_0^r, v_r, \omega_r]^T = [0, -10, 0, 10, 1]^T$  e velocità  $[v_r(t), \omega_r(t)]^T = [10, 1]^T$  (la sua traiettoria descrive una circonferenza di raggio  $R = 10$  nello spazio di stato del veicolo, percorsa a velocità costante). Nel secondo esempio (figura 2.6, in alto a destra) il veicolo di riferimento ha come condizione iniziale  $q_0^r = [x_0^r, y_0^r, \theta_0^r, v_r, \omega_r]^T = [0, -20, 0, -20, 1]^T$  ed il veicolo inseguitore  $q_0^i = [x_0^i, y_0^i, \theta_0^i, v, \omega]^T = [0, 20, 0, 0, 0]^T$ . Le velocità del riferimento sono stavolta  $[v_r(t), \omega_r(t)]^T = [0.1t, 1]^T$  corrispondenti ad una uniforme accelerazione lungo la velocità di avanzamento. Nel terzo esempio (figura 2.6, in basso a sinistra) il veicolo di riferimento ha come condizione iniziale  $q_0^r = [x_0^r, y_0^r, \theta_0^r, v_r, \omega_r]^T = [0, -10, 0, 20, 0]^T$  e velocità  $[v_r(t), \omega_r(t)]^T = [20 \cos(t), 10 \sin(t)]^T$ , le quali descrivono una traiettoria generica nello spazio di stato. La posizione di partenza del veicolo inseguitore è invece  $q_0^i = [x_0^i, y_0^i, \theta_0^i, v, \omega]^T = [0, 20, \frac{\pi}{2}, 0, 0]^T$ . Si noti come un cambiamento nel tuning delle costanti di guadagno di backstepping, fissando ad esempio  $K_{b\omega} = 10$ , porta il sistema ad avere una convergenza verso il riferimento molto lenta.

**Controllo di postura (regolazione) di un veicolo uniciclo** Anche per quest'ultimo esempio si prenda in considerazione la stabilizzazione dinami-

ca su un punto di un veicolo uniclo. Si riporta brevemente il modello cinematico del sistema utilizzato:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = -\cos \beta v \\ \dot{\phi} = \frac{1}{\rho} \sin \beta v \\ \dot{\beta} = \frac{1}{\rho} \sin \beta v - \omega \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{\rho} = -\rho \cos \beta v^* \\ \dot{\phi} = \sin \beta v^* \\ \dot{\beta} = \sin \beta v^* - \omega \end{cases} \quad (2.67)$$

dove  $v^* = \frac{v}{\rho}$  è la nuova velocità di avanzamento lineare del veicolo ed  $\omega$  è l'usuale velocità angolare.

La candidata di Lyapunov utilizzata e la relativa derivata direzionale sono riportate di seguito:

$$\begin{cases} \mathbf{V}(\bar{q}) = \frac{1}{2}(\rho^2 + \phi^2 + \lambda\beta^2) \\ L_f \mathbf{V}(\bar{q}) = -\rho^2 \cos \beta v^* + \phi \sin \beta v^* + \lambda\beta \sin \beta v^* - \lambda\beta\omega, \end{cases} \quad (2.68)$$

dove  $\lambda > 0$  è un grado di libertà aggiuntivo a disposizione del progettista. Scegliendo i seguenti controlli:

$$\begin{cases} v^* = \cos \beta = V^*(\bar{q}) \\ \omega = \frac{\phi \sin \beta \cos \beta + \lambda\beta \sin \beta \cos \beta}{\lambda\beta} + \beta = \Omega(\bar{q}) \end{cases}, \quad (2.69)$$

si ottiene  $L_f \mathbf{V}(\bar{q})$  s.n.d. ed utilizzando ancora una volta Krosowskii–Lasalle, è possibile concludere sulla asintotica stabilità del punto di equilibrio.

Il modello dinamico del sistema è riportato di seguito:

$$\begin{cases} \dot{v} = \frac{\tau_v}{m} \\ \dot{\omega} = \frac{\tau_\omega}{I_z} \end{cases}, \quad (2.70)$$

dove, per semplicità,  $\tau_v$  e  $\tau_\omega$  sono le coppie di controllo. Il modello dinamico (2.70) necessita della trasformazione  $v \rightarrow v^*$ :

$$v = \rho v^* \rightarrow \dot{v} = \dot{\rho} v^* + \rho \dot{v}^* = -\rho \cos \beta v^{*2} + \rho \dot{v}^* \rightarrow \dot{v}^* = \frac{\tau_v}{m\rho} + \cos \beta v^{*2}. \quad (2.71)$$

Il modello dinamico complessivo sarà dunque:

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\beta} \\ \dot{v}^* \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho \cos \beta v^* \\ \sin \beta v^* \\ \sin \beta v^* - \omega \\ \frac{\tau_v}{m\rho} + \cos \beta v^{*2} \\ \frac{\tau_\omega}{I_z} \end{bmatrix}. \quad (2.72)$$

Per la stabilizzazione del modello dinamico si applichi la tecnica dell'integratore in backstepping. Si definisca la candidata di Lyapunov estesa:

$$\mathbf{V}_e(\bar{q}, v^*, \omega) = \mathbf{V}(\bar{q}) + \frac{1}{2}(v^* - V^*(\bar{q}))^2 + \frac{1}{2}(\omega - \Omega(\bar{q}))^2, \quad (2.73)$$

dove  $\Omega(\bar{q})$  e  $V^*(\bar{q})$  rappresentano le leggi di stabilizzazione nel caso cinematico (riportate in (2.69)). Due possibili leggi per le coppie di controllo a disposizione  $\tau_v$  e  $\tau_\omega$  sono:

$$\begin{cases} \tau_v = m\rho(-K_{bv}(v^* - V^*(\bar{q})) + \dot{V}^*(\bar{q}) - \frac{\partial \mathbf{V}(\bar{q})}{\partial \bar{q}} g_1(\bar{q})) \\ \tau_\omega = I_z(-K_{b\omega}(\omega - \Omega(\bar{q})) + \dot{\Omega}(\bar{q}) - \frac{\partial \mathbf{V}(\bar{q})}{\partial \bar{q}} g_2(\bar{q})) \end{cases}, \quad (2.74)$$

con  $K_{bv} > 0$  e  $K_{b\omega} > 0$  costanti di backstepping, rispettivamente per la velocità lineare ed angolare, da definire in base alle desiderate velocità di convergenza per il veicolo. Il calcolo delle coppie angolari  $\tau_v$  e  $\tau_\omega$  passa attraverso il calcolo delle derivate temporali delle rispettive leggi cinematiche di stabilizzazione  $\dot{V}^*(\bar{q})$  e  $\dot{\Omega}(\bar{q})$ , rispettivamente pari a:

$$\begin{cases} \dot{V}^*(\bar{q}) = -\sin^2 \beta v^* - \sin \beta \omega \\ \dot{\Omega}(\bar{q}) = \frac{1}{\lambda \beta^2} (\phi \beta (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) + 2\lambda \beta^2 \cos^2 \beta - \phi \sin \beta \cos \beta) \\ \quad (\sin \beta v^* - \omega) + \frac{\cos \beta \sin^2 \beta}{\lambda \beta} v^* \end{cases}. \quad (2.75)$$

Infine:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{V}(\bar{q})}{\partial \bar{q}} g_1(\bar{q}) = -\rho^2 \cos \beta + \phi \sin \beta + \lambda \beta \sin \beta \\ \frac{\partial \mathbf{V}(\bar{q})}{\partial \bar{q}} g_2(\bar{q}) = -\lambda \beta \end{cases}. \quad (2.76)$$

Si noti come in questo caso sia stata adottata la tecnica dell'integratore backstepping anche se la dinamica  $\dot{v}^*$  non sia quella di un integratore puro. Per ovviare al problema dell'aggiunta di dinamica nell'integratore, è necessario aggiungere un ulteriore termine correttivo  $\tau_{v^*} = -m\rho \cos \beta (v^*)^2$  nel calcolo della coppia di avanzamento lineare.

Sostituendo (2.75), (2.76) ed il termine correttivo  $\tau_{v^*}$  nella derivata direzionale di  $\mathbf{V}_e(\bar{q}, v, \omega)$  si ottiene:

$$\begin{aligned} L_f \mathbf{V}_e(\bar{q}, v^*, \omega) &= -\rho^2 \cos \beta v^* + \phi \sin \beta v^* + \lambda \beta \sin \beta v^* - \lambda \beta \omega \\ &\quad - K_{bv}(v^* - V^*(\bar{q}))^2 - K_{b\omega}(\omega - \Omega(\bar{q}))^2 + (\omega - \Omega(\bar{q}))\lambda \beta \\ &\quad - (v^* - V^*(\bar{q}))(-\rho^2 \cos \beta + \phi \sin \beta + \lambda \beta \sin \beta) \\ &= -\rho^2 \cos^2 \beta - \lambda \beta^2 - K_{bv}(v^* - V^*(\bar{q}))^2 - K_{b\omega}(\omega - \Omega(\bar{q}))^2 \end{aligned}, \quad (2.77)$$

dalla quale è possibile notare come si sia ottenuta la stessa derivata direzionale del caso cinematico con l'aggiunta del termine di backstepping.

Per una verifica pratica dei risultati ottenuti con la teoria di Lyapunov ed il backstepping, il controllore è stato implementato e simulato con **Simulink**. Come nel caso cinematico, si fissi la costante di guadagno  $\lambda = 1/2$  e la condizione iniziale  $q_0 = [x_0, y_0, \theta_0, v, \omega]^T = [0, 20, \frac{\pi}{2}, 10, 0]$ . Nel caso di controllo

sul modello dinamico è necessario fissare il valore delle costanti di backstepping, mediandole tra velocità di inseguimento e spesa per il controllo. Si fissi perciò  $K_{bv} = 10$  e  $K_{b\omega} = 100$ .  $m = 10$  e  $I_z = 1$  sono rispettivamente la massa ed il momento di inerzia del veicolo. Con le scelte elencate è possibile ottenere i risultati riportati in figura 2.7, in alto a sinistra. Nel secondo esempio la posizione iniziale del veicolo è  $q_0 = [x_0, y_0, \theta_0]^T = [-30, -20, 0, 0, -1]^T$  (figura 2.7, in alto a destra). Per valutare l'influenza della costante di guadagno di backstepping sulla convergenza del veicolo, nel terzo esempio la costante relativa alla velocità di avanzamento è fissata a  $K_{bv} = 100$ , valore che permette una “convergenza” del modello dinamico sul cinematico più veloce rispetto al caso precedente. Si ottiene così una traiettoria più regolare rispetto alla spirale ottenuta nell'esempio precedente (figura 2.7, in basso a sinistra). Alzando il valore della costante di guadagno di backstepping si ha un aumento della coppia  $\tau_{bv}$  generata, ottenendo però un tempo di risposta più basso (figura 2.7, in basso a destra).

Figura 2.3: Schema di controllo a struttura variabile con la scelta (2.20) per  $\Delta(t)$ .

Figura 2.4: Schema di controllo adattivo alla Craig. In verde è evidenziata la parte relativa alla integrazione della dinamica della stima  $\hat{\pi}$  dei parametri dinamici.

Figura 2.5: Schema di controllo adattivo alla Li-Slotine.

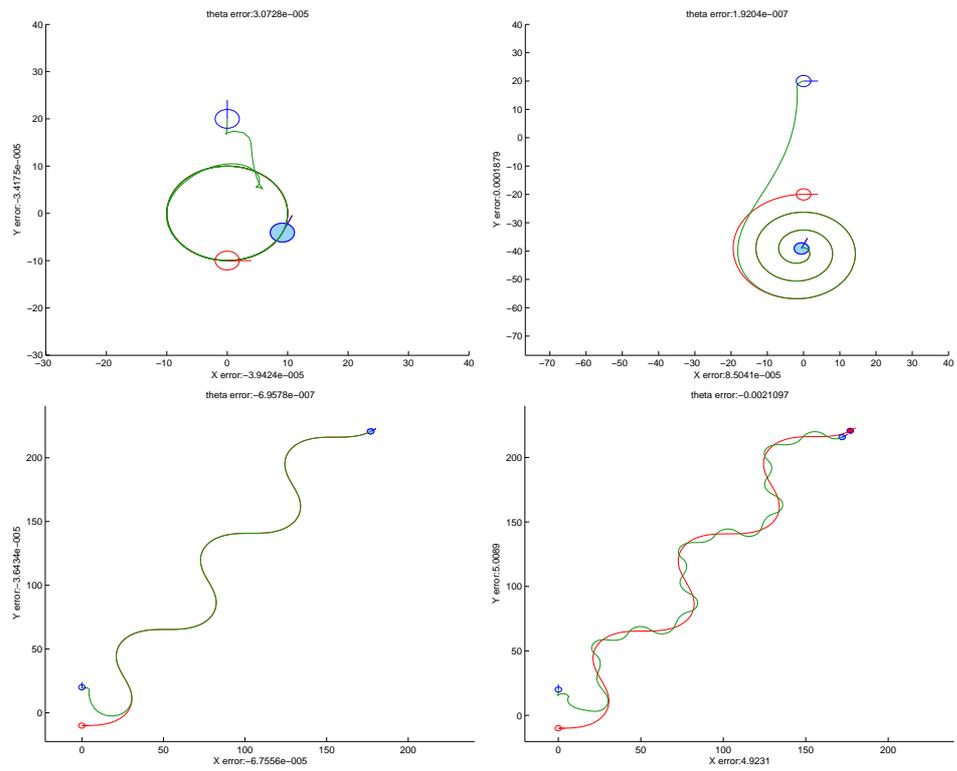


Figura 2.6: Risultati della simulazione per l'inseguimento di un uniciclo di riferimento nel caso di modello dinamico.

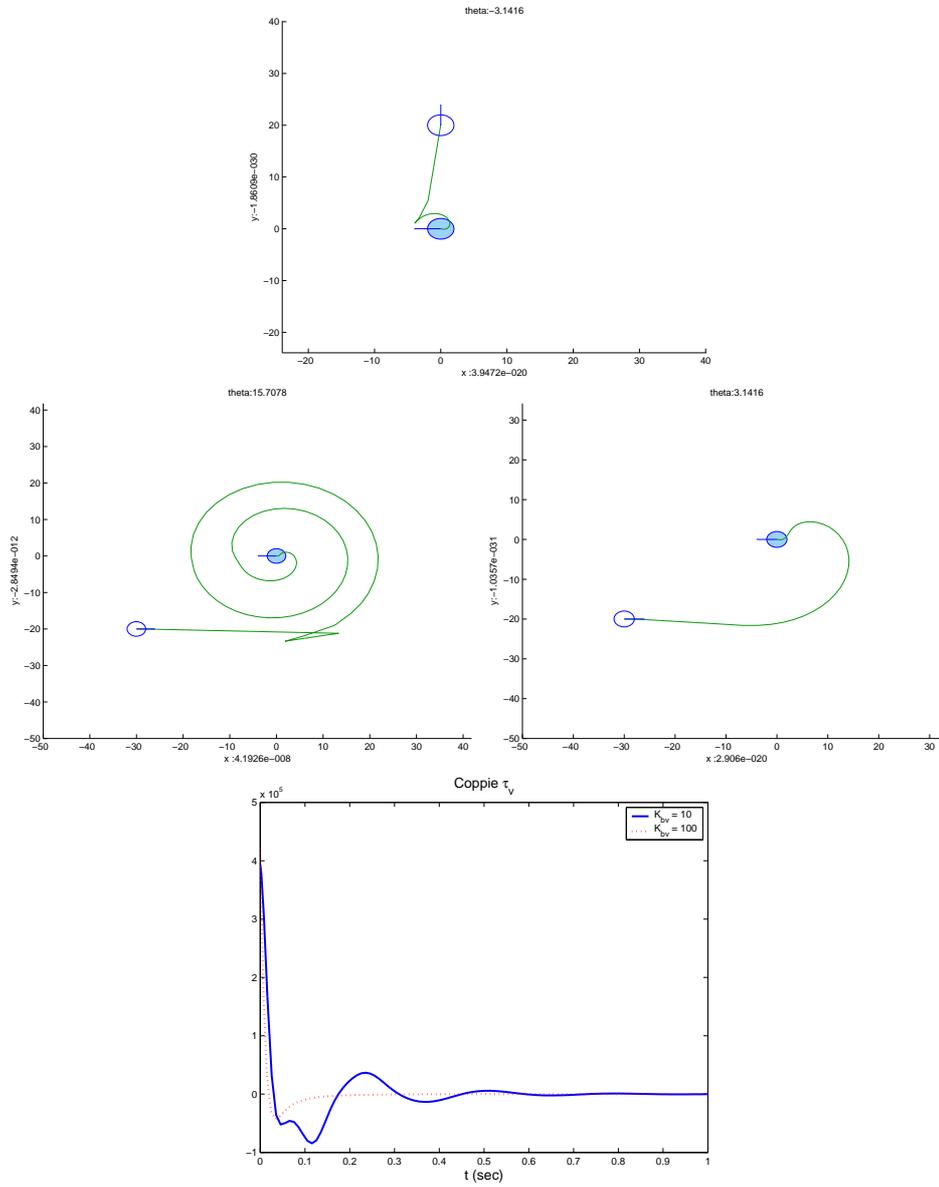


Figura 2.7: Risultati della simulazione per la stabilizzazione dell'uniciclo su un punto utilizzando il modello dinamico con  $m = 10$ , massa del veicolo, e  $I_z = 1$  momento di inerzia.



**Parte II**  
**Sistemi Nonlineari**



## 2.4 Introduzione

I sistemi reali, salvo rare eccezioni, sono sistemi non lineari. Le tecniche di studio e progetto dei sistemi di controllo studiate nei corsi elementari sono invece prevalentemente basate sullo studio di sistemi lineari.

La teoria dei controlli lineari è di enorme importanza perchè molti sistemi reali, in normale operazione attorno a condizioni nominali di equilibrio o di moto regolato, sono ben approssimabili per linearizzazione. Gli strumenti offerti da questa teoria sono così potenti da poter trattare la discrepanza dal modello lineare dando comunque sufficienti garanzie di buon funzionamento. Inoltre, la teoria lineare è la base e spesso il paradigma della teoria del controllo non lineare, che affronteremo in questa parte del corso.

Nella trattazione di sistemi non lineari si usa distinguere due diverse situazioni:

1. Si parla di **non linearità accidentali** per quei fenomeni che sono sostanzialmente perturbazioni quantitative del comportamento di un sistema dinamico che rimane peraltro qualitativamente simile a quello della sua approssimazione lineare;
2. Si dicono invece **non linearità intrinseche** quelle caratteristiche non lineari dei sistemi la cui sostituzione con una approssimazione lineare altera qualitativamente le proprietà strutturali del sistema.

I sistemi interessati da non linearità accidentali vengono trattati per lo più con tecniche di controllo lineare robusto. Un esempio di questo tipo è la estensione del criterio di stabilità di Nyquist al caso di non linearità statiche nelle componenti dell'anello di reazione, mediante opportuna modifica del criterio di non circondamento né attraversamento del punto critico con la introduzione di un cerchio critico di raggio opportuno.

Lo studio delle varie ed importanti tecniche di controllo robusto non verrà affrontato in queste note. Si tratteranno invece le non linearità intrinseche, ed alcuni metodi per la analisi e il controllo di sistemi non lineari — in particolare, sistemi meccanici utilizzati in Robotica — che non si basano su approssimazioni lineari.

## 2.5 Esistenza e unicità delle soluzioni

Mentre in un sistema dinamico lineare del tipo  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $x(t_0) = x_0$  la esistenza ed unicità di soluzioni  $x(x_0, u(\cdot), t) \in C^1$  (ovvero di funzioni continue e differenziabili con continuità soddisfacenti le condizioni iniziali) è

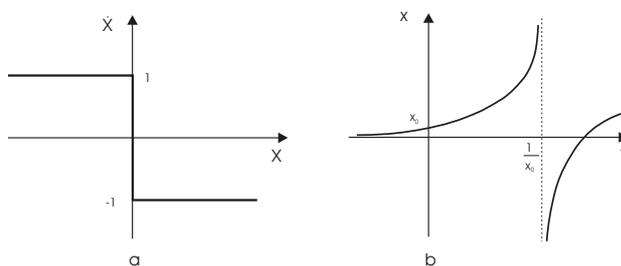


Figura 2.8: Due esempi di comportamenti peculiari dei sistemi nonlineari

ovvia, lo stesso non è vero per i sistemi nonlineari del tipo  $\dot{x} = f(x, u)$ . Si consideri ad esempio il sistema  $\dot{x} = -\text{sign}(x)$ ,  $x(0) = 0$ , con

$$-\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & x \geq 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

(vedi fig. 2.8-a) per il quale non esiste nessuna soluzione (perlomeno nel senso classico, ovvero  $C^1$ ).

Una condizione sufficiente per l'esistenza delle soluzioni di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine è data dal seguente noto

**Teorema 2.5.1** (Peano). *Sia  $f(x, t)$  una funzione continua su un sottoinsieme aperto  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , allora per l'equazione differenziale di primo ordine  $\dot{x} = f(x, t)$  con valore iniziale  $x(t_0) = x_0$ ,  $(x_0, t_0) \in D$  esiste una soluzione  $x(x_0, t)$  definita su tutto un intorno di  $t_0$ .*

La condizione è verificata per il sistema  $\dot{x} = \sqrt{|x|}$  con condizioni iniziali  $x(0) = 0$ , per il quale si hanno due soluzioni  $x(t) \equiv 0$  e  $x(t) = \frac{t^2}{4}$ .

Analogamente, per  $\dot{x} = \sqrt[3]{x}$ ,  $x(0) = 0$  si hanno tre soluzioni  $x(t) \equiv 0$  e  $x(t) = \pm \sqrt[2]{\left(\frac{2t}{3}\right)^3}$ .

Per avere esistenza e unicità sono necessarie condizioni più stringenti:

**Teorema 2.5.2** (Cauchy-Lipschitz). *Sia  $f(x, t)$  una funzione continua e Lipschitziana in  $x$  e  $t$  su un sottoinsieme aperto  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , allora per l'equazione differenziale di primo ordine  $\dot{x} = f(x, t)$  con valore iniziale  $x(t_0) = x_0$ ,  $(x_0, t_0) \in D$  esiste un'unica soluzione  $x(x_0, t)$  definita su tutto un intorno di  $t_0$ .*

Ad esempio, il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases} .$$

verifica le condizioni del teorema, ed ha una soluzione unica

$$x(x_0, t) = \frac{-x_0}{x_0 t - 1}$$

definita per tempi vicini al tempo iniziale  $t = 0$ . Si osservi però che la soluzione diverge a infinito in un tempo finito  $t_f = \frac{1}{x_0}$  (vedi fig. 2.8-b).

## 2.6 Proprietà strutturali e nonlinearità intrinseche.

Si dicono proprietà strutturali di un sistema quelle proprietà che non vengono alterate dalla particolare rappresentazione di stato utilizzata. Sono quindi proprietà strutturali per un sistema la stabilità di un equilibrio, la controllabilità e la stabilizzabilità, la osservabilità e la detettabilità.

Dato un sistema non lineare nella forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, u), \quad x(0) = x_0 \\ y &= h(x, t, u) \end{aligned}$$

e, supponendo che abbia un equilibrio in  $\bar{x}$  con ingresso  $\bar{u}$ , se ne consideri la approssimazione lineare

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + B\tilde{u} \\ \tilde{y} &= C\tilde{x} + D\tilde{u}, \end{aligned}$$

dove  $\tilde{x} = x - \bar{x}$ ,  $\tilde{u} = u - \bar{u}$ ,  $\tilde{y} = y - h(\bar{x}, \bar{u})$ , e

$$\begin{aligned} A &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}} & B &= \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}} \\ C &= \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}} & D &= \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}} \end{aligned}$$

### 2.6.1 Stabilità

Ricordiamo le relazioni tra la stabilità di un equilibrio  $\bar{x}$  di un sistema non lineare  $\dot{x} = f(x)$ , e quella della sua approssimazione lineare  $\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x}$  attorno all'equilibrio stesso:

- se  $\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x}$  è asintoticamente stabile (AS), allora  $\bar{x}$  è un equilibrio localmente AS per  $\dot{x} = f(x)$ ;

- se  $\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x}$  ha almeno un modo esponenzialmente divergente, allora l'equilibrio in  $\bar{x}$  è instabile per  $\dot{x} = f(x)$ ;

In questi casi, la proprietà strutturale della stabilità è mantenuta.

Se però  $\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x}$  non è esponenzialmente divergente, ma ha autovalori a parte reale nulla, la proprietà di stabilità può venire alterata.

Ad esempio, il sistema non lineare

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1^3 + x_2 \\ -x_2^3 \end{pmatrix}$$

è stabile nell'origine, come si può verificare con la funzione di Lyapunov

$$V = \begin{cases} x_2^2 & |x_2| \geq |x_1^3| \\ (x_2 - x_1^3)^2(x_2 + x_1^3)^2 + x_2^2 & \text{altrove.} \end{cases}$$

L'approssimazione lineare  $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  è invece instabile, e la sua soluzione

$$\begin{cases} x_2(t) = x_2(0) \\ x_1(t) = x_1(0) + x_2 t \end{cases} ,$$

diverge anche a partire da condizioni iniziali  $x_1(0), x_2(0)$  arbitrariamente vicine all'origine.

## 2.6.2 Controllabilità

Un sistema  $\dot{x} = f(x, u)$  si dice controllabile se è possibile trovare una legge di controllo  $u(t)$ ,  $t \in [0, T]$  su un intervallo di temporale di lunghezza  $T$  tale che il sistema evolva da una data condizione iniziale  $x(0)$  ad una finale  $x(T) = x_f$  arbitrariamente fissata.

Per il sistema lineare tempo invariante

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathcal{R}^n$$

la proprietà di completa controllabilità è equivalente alla condizione  $\text{rank } R = n$ , dove

$$R = [B \mid AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^{n-1}B].$$

Un criterio sufficiente di controllabilità locale per un sistema nonlineare è dato dal seguente Teorema.

**Teorema 2.6.1.** *Sia dato il sistema*

$$\dot{x} = f(x, u)$$

con equilibrio nell'origine. Se la approssimazione lineare  $\dot{x} = Ax + Bu$  è completamente controllabile, allora per ogni punto  $x_f$  in un intorno dell'origine e per ogni  $T$ , esiste un controllo  $u(t), t \in [0, T]$  tale per cui  $x(0, u(\cdot), T) = x_f$ .

Si può quindi dire che la completa controllabilità dell' approssimazione lineare implica la controllabilità locale del sistema originale, ma non è vero il viceversa. Per un sistema nonlineare controllabile, è possibile che la sua approssimazione lineare non lo sia.

Si consideri ad esempio il veicolo di tipo unicycle (fig. 2.9) nella configurazione  $q = (x \ y \ \theta)$ , ed il suo modello cinematico

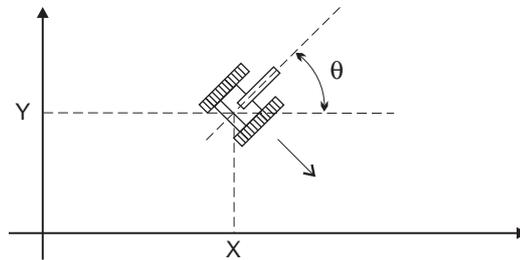


Figura 2.9: Modello “unicycle” di veicolo su ruote

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos(\theta) v \\ \dot{y} = \sin(\theta) v \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases} \quad (2.78)$$

Si noti che ogni configurazione  $\bar{q}$  è di equilibrio con ingressi nulli. Il linearizzato in  $\bar{q}$  è dato da

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial q} \right|_{\substack{q=\bar{q} \\ u=0}} = 0 ; \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{q=\bar{q} \\ u=0}} = \begin{bmatrix} \cos(\bar{\theta}) & 0 \\ \sin(\bar{\theta}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema  $\dot{z} = Bu$  non è completamente raggiungibile, infatti il sottospazio di raggiungibilità  $\mathcal{R} = \text{span} [ B : AB : A^2B ]$  ha dimensione 2. In particolare, qualunque stato che differisca dallo stato iniziale per una traslazione nella direzione dell'asse delle ruote, cioè lungo

$$\mathcal{R}^\perp = \text{span} \begin{pmatrix} -\sin(\bar{\theta}) \\ \cos(\bar{\theta}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

risulta non raggiungibile per il modello linearizzato. D'altra parte, questa conclusione risulta intuitivamente falsa per il sistema originale, in quanto il veicolo può certamente essere condotto ad una qualunque configurazione con una semplice manovra consistente in una rotazione che dirige il veicolo verso la posizione desiderata, una traslazione della distanza necessaria, ed una rotazione finale di riallineamento. Si può concludere che in questo caso la linearizzazione ha distrutto la controllabilità.

### 2.6.3 Osservabilità

Un sistema  $\dot{x} = f(x, u)$  con uscite  $y = h(x, u)$  si dice osservabile se è possibile ricostruire lo stato ignoto  $x$  a partire dalla conoscenza delle uscite  $y(t)$  in un intervallo temporale  $t \in [0, T]$ . Questa possibilità è garantita se non esistono due stati diversi che possano generare le medesime uscite, che siano cioè *indistinguibili*.

Per il sistema lineare tempo invariante

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, & x \in \mathcal{R}^n \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

la proprietà di completa osservabilità è equivalente alla condizione  $\text{rank } O = n$ , dove

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Laddove invece la matrice di osservabilità  $O$  avesse uno spazio nullo, due punti che differissero solo per un vettore in quello spazio genererebbero uscite identiche, e sarebbero perciò indistinguibili.

Un criterio sufficiente di osservabilità locale per un sistema nonlineare è dato dal seguente Teorema.

**Teorema 2.6.2.** *Sia dato il sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x, u)\end{aligned}$$

*con equilibrio nell'origine. Se la approssimazione lineare  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $y = Cx + Du$  è completamente osservabile, allora in un intorno sufficientemente piccolo dell'origine non esiste alcun punto indistinguibile.*

Si può quindi dire che la completa osservabilità dell'approssimazione lineare implica la osservabilità locale del sistema originale. Anche in questo caso, non è vero il viceversa: per un sistema nonlineare osservabile è infatti possibile che la sua approssimazione lineare non lo sia.

Si consideri ad esempio il problema di localizzare un veicolo mediante triangolazione con due traguardi ottici di posizione nota. In un sistema di

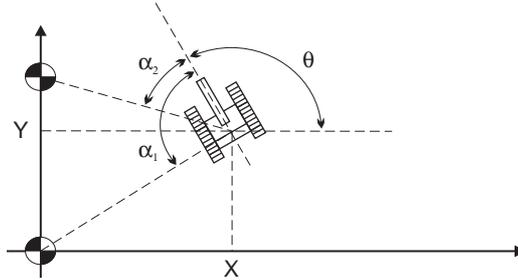


Figura 2.10: Rilevamento della configurazione mediante triangolazione

riferimento la cui origine sia posta nel primo faro, e con l'asse  $y$  allineato al secondo, posto a distanza  $a$  (vedi fig. 2.10), le misure disponibili per la triangolazione sono gli angoli sotto i quali i traguardi sono visti rispetto alla direzione di avanzamento del veicolo, cioè

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \pi - \theta + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \alpha_2 &= \pi - \theta + \arctan\left(\frac{a-y}{x}\right)\end{aligned}$$

Supponendo che il veicolo sia descritto da un modello puramente cinematico e abbia libertà completa di movimento, la sua legge di moto è

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = Aq + Bu,$$

con  $A = 0 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  e  $B = I \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Questa dinamica, assieme alla linearizzazione della equazione di uscita in un equilibrio  $\bar{q}$ ,

$$\tilde{\alpha} = Cq, \quad C = \begin{bmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & -1 \\ \frac{a-y}{x^2+(a-y)^2} & \frac{x}{x^2+(a-y)^2} & -1 \end{bmatrix} \Big|_{q=\bar{q}}$$

Il sistema linearizzato non è completamente osservabile. Infatti, la matrice di osservabilità

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$$

ha rango 2, ed il sottospazio di inosservabilità ha dimensione uno. Si noti che, se il modello del veicolo fosse quello dell'esempio precedente (2.78), si avrebbe lo stesso risultato.

D'altra parte è noto (ad esempio dalla antica pratica della triangolazione per ottenere il punto nave) che è possibile ricostruire la posizione del veicolo e la sua orientazione a partire dalle due sole misure angolari. In questo caso, pertanto, appare che la linearizzazione ha distrutto la proprietà di osservabilità del sistema nonlineare.

### 2.6.4 Stabilizzabilità

Un sistema  $\dot{x} = f(x, u)$  è detto stabilizzabile se esiste una legge di retroazione degli stati  $u = u(x)$  tale che il sistema autonomo  $\dot{x} = f(x, u(x))$  sia asintoticamente stabile.

È noto dalla teoria dei sistemi che per un sistema lineare esiste una matrice  $K$  di retroazione  $u = Kx$  che rende tutti i poli di  $A + BK$  a parte reale negativa se e solo se tutti gli autovalori di  $A$  a parte reale non negativa sono interni al sottospazio di raggiungibilità. Questo accade se per la decomposizione di Kalman

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

gli autovalori della matrice  $A_{22}$  sono a parte reale negativa.

**Teorema 2.6.3.** *Se l' approssimazione lineare di un sistema  $\dot{x} = f(x, u)$  è stabilizzabile, allora anche il sistema originale lo è mediante la stessa legge  $u(x) = Kx$ .*

Questo risultato segue direttamente dalla applicazione dei teoremi di Lyapunov al sistema  $\dot{x} = f(x, -Kx)$ .

**Teorema 2.6.4.** *Se il linearizzato è non stabilizzabile a causa della presenza di un autovalore a parte reale positiva in  $A_{22} \Rightarrow$  anche il sistema non lineare è non stabilizzabile.*

Se  $A_{22}$  ha uno o più autovalori a parte reale nulla, può esservi non linearità intrinseca.

Ad esempio, si consideri il sistema non lineare

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 u \\ \dot{x}_2 &= -x_2 u \end{aligned}$$

che, con  $\bar{u} = 0$ , ha equilibrio indifferente. Nel punto  $\bar{x}_0$ , il modello linearizzato  $\tilde{x} = A\tilde{x} + Bu$ ,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = - \begin{pmatrix} \bar{x}_{1,0} \\ \bar{x}_{2,0} \end{pmatrix},$$

ha un autovalore esterno al sottospazio di raggiungibilità nell'origine, quindi non è stabilizzabile. Peraltro, il sistema di partenza può essere facilmente stabilizzato con  $u = \text{cost} > 0$ . La linearizzazione ha quindi distrutto la proprietà strutturale di stabilizzabilità del sistema.



# Capitolo 3

## Nonlinear Systems: a Survival Kit

As observed through several examples, nonlinear systems exhibit phenomena that are unknown to linear systems, and require a specialized study. This in turn calls for a new set of mathematical tools, which very often can be regarded as generalizations of concepts already met in the study of linear systems: for instance, the geometry of vector spaces and linear algebra have to be replaced by differential geometry of manifolds and Lie algebras.

Mathematics involved in nonlinear systems theory is less familiar to students, and can be definitely challenging. However, the main ideas needed to solve many problems in Robotics are simple, and can be explained using a set of mathematical tools that are easy to grab and exploit. In these notes, we will take an utilitarian approach at the description of such tools, insisting more on the intuitive understanding of their meaning and functions, than on generality and thoroughness of arguments and proofs. The reader interested in a more complete and rigorous treatment of nonlinear systems theory is therefore referred to the abundant literature, among which we mention here the main references used to prepare these notes.

### 3.1 State Space Description

We start considering a continuous-time, finite-state nonlinear system in its most general form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x, t, u) \\ y &= h(x, t, u) \end{aligned} \tag{3.1}$$

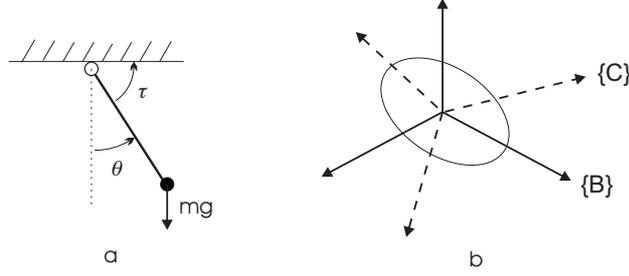


Figura 3.1: Examples of mechanical systems

and the slightly less general model (still practically ubiquitous in Robotics) of a time-invariant, strictly causal, affine-in-control nonlinear system

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Let us pause a second here to consider what are the variables considered in these equations. In a typical setting, it is assumed that the state variable  $x$  is an  $n$ -dimensional vector  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u$  is an  $m$  dimensional vector of inputs, and  $y \in \mathbb{R}^p$  is a vector of outputs.

However, many mechanical systems, and robots in particular, are not obviously described in these terms.

For instance, the configuration of a point mass in the  $\mathbb{R}^2$  plane, which is constrained to maintain a given distance from a fixed point (as e.g. the simple pendulum in fig. 3.1-a), can be described by a single angle  $\theta$ , i.e. an element of the one-dimensional sphere  $S^1$ . The dynamics of the pendulum in the vertical plane,

$$ml^2\ddot{\theta} = mgl \sin(\theta) + \tau,$$

thus involve  $\theta \in S^1$  and  $\dot{\theta}, \ddot{\theta} \in \mathbb{R}$ . However, by choosing  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \dot{\theta}$  and identifying the circle (with rotations counted) with the real line, one has  $x \in \mathbb{R}^2$  and the dynamics can be written in the state space form (3.2) as

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{g}{l} \sin x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} \tau$$

In other cases, the nonlinearity of the surface on which the system lives is not so benevolent.

### Example: Rigid-Body Rotations

Consider for instance the kinematic description of the rotations of an inertial body about a fixed point,

$$\dot{R} = S(\omega)R, \quad (3.3)$$

where  $\omega \in \mathbb{R}^3$  is the angular velocity vector and  $S(\omega)$  is the skew-symmetric matrix such that  $S(\omega)v = \omega \times v$ ,  $\forall v \in \mathbb{R}^3$ . Considering the angular velocity as input and the orientation as state, this equation is in the form  $\dot{p} = f(p, u)$ , where however  $p \in SO(3)$ . If dynamics are taken into consideration, then (3.3) has to be considered together with the Euler equation (in body-fixed coordinates)

$$J\dot{\omega} = \hat{\omega}J\omega + \tau, \quad (3.4)$$

with  $J \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  the body inertia matrix, and  $\tau$  the external applied torques. The full dynamic systems, comprised of (3.3) and (3.4), can be written again in the form  $\dot{p} = f(p, u)$ , where now  $u = \tau \in \mathbb{R}^3$  and  $p = (R, \omega) \in SO(3) \times \mathbb{R}^3$ .

In neither case, hence, can the state be globally described in a linear space, because  $SO(3)$  is not globally homeomorphic to  $\mathbb{R}^3$ . One could represent  $R \in SO(3)$  as an element of the embedding space  $\mathbb{R}^9$ , but in this case the representation is redundant: indeed, there are six scalar constraints (described by  $R^T R = I$ , and the determination  $\det R = 1$ ) that apply. Similarly for quaternions  $Q$ , which globally represent rotations in  $\mathbb{R}^4$  under the constraint  $Q^T Q = 1$ . Alternatively, orientations can be locally described by minimal representations in  $\mathbb{R}^3$ , for instance using sets of so-called Euler angles. Different minimal representations may have singularities in different configurations, and one typically has to switch from one set of angles to another when the phenomenon under study approaches a singularity for the representation in use.  $\diamond$

The example above motivates us to introduce a somewhat more general view on dynamical systems. We consider the configurations  $p$  of systems under study to live in a manifold  $M$ . If there is a dynamic evolution of the system, then the trajectory is also constrained to belong to the surface, i.e.  $p(t) \in M$ ,  $\forall t$ . Hence, at each time  $t$ , the velocity of the system  $\dot{p}(t)$  must belong to the tangent space to  $M$  at the point  $p(t)$ , which will be denoted as  $T_{p(t)}M$ .

For practical purposes relating to how computations are done, however, a description in linear state spaces such as those in (3.2) are very convenient. Under mild regularity assumptions, these can be obtained by establishing suitable coordinate systems to describe  $M$  (which might have to be only locally valid, as seen previously).

Let  $p \in M$  and  $U_M \subset M$  a neighborhood of  $p$ . Let  $\phi(\cdot) : U_M \rightarrow U_x \subset \mathbb{R}^\ell$ ,  $\phi(p) : p \mapsto x(p)$  be a diffeomorphism (that is, a smooth bijection whose inverse is also smooth): then  $(U_M, \phi)$  is called a *coordinate chart*. To cover

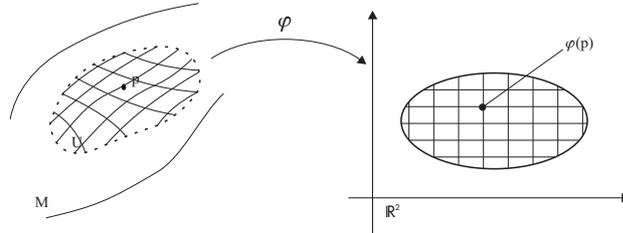


Figura 3.2: Coordinate chart on a manifold

configurations where the  $(U_M, \phi)$  coordinate chart is not applicable, we may use other charts of the type  $(V_M, \psi)$ ,  $\psi(\cdot) : V_M \rightarrow V_z \subset \mathbb{R}^\ell$ ,  $\psi(p) : p \mapsto z(p)$ . For all points in  $U_M \cap V_M$ , the homeomorphism  $\Phi = \psi \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ ,  $\Phi(x) : x \mapsto z(x)$  is a *change of coordinates*. If  $\Phi(\cdot)$  is indeed a diffeomorphism, then the two charts are said to be *compatible*. A manifold  $M$  equipped with an *atlas*, i.e. a collection of pairwise compatible charts which together can cover the whole  $M$ , is a *smooth manifold*.

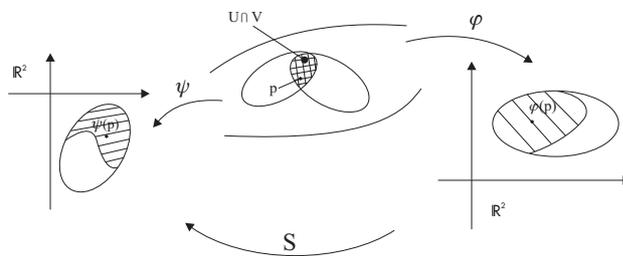


Figura 3.3: Multiple charts and coordinate changes

### 3.1.1 Coordinate changes and tangent spaces

Consider now how a vector  $v_p \in T_p M$  (which, as observed, could represent the velocity  $\dot{p}(t)$  of a point  $p(t)$  constrained to belong to  $M$ ) is represented when using local coordinates  $(U, \phi)$ . Observe that, properly speaking, the image of  $v_p \in T_p M$  under the coordinate change  $x = \phi(p)$  is a new vector  $v_x$  in  $T_x U$ : being  $U \subset \mathbb{R}^\ell$ ,  $T_x U$  is also (a copy of)  $\mathbb{R}^\ell$ , and it is sometimes

confused. The map between tangent spaces is called the *adjoint map* of  $\varphi(\cdot)$  and is denoted by  $\varphi_*(\cdot) : T_p M \rightarrow T_x U$ . One has that

$$v_x = \varphi_*(v_p) : v_p \mapsto \left. \frac{\partial \varphi(p)}{\partial p} v_p \right|_{p=\varphi^{-1}x}.$$

If two coordinate charts  $(U_1, x = \varphi_1)$  and  $(U_2, z = \varphi_2)$  are compatible through a coordinate change  $z = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x) = \Phi(x)$ , then one has similarly

$$v_z = \Phi_*(v_x) : v_x \mapsto \left. \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} v_x \right|_{x=\Phi^{-1}(z)},$$

and the inverse relation

$$v_x = \Phi_*^{-1} v_z,$$

where  $\Phi_*^{-1} = \left( \frac{\partial \Phi(z)}{\partial z} \right)_{z=\Phi(x)}^{-1}$ .

### Example: Charts on a Sphere

Consider the description of the motion of a point on a sphere: not being the sphere homeomorphic to the plane, no global description can be expected. Let for instance  $x_1$  denote the azimuth of  $p$ , and  $x_2$  its elevation with respect to the  $p_3$  axis (fig. 3.4-a), hence a local coordinate chart is defined on  $U_1 = [0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , with  $\varphi_1(\cdot) : M \rightarrow U_1$ ,

$$x = \varphi_1(p) = \begin{bmatrix} \arctan\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \\ \arctan\left(\frac{p_3}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}\right) \end{bmatrix},$$

and  $\varphi_1^{-1}(\cdot) : U_1 \rightarrow M$ ,

$$p = \varphi_1^{-1}(x) = \begin{bmatrix} \cos x_1 \cos x_2 \\ \sin x_1 \cos x_2 \\ \sin x_2 \end{bmatrix}$$

The chart is not defined at points where  $p_1 = p_2 = 0$  (the north and south  $p_3$  “poles” of the sphere). Defining  $z = (z_1, z_2)^T$  as the azimuth and elevation now with respect to  $p_1$  (fig. 3.4-b), a new coordinate chart can be defined on  $U_2 = [0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , with  $\varphi_2(\cdot) : M \rightarrow U_2$ ,

$$z = \varphi_2(p) = \begin{bmatrix} \arctan\left(\frac{p_3}{p_1}\right) \\ \arctan\left(\frac{p_2}{\sqrt{p_1^2 + p_3^2}}\right) \end{bmatrix}$$

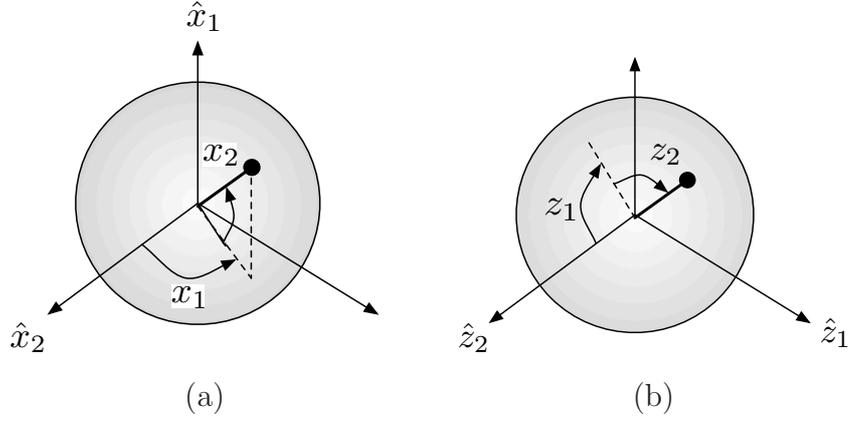


Figure 3.4: Local coordinate charts on a sphere.

and  $\varphi_2^{-1} : U_2 \rightarrow M$ ,

$$p = \varphi_2^{-1}(z) = \begin{bmatrix} \cos z_1 \cos z_2 \\ \sin z_2 \\ \sin z_1 \cos z_2 \end{bmatrix}.$$

The second chart has singularity at the  $p_1$  north and south poles only, hence the two charts together completely cover the sphere. A coordinate transform is defined between the charts in all points where both are defined as with  $\Phi(\cdot) = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : U_1 \rightarrow U_2$ ,

$$\Phi(x) : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \arctan\left(\frac{\sin x_2}{\cos x_1 \cos x_2}\right) \\ \arctan\left(\frac{\sin x_1 \cos x_2}{\sqrt{\cos^2 x_1 \cos^2 x_2 + \sin^2 x_2}}\right) \end{bmatrix}.$$

Analogously,  $x = \Phi^{-1}(z)$  with  $\Phi = (\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})(z)$ . Both  $\Phi(\cdot)$  and  $\Phi^{-1}(\cdot)$  are smooth, hence the two charts are compatible and form an atlas for the sphere, which is a smooth manifold.

The computation of the adjoint maps are straightforward derivation exercises. For instance, one can write

$$\begin{aligned} v_x &= \varphi_{1*} v_p \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{p_2}{p_1^2+p_2^2} & \frac{p_1}{p_1^2+p_2^2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{p_1^2+p_2^2}}{p_1^2+p_2^2+p_3^2} p_1 p_3 & -\frac{\sqrt{p_1^2+p_2^2}}{p_1^2+p_2^2+p_3^2} p_2 p_3 & -\frac{\sqrt{p_1^2+p_2^2}}{p_1^2+p_2^2+p_3^2} \end{bmatrix}_{p=\phi_1^{-1}(x)} v_p \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{\sin x_1}{\cos x_2} & \frac{\cos x_1}{\cos x_2} & 0 \\ -\cos x_1 \sin x_2 \cos^2 x_2 & -\sin x_1 \sin x_2 \cos^2 x_2 & 1 \end{bmatrix} v_p \end{aligned}$$

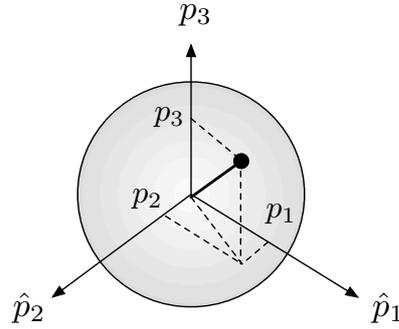


Figura 3.5: Point moving on a sphere.

◇

### Example: Dynamics on the Sphere

We would now like to describe the motion of an inertial point  $p$  of mass  $m$  moving in  $\mathbb{R}^3$  keeping a fixed distance  $R$  from the origin (fig. 3.5), or in other terms  $p(t) \in M$ ,  $M = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid p^T p = R^2\}$ . Consider the system subject to its weight, and let  $G = [0, 0, mg]^T$ . The dynamic equations can be written, taking the constraint into account, as

$$\begin{aligned} B\ddot{p} + A^T(p)\lambda + G &= \\ A(p)\ddot{p} + \dot{A}(p)\dot{p} &= 0, \end{aligned}$$

where  $B = mI_3$ ,  $A(p) = p^T$ . Solving the equations in the lagrangian multipliers  $\lambda$ ,

$$\lambda = \frac{1}{p^T p} (m \dot{p}^T \dot{p} - p^T G),$$

from which

$$\ddot{p} = -\frac{\dot{p}^T \dot{p}}{p^T p} p - \left[ I_3 - \frac{p p^T}{p^T p} \right] \frac{1}{m} G.$$

Hence, the dynamics can be globally described in the form (3.2) by a state  $\xi \in \mathbb{R}^6$  with  $\xi = (\xi_1, \xi_2) = (p, \dot{p})$  as

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_2 \\ -\frac{\xi_2^T \xi_2}{\xi_1^T \xi_1} \xi_1 \end{bmatrix} - \left[ \left( I_3 - \frac{\xi_1 \xi_1^T}{\xi_1^T \xi_1} \right) \frac{1}{m} F \right] u$$

where the gravity vector  $G$  has been replaced for generality by a force of direction  $F$  and intensity  $u$ . From the discussion above, it is to be expected that

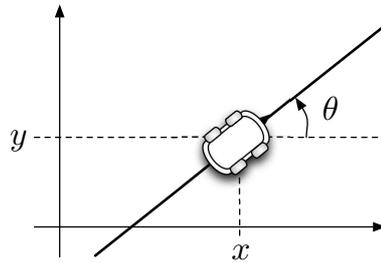


Figura 3.6: Schematizzazione di un carrello vincolato a muoversi su una rotaia rettilinea.

the evolution of this system will be actually confined in a lower dimensional manifold than  $\mathbb{R}^6$  (namely, of of dimension 4). Although the description of the dynamics in the embedding linear space  $\mathbb{R}^6$  is very convenient, equivalent descriptions in the coordinate charts  $(U_i, \varphi_i)$  introduced above can be easily obtained, and is left for exercise.  $\diamond$

As an application of coordinate changes, consider the dynamic system

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x)u \quad x \in U_1 \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m$$

and the diffeomorphism  $z = \Phi(x)$ . In the new coordinates, the system becomes

$$\dot{z}(t) = \left( \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} (f(x) + g(x)u) \right) \Big|_{x=\Phi^{-1}(z(t))} = f'(z) + g'(z)u.$$

Coordinate changes play a crucial role in nonlinear system analysis, just as they do in linear systems. A first useful result from analysis is the following.

**Theorem 2** (Rectification). *Let  $f(x)$  be a smooth vector field on  $\mathbb{R}^n$  and  $f(0) \neq 0$ . Then there exist a coordinate chart  $(U \ni 0, z = \varphi)$  such that, on  $U$ ,  $f'(z)$  is a constant vector field.*

As a corollary, under the same conditions it is possible to choose coordinates such that  $f'(z) = (1, 0, \dots, 0)^T$  or any other direction in  $\mathbb{R}^n$

### Example: Constraint Rectification

Consider the chart on a rail in fig. 3.6, and let  $(x, y, \theta) = (x_1, x_2, x_3)$  denote its coordinates. The kinematic model is

$$\dot{x} = g(x)u = \begin{bmatrix} \cos x_3 \\ \sin x_3 \\ 0 \end{bmatrix} u,$$

Being  $g(0) = (1, 0, 0)^T \neq 0$ , there exists a coordinate change  $z = \Phi(x)$  for which

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

To obtain it explicitly, we have to solve the set of partial differential equations

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \cos x_3 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \sin x_3 = 0, \\ \dot{z}_2 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \cos x_3 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \sin x_3 = 0, \\ \dot{z}_3 = \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} \cos x_3 + \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} \sin x_3 = 1. \end{cases}$$

A solution is given by

$$\begin{aligned} z_1 &= \Phi_1(q) = x_3, \\ z_2 &= \Phi_2(q) = x \sin x_3 - y \cos x_3, \\ z_3 &= \Phi_3(q) = x \cos x_3 + y \sin x_3, \end{aligned}$$

as is easily verified by substitution

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \dot{x}_3 = 0, \\ \dot{z}_2 = x \dot{x}_3 \cos x_3 + \dot{x} \sin x_3 + y \dot{x}_3 \sin x_3 - \dot{y} \cos x_3 = \dot{x} \sin x_3 - \dot{y} \cos x_3 = 0, \\ \dot{z}_3 = -x \dot{x}_3 \sin x_3 + \dot{x} \cos x_3 + y \dot{x}_3 \cos x_3 + \dot{y} \sin x_3 = \dot{x} \cos x_3 + \dot{y} \sin x_3 = 1, \end{cases}$$

The new variables have direct physical meaning,  $z_1$  being the  $\theta$  angle,  $z_2$  the distance from the rail, and  $z_3$  the abscissa along the rail (cf. fig. 3.7).  $\diamond$

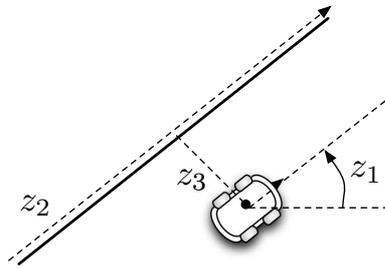


Figura 3.7: A cart on a rail.

The following result generalizes the rectification theorem to multiple vector fields.

**Theorem 3** (Simultaneous Rectification). *Let  $f_1(x), \dots, f_r(x)$  be a set of  $r < n$  vector fields on  $\mathbb{R}^n$  which are linearly independent at  $x = 0$ . Then there exist a coordinate chart  $(U \ni 0, z = \varphi(x))$  such that, on  $U$ ,  $f'_j(z)$ ,  $j = 1, \dots, r$  are constant independent vector fields if, and only if, the vector fields commute, i.e.*

$$\frac{\partial f_j(x)}{\partial x} f_i(x) - \frac{\partial f_i(x)}{\partial x} f_j(x) = 0, \quad i, j = 1, \dots, r. \quad (3.5)$$

Obviously, when the theorem holds it is also possible to choose coordinates such that  $f'_i(z) = e_i$  (the  $i$ -th column of the identity matrix  $I_n$ ).

## 3.2 Analysis tools

Considering again system (3.2)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x), \end{aligned}$$

we are interested in studying its structural properties. For simplicity, we will restrict to the study of local properties, which can be studied through the tools of elementary analysis. Although not strictly necessary, to simplify arguments we will often use the assumption that functions we deal with are *analytic* (or  $C^\omega$ ), i.e. their values in a domain containing a point  $p$  can be evaluated through their Taylor expansion in  $p$  — or, in other terms, all information on the function over the domain is contained in the derivatives of the function evaluated in  $p$ .

### 3.2.1 Functions, Vectors and Covectors

In the treatment of system (3.2), we will encounter three main objects:

- **Scalar functions of the state** of the type

$$\begin{aligned} \lambda : M &\rightarrow C^\omega \\ p &\mapsto \lambda(p) \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad ,$$

or, in coordinates  $x = \varphi(p)$ ,

$$\begin{aligned} \lambda : \mathbb{R}^n &\rightarrow C^\omega \\ x &\mapsto \lambda(x) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Examples of scalar functions of the state encountered in the study of robotic systems are i) an output function  $h_i(x)$  in (3.2); ii) a holonomic constraint on the configurations  $q$  of the type  $C(q)$ , and iii) a candidate Lyapunov function  $V(x)$ .

- A **vector field** associates to a point in a manifold  $M$  a vector of the tangent space to  $M$  at  $p$ ,  $T_pM$ , e.g.

$$\begin{aligned} f : M &\rightarrow TM \\ p &\mapsto f(p) \end{aligned}$$

where  $TM = \{(p, T_pM) | p \in M\}$  denotes the *tangent bundle* to  $M$ . If one thinks of differentiable functions on the manifold,  $p(s) : \mathbb{R} \rightarrow M$ , then the tangent bundle can be characterized as the space of all derivatives  $\frac{dp(s)}{ds}$ .

In coordinates  $x = \varphi(p)$ , a vector field is represented by a column vector of functions, e.g.

$$f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}.$$

Notice that, although in coordinates the domain and codomain of vector fields are both  $\mathbb{R}^n$ , their nature is completely different<sup>1</sup>. A classical illustration of 2D vector fields is the “quiver plot” (fig. 3.8). In a dynamical system represented by the ordinary differential equation (ODE)

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0,$$

the vector field  $f(x)$  represents the velocity vector associated with the solution  $x(x_0, t)$ . The traditional graphical method of *isoclines* to depict solutions of 2D ODEs traces trajectories which are everywhere tangent to the  $f(x)$  vector field (see fig. 3.8). In the dynamical system (3.2), the vector  $f(x)$  is called the *drift* vector field, while the  $i$ -th column of  $g(x)$ ,  $g_i(x)$ , is the *control* vector field associated to the  $i$ -th control  $u_i$ .

- A **covector field** (or *one-form*) associates to a point in a manifold  $M$  a covector of the cotangent space to  $M$  at  $p$ ,  $T_p^*M$ , e.g.

$$\begin{aligned} \omega : M &\rightarrow T^*M \\ p &\mapsto \omega(p) \end{aligned}$$

where  $T^*M = \{(p, T_p^*M) | p \in M\}$  denotes the cotangent bundle to  $M$ . The cotangent bundle can be described as the space of all applications

---

<sup>1</sup>If the domain is a set of points, the codomain is a set of velocities, hence vectors. Recall that differences of points are vectors, but the sum of a point and a vector has no physical sense.

(a) (b) (c)

Figura 3.8: Graphical representations of vector fields: (a) A vector field on the sphere  $M = S^2$ ; (b) The vector field  $f(x) = [\sin x_2, \sin x_1]^T$  on  $\mathbb{R}^2$ ; (c) The method of isoclines on a 2D vector field (c), with vector field in black, isoclines in blue, and trajectories in red. (*Images from Wikipedia*)

that take a vector field and give a scalar function. The application is often denoted with  $\langle \cdot, \cdot \rangle: T^*M \times TM \rightarrow C^\omega$ ,  $(\omega(p) \in T_p^*M, f(p) \in T_pM) \mapsto \langle \omega(p), f(p) \rangle \in \mathbb{R}$ .

In coordinates  $x = \varphi(p)$ , a covector field is represented by a row vector of functions, e.g.

$$\omega : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \omega(x) = [ \omega_1(x) \quad \cdots \quad \omega_n(x) ] \in \mathbb{R}^{1 \times n},$$

so that one can conveniently write

$$\langle \omega(x), f(x) \rangle = \sum_{i=1}^n \omega_i(x) f_i(x) = \omega(x) f(x)$$

with the usual row-by-column product rule.

Examples of covector fields encountered in the study of robotic systems are i) the gradient (aka *differential*) of a scalar function  $V(x)$

$$dV(x) \stackrel{def}{=} \frac{\partial V(x)}{\partial x} = \left[ \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \right],$$

and ii) a kinematic constraint on a system described by configurations  $q \in \mathbb{R}^n$ , e.g.  $A(q) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  with  $A(q)\dot{q} = 0$ .

### 3.2.2 Operations on Functions, Vectors and Covectors

It will be useful to describe how scalar, vector and covector functions vary along the trajectories followed by a system. Hence we define the following

operators, representing the directional derivatives of the different objects along a vector field. For simplicity, we will only refer to descriptions in coordinates.

- The directional derivative of a scalar function  $\lambda(x)$  along a vector field  $f(x)$  is a scalar function denoted as  $L_f\lambda(x)$  and defined as

$$L_f\lambda(x) = d\lambda f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} f_i(x)$$

- The directional derivative of a vector field  $g(x)$  along a vector field  $f(x)$  is a vector field denoted as  $L_f g(x)$  and defined as

$$L_f g(x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x).$$

This operator is more often denoted as  $[f(x), g(x)]$  and referred to as the *Lie bracket* of  $f$  and  $g$ . The alternative notation  $ad_f g(x)$  is also often used.

- The directional derivative of a covector field  $\omega(x)$  along a vector field  $f(x)$  is a covector field denoted as  $L_f\omega(x)$  and defined as

$$L_f\omega = f^T \left[ \frac{\partial \omega^T}{\partial x} \right]^T + \omega \frac{\partial f}{\partial x}.$$

The operators above have some notable properties, which can be easily verified directly as an exercise:

- All operators are linear in all their arguments:  $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  it holds

$$L_{\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2} \lambda(x) = \alpha_1 L_{f_1} \lambda(x) + \alpha_2 L_{f_2} \lambda(x); \quad (3.6)$$

$$L_f (\alpha_1 \lambda_1(x) + \alpha_2 \lambda_2(x)) = \alpha_1 L_f \lambda_1(x) + \alpha_2 L_f \lambda_2(x); \quad (3.7)$$

$$[\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g_1] = \alpha_1 [f_1, g_1] + \alpha_2 [f_2, g_1]; \quad (3.8)$$

$$[f_1, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2] = \alpha_1 [f_1, g_1] + \alpha_2 [f_1, g_2]; \quad (3.9)$$

$$L_{\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2} \omega(x) = \alpha_1 L_{f_1} \omega(x) + \alpha_2 L_{f_2} \omega(x); \quad (3.10)$$

$$L_f (\alpha_1 \omega_1(x) + \alpha_2 \omega_2(x)) = \alpha_1 L_f \omega_1(x) + \alpha_2 L_f \omega_2(x); \quad (3.11)$$

- The Lie bracket is anti-commutative:

$$[f, g] = -[g, f]; \quad (3.12)$$

- For second-order Lie brackets of three vector fields, the Jacobi identity holds:

$$[f, [g, h]] + [h, [f, g]] + [g, [h, f]] = 0; \quad (3.13)$$

- The differential of a Lie derivative and the Lie derivative of a differential commute:

$$L_f d\lambda = dL_f\lambda; \quad (3.14)$$

- A Liebnitz-type formula applies

$$L_f(\omega(x)g(x)) = (L_f\omega(x))g(x) + \omega(x)[f(x), g(x)]; \quad (3.15)$$

- The Lie derivative of a covector field along a Lie bracket “distributes”:

$$L_{[f,g]}\lambda(x) = L_fL_g\lambda(x) - L_gL_f\lambda(x) \quad (3.16)$$

### Example: Linear fields

For  $x \in \mathbb{R}^n$ , let

$$\begin{aligned} f(x) &= Ax, & A &\in \mathbb{R}^{n \times n} \\ g(x) &= B, & B &\in \mathbb{R}^{n \times 1} \\ h(x) &= cx, & c &\in \mathbb{R}^{1 \times n} \end{aligned}$$

one has

$$\begin{aligned} [f, g] &= \frac{\partial g}{\partial x}f - \frac{\partial f}{\partial x}g = -AB \\ [f, [f, g]] &= A^2B \\ ad_f^k g &= (-1)^k A^k B, \quad k > 0 \\ dh &= c \\ L_f dh &= f^T \left( \frac{\partial dh^T}{\partial x} \right)^T + dh \frac{\partial f}{\partial x} = dL_f h = cA \\ L_f^k dh &= cA^k \end{aligned}$$

The Lie bracket of two linear vector fields is a linear vector field,

$$[Ax, Bx] = (BA - AB)x$$

which is null iff  $A$  and  $B$  commute.

### Example: Single Wheel Constraint

With reference to the single wheel model (1.4), let

$$g_1(q) = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g_2(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

One has

$$\begin{aligned}
[g_1, g_2] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} g_1 - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & \cos(\theta) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\theta) \\ -\cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}, \\
[g_1, [g_1, g_2]] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos(\theta) \\ 0 & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & \cos(\theta) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(\theta) \\ -\cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \\
[g_2, [g_1, g_1]] &= 0,
\end{aligned}$$

while

$$\begin{aligned}
[g_2, [g_1, g_2]] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos(\theta) \\ 0 & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \\
[g_2, [g_2, g_1]] &= -[g_2, [g_1, g_2]] \\
[g_1, [g_2, g_2]] &= 0,
\end{aligned}$$

thus verifying Jacobi's identity.

### 3.2.3 Distributions and Codistributions

Given a number  $d$  of vector fields  $g_1(p), \dots, g_d(p)$  in  $p \in M$ , let

$$\Delta_p = \text{span} \{g_1(p), \dots, g_d(p)\} \subset T_p M$$

denote the linear subspace spanned by their combinations. The collection of these subspaces  $\Delta(p) = \{(p, \Delta_p) | p \in M\} \subset TM$  is called the *distribution* on  $M$  generated by the vector fields  $g_i(p)$ .

In coordinates, one writes

$$\Delta(x) = \text{span} \{g_1(x), \dots, g_d(x)\} = \mathcal{R}_c G(x),$$

where  $\mathcal{R}_c G(x)$  denotes the (column) range (or column space, or left image) of the matrix whose columns are the vector fields. Explicitly,

$$\begin{aligned}
\Delta(x) &= \mathcal{R}_c G(x) = \mathcal{R}_c [g_1(x), \dots, g_m(x)] \\
&= \left\{ (x, g(x)) \in TM \mid g(x) = \sum_{i=1}^d \alpha_i(x) g_i(x), \alpha_i(x) \in C^\omega, i = 1, \dots, d \right\}
\end{aligned}$$

Analogously, given  $r$  covector fields  $\omega_1(p), \dots, \omega_r(p)$  in  $p \in M$ , define

$$\Omega_p = \text{span} \{\omega_1(p), \dots, \omega_r(p)\} \subset T_p^* M$$

as the linear subspace spanned by their combinations. The collection of these subspaces  $\Omega(p) = \{(p, \Omega_p) | p \in M\} \subset T^*M$  is the *codistribution* on  $M$  generated by the covector fields  $\omega_i(p)$ . In coordinates, one has

$$\Omega(x) = \text{span} \{ \omega_1(x), \dots, \omega_r(x) \} = \mathcal{R}_r O(x),$$

where  $\mathcal{R}_r O(x)$  denotes the row range (or row space, or right image) of the matrix whose rows are the covector fields. Explicitly,

$$\begin{aligned} \Omega(x) &= \mathcal{R}_r O(x) = \mathcal{R}_r \begin{bmatrix} \omega_1(x) \\ \vdots \\ \omega_r(x) \end{bmatrix} \\ &= \{ (x, \omega(x)) \in T^*M \mid \omega(x) = \sum_{i=1}^r \beta_i(x) \omega_i(x), \beta_i(x) \in C^\omega, i = 1, \dots, r \} \end{aligned}$$

The *dimension* of a distribution  $\dim \Delta(p)$  is the number of linearly independent vector fields in  $\Delta(p)$ ; if  $M$  is an  $n$ -dimensional manifold, then  $n - d$  is the co-dimension of  $\Delta(p)$ . In coordinates, this corresponds to the rank of the associated matrix, i.e. (in the notation used above)  $\dim \Delta(x) = \text{rank } G(x)$ . A distribution is *regular* at a point if there exists a neighborhood of the point where its dimension is constant, and is said to be regular on a set if it is regular everywhere in the set; a point that is not regular is a *singularity* for the distribution. The notions of dimension and regularity extend to codistributions straightforwardly.

A covector field  $\omega$  and a vector field  $f$  are said to annihilate each other if their product is identically zero, i.e.  $\omega f \equiv 0, \forall p \in M$ .

A covector field  $\omega$  annihilates a distribution  $\Delta$  if it annihilates all vectors in  $\Delta$ . The codistribution of all covector fields annihilating  $\Delta(x)$  is called the *annihilator*, denoted as  $\Delta^\perp$ . In coordinates,  $\Delta^\perp = \{ \omega(x) \mid \omega(x)G(x) \equiv 0 \}$ . Hence, if  $N_l(G(x))$  is a basis of the left nullspace of  $G(x)$ ,  $\Delta^\perp(x) = \mathcal{R}_r N_l(G(x))$ .

Similarly for a vector field  $f$  annihilating a codistribution  $\Omega$ , with  $O(x)f(x) \equiv 0$  in coordinates. The annihilator of a codistribution  $\Omega$  is a distribution  $\Omega^\perp$ . In coordinates,  $\Omega^\perp = \{ f(x) \mid O(x)f(x) \equiv 0 \}$ . If  $N(O(x))$  is a basis of the nullspace of  $O(x)$ ,  $\Omega^\perp(x) = \mathcal{R}_c N(O(x))$ .

By definition,  $(\Delta^\perp)^\perp = \Delta$ , and  $(\Omega^\perp)^\perp = \Omega$ . At any point in  $M$ , from the fundamental theorem of linear algebra, the sum of the dimensions of a distribution and its annihilator is equal to the the dimension of  $M$ , i.e.  $\dim \Delta + \dim \Delta^\perp = n$  (and obviously  $\dim \Omega + \dim \Omega^\perp = n$ ). If a distribution (codistribution) is nonsingular at a point, also its annihilator is nonsingular at that point.

### 3.2.4 Operations on Distributions and Codistributions

An operation of differentiation along a vector field can be applied to all vector fields in a distribution or codistribution, and the results form again a distribution or codistribution. If differentiation is applied along all vector fields in a distribution, the collection of results is again a distribution or codistribution. To denote such operations, we write

$$\begin{aligned} [\Delta_a, \Delta_b] &= \{v \in TM \mid v = [f_a, f_b], f_a \in \Delta_a, f_b \in \Delta_b\}, \\ L_\Delta \Omega &= \{w \in T^*M \mid w = L_f \omega, f \in \Delta, \omega \in \Omega\}. \end{aligned}$$

It is important to note that, although differentiation should be considered along all the infinite vector fields in  $\Delta$ , if  $\Delta$  is nonsingular at a point where it has dimension  $d$ , then it is sufficient to differentiate along a set of  $d$  vector fields forming a basis for  $\Delta$  in a neighborhood of the point, and use the results as a basis for the distribution or codistribution.

A distribution is said *involutive* if the Lie bracket between any of its vector fields remains in the distribution: in formulas,  $\Delta$  is involutive iff  $[\Delta, \Delta] \subseteq \Delta$ . The *involutive closure* of a distribution  $\Delta(x)$  is the smallest involutive distribution containing  $\Delta$ .

#### Examples

Any distribution generated by constant vector fields is trivially involutive. Also distributions generated by a single vector field, e.g.  $\Delta(x) = \text{span} \{g(x)\}$  are involutive, as indeed

$$[\alpha(x)g(x), \beta(x)g(x)] = (\beta L_g \alpha + \alpha L_g \beta)g(x) \in \Delta$$

The distribution associated with the single wheel model (3.17),

$$\Delta(x) = \text{span} \{g_1(x), g_2(x)\}$$

is not involutive. However,

$$\Delta'(x) = \text{span} \{g_1, g_2, [g_1, g_2]\} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

is involutive (indeed  $\Delta'(x)$  has everywhere dimension 3, which is the dimension of  $TM$ ), hence  $\Delta'$  is the involutive closure of  $\Delta$ .  $\diamond$

A distribution  $\Delta_a$  is said to be invariant with respect to a second distribution  $\Delta_b$ , or  $\Delta_b$ -invariant, if  $[\Delta_a, \Delta_b] \subseteq \Delta_a$ . Analogously, a codistribution

$\Omega$  is  $\Delta$ -invariant, if  $L_\Delta\Omega \subseteq \Omega$ . A distribution which is invariant with respect to itself is said *involutive*.

Given two distributions  $\Delta_0$  and  $\Delta$ , it is interesting to determine the smallest  $\Delta$ -invariant distribution which contains  $\Delta_0$  (denoted  $\langle \Delta, \Delta_0 \rangle$ ). To do so, consider the following *filtration* of distributions,

$$\begin{aligned} \Delta_0 \\ \Delta_1 &= \Delta_0 + [\Delta_0, \Delta] \\ \dots &= \dots \\ \Delta_k &= \Delta_{k-1} + [\Delta_{k-1}, \Delta], \end{aligned}$$

where the “+” symbol is understood as a cartesian product, yielding the distribution spanned by the addends.

Along the filtration, the dimension of  $\Delta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  is non-decreasing, and is upper bounded by the dimension of the space,  $n$ . If for some  $k$ ,  $\Delta_k$  is nonsingular at a point  $\bar{x}$  and  $\dim \Delta_k(\bar{x}) = \dim \Delta_{k+1}(\bar{x})$ , the filtration stops, and  $\langle \Delta, \Delta_0 \rangle = \Delta_k$  (at least in an open set containing  $\bar{x}$ ).

As a particular case, the involutive closure of a distribution  $\Delta$  is the smallest  $\Delta$ -invariant distribution containing  $\Delta$  itself, i.e.  $\langle \Delta, \Delta \rangle$ .

In a similar fashion, given a codistribution  $\Omega_0$  and a distribution  $\Delta$ , to find the smallest  $\Delta$ -invariant codistribution which contains  $\Omega_0$  (denoted  $\langle \Delta, \Omega_0 \rangle$ ), consider the filtration of codistributions

$$\begin{aligned} \Omega_0 \\ \Omega_1 &= \Omega_0 + L_\Delta\Omega_0 \\ \dots &= \dots \\ \Omega_k &= \Omega_{k-1} + L_\Delta\Omega_{k-1}. \end{aligned}$$

The dimension of  $\Omega_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  is non-decreasing, and is upper bounded by  $n$ . If for some  $k$ ,  $\Omega_k$  is nonsingular at a point  $\bar{x}$  and  $\dim \Omega_k(\bar{x}) = \dim \Omega_{k+1}(\bar{x})$ , the filtration stops, and  $\langle \Delta, \Omega_0 \rangle = \Omega_k$  (at least in an open set containing  $\bar{x}$ ).

### 3.2.5 Integrability

## 3.3 Reachability

Una distribuzione di controllo può però non contenere *tutte* le possibili direzioni di moto. Si consideri ad esempio il modello cinematico di un unicycle. La distribuzione dei vettori di controllo è

$$\Delta(x) = \text{span} \left\{ \begin{array}{cc} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\}$$

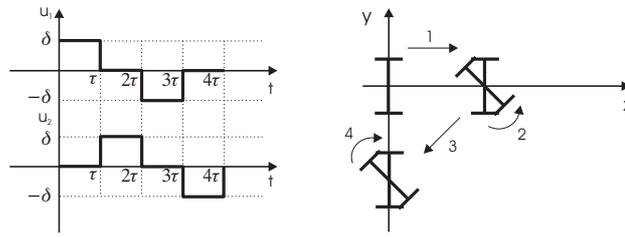


Figura 3.9: Veicolo su due ruote

ed è ovviamente regolare ovunque, con dimensione 2, codimensione 1. Le direzioni di moto rese possibili dai vettori appartenenti alla distribuzione di controllo coincidono con quelle possedute dal modello linearizzato approssimato nel punto considerato.

Si pensi ora di applicare ingressi della forma riportata in figura a partire dalla configurazione  $q_0 = (x = 0, y = 0, \theta = 0)$ .

Integrando le equazioni cinematiche

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2$$

si ottiene facilmente

$$\begin{cases} x(\tau) = \delta\tau \\ y(\tau) = 0 \\ \theta(\tau) = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x(2\tau) = \delta\tau \\ y(2\tau) = 0 \\ \theta(2\tau) = \delta\tau \end{cases} ; \begin{cases} x(3\tau) = -\sin(\delta\tau) + \delta\tau \\ y(3\tau) = \cos(\delta\tau) - 1 \\ \theta(3\tau) = \delta\tau \end{cases}$$

e infine

$$\begin{cases} x(4\tau) = -\sin(\delta\tau) + \delta\tau \\ y(4\tau) = \cos(\delta\tau) - 1 \\ \theta(4\tau) = 0 \end{cases}$$

Consideriamo ora il caso di piccoli ingressi e/o intervalli temporali  $\tau$  brevi, così che  $\delta\tau \rightarrow 0$ . Sviluppando in serie di Taylor fino al secondo ordine si ha:

$$\begin{cases} x(4\tau) = 0 + [(1 - \cos(\delta\tau))\delta\tau]_{\delta\tau=0} + \frac{\delta^2\tau^2}{2}[\sin \delta\tau]_{\delta\tau=0} + O(\delta^3\tau^3) = O(\delta^3\tau^3) \\ y(4\tau) = 0 + [-\sin(\delta\tau)]_{\delta\tau=0}\delta\tau + \frac{\delta^2\tau^2}{2}[-\cos(\delta\tau)]_{\delta\tau=0} + O(\delta^3\tau^3) = -\frac{\delta^2\tau^2}{2} + O(\delta^3\tau^3) \end{cases}$$

Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al secondo è possibile vedere che, pur localmente (cioè con moti arbitrariamente piccoli), il movimento risultante del veicolo è stato nella direzione del vettore

$$\begin{bmatrix} x(4\tau) \\ y(4\tau) \\ \theta(4\tau) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ \theta(0) \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

che **non** risulta contenuto in  $\Delta(x(0))$ :

$$\Delta(x_0) = \text{span} \left[ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right]$$

Osserviamo — per ora solo incidentalmente — che la direzione del moto in cui è evoluto il sistema all'istante  $4\tau$  è invece contenuta in

$$[g_1, g_2] = \begin{bmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}_{(0,0,0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ci chiediamo, più generalmente, se da un punto  $x_0$  possiamo muoverci lungo direzioni non contenute in  $\Delta(x_0)$ . Questo è possibile come visto nell'esempio: l'idea base è quella di scegliere opportune combinazioni degli ingressi  $u_1, \dots, u_m$  in modo da *commutare* i campi vettoriali  $g_1, \dots, g_m$  (vedi figura).

Si osservi il fatto importante che il moto nella direzione della Lie bracket, esterna al sottospazio di raggiungibilità del sistema linearizzato, è stato ottenuto senza allontanarsi da un intorno del punto iniziale, ed infatti risulta da una analisi locale.

L'osservazione fatta nell'esempio dell'uniciclo ha valore più generale: si può dimostrare con facili passaggi che applicando ingressi alternati del tipo sopra descritto al sistema

$$\dot{x} = g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2$$

e utilizzando il fatto che soluzioni di  $\dot{x} = g_i(x)u_i$ ,  $x(0) = x_0$  possono essere scritte come

$$x(t) = x(0) + \dot{x}(0)t + \ddot{x}(0)\frac{t^2}{2} + O(t^3) = x(0) + g_i(x_0)t + \frac{t^2}{2} \left. \frac{\partial g_i}{\partial x} \right|_{x_0} g_i(x_0) + O(t^3)$$

si ha che

$$x(4\tau) = x_0 + [g_1, g_2]_{x=x_0} \frac{\delta^2 \tau^2}{2} + O(\delta^3 \tau^3)$$

Questo significa che in prima approssimazione possiamo muovere il sistema da  $x_0$  lungo direzioni stabilite dal vettore generato dalla Lie bracket  $[g_1, g_2]$  calcolato in  $x_0$ .

(il calcolo di questo risultato è facilitato se, senza perdere generalità, si assumono coordinate per il sistema tali per cui uno dei campi vettori sia costante.)

Questo non è tutto perché il termine  $O(\tau^3)$ , se sviluppato, contiene le Lie bracket composte come

$$[g_1, [g_1, g_2]] , [[g_1, g_2], [g_1, [g_1, g_2]]] , \text{ etc.}$$

queste generano direzioni di moto che possono essere prese dal sistema commutando opportunamente gli ingressi.

Nel caso in cui consideri sistemi in cui il termine di deriva  $f$  non è nullo devo considerare anche le Lie bracket che lo interessano.

In un certo senso la Lie bracket di due campi vettoriali misura la loro *non commutatività*; è evidente che questo operatore differenziale giocherà un ruolo importante nei problemi di controllabilità.

Una distribuzione si dice **involutiva** se la Lie bracket di qualsiasi due campi vettoriali che le appartengono, le appartiene ancora; cioè se

$$\tau_1(x) \in \Delta(x) ; \tau_2(x) \in \Delta(x) \Rightarrow [\tau_1, \tau_2] \in \Delta(x)$$

Nell'esempio precedente  $\Delta_1(x) = \text{span} \left\{ \begin{array}{l} \cos(\theta) \quad \vdots \quad 0 \\ \sin(\theta) \quad \vdots \quad 0 \\ 0 \quad \quad \quad \vdots \quad 1 \end{array} \right\}$  non è involutiva.

È invece involutiva la distribuzione

$$\Delta_2(x) = \text{span} \{g_1, g_2, [g_1, g_2]\} = \text{span} \left\{ \begin{array}{l} \cos(\theta) \quad \vdots \quad 0 \quad \vdots \quad \sin(\theta) \\ \sin(\theta) \quad \vdots \quad 0 \quad \vdots \quad -\cos(\theta) \\ 0 \quad \quad \quad \vdots \quad 1 \quad \vdots \quad 0 \end{array} \right\}$$

come si constata facilmente osservando che  $\Delta_2(x)$  ha dimensione 3 in ogni punto dello spazio di stato.

La condizione che il rango della matrice associata ad una distribuzione sia pieno non è comunque necessaria: ad esempio, qualsiasi distribuzione generata da campi vettoriali costanti è certamente involutiva, essendo  $[a, b] = 0$ ,  $a, b = \text{costanti}$ .

Altro caso particolare, le distribuzioni generate da un solo campo vettoriale  $\Delta(x) = \text{span} \{g_1(x)\}$  sono ovviamente involutive, in quanto

$$[ag_1(x), bg_1(x)] = 0, \forall a, b \in \mathbb{R}^1$$

Data una distribuzione  $\Delta(x)$ , risulta naturale introdurre il concetto di **chiusura involutiva** di  $\Delta(x)$ , come la distribuzione minima che contiene  $\Delta(x)$  e che è involutiva.

L'oggetto analogo delle distribuzioni per i campi covettoriali è definito **codistribuzione**. Indicheremo con

$$\Omega(p) = \text{span} \{\omega_1(p), \dots, \omega_l(p)\}$$

la codistribuzione associata ai covettori  $\omega_1(p), \dots, \omega_l(p)$ , cioè l'insieme di tutti i covettori formati per combinazione lineare (a coefficienti funzioni dello stato) dei covettori dati.

In coordinate, le codistribuzioni possono essere identificate con lo **spazio-riga** di una matrice che per righe ha le  $\omega_i$ .

È naturale pensare una analogia al noto teorema dell'algebra lineare, per il quale, per ogni matrice costante  $A$ , vale

$$N(A^T) = R(A)^\perp$$

$$N(A) = R(A^T)^\perp$$

dove  $\perp$  indica il complemento ortogonale di un sottospazio. Similarmente per una distribuzione  $\Delta(x)$  si definisce il suo **annichilatore**

$$\Delta^\perp(x) = \{\omega : \omega v = 0, v \in \Delta(x)\}$$

cioè l'insieme dei covettori che danno prodotto interno nullo con qualsiasi vettore di  $\Delta(x)$ . Essendo  $\Delta^\perp(x)$  uno spazio aggiunto di  $\mathbb{R}^n$ , esso è certamente una codistribuzione.

Analogamente data la codistribuzione  $\Omega(x)$ , si può costruire una distribuzione **annichilatrice**

$$\Omega^\perp(x) = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle \omega, v \rangle = 0, \omega \in \Omega(x)\}$$

Si ha che

$$\dim(\Omega(x)) + \dim(\Omega^\perp(x)) = n$$

e ovviamente lo stesso vale per

$$\dim(\Delta(x)) + \dim(\Delta^\perp(x)) = n.$$

Nei sistemi meccanici con vincoli in forma cinematica  $A(q)\dot{q} = 0$ , la matrice  $A(q)$  definisce chiaramente una *codistribuzione* dei vincoli. La espressione della stessa cinematica in termini di quasi velocità,  $\dot{q} = S(q)\nu$ , esemplifica l'uso della distribuzione annichilatrice  $\text{span } S(q)$ .

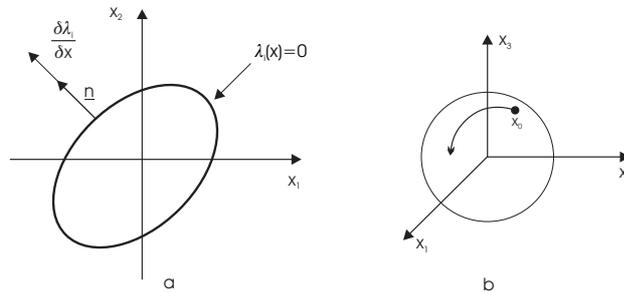
Vale il seguente risultato: Se una distribuzione  $\Delta(x)$  è regolare e non singolare in  $x_0$ , allora anche  $\Delta^\perp(x)$  lo è; vale anche il viceversa.

Infine accenniamo il fatto che per ogni distribuzione a  $d$  dimensioni  $\Delta(x)$  non singolare ogni suo campo vettoriale può essere espresso come

$$\tau \in \Delta(x) \Rightarrow \tau = \sum_{i=1}^d c_i(x) f_i(x)$$

dove  $f_i(x)$  sono campi vettoriali regolari che formano una *base*, tali cioè che

$$\Delta(x) = \text{span } \{f_1(x), \dots, f_d(x)\}$$



Supponiamo ora di avere una distribuzione  $\Delta(x)$  definita su uno spazio a  $n$ -dimensioni con dimensione  $d < n$ . La codistribuzione annichilatrice  $\Delta^\perp(x)$  ha dimensione  $n - d$ , e può essere scritta come

$$\Delta^\perp(x) = \text{span} \{ \omega_1(x), \dots, \omega_{n-d}(x) \}$$

Ci chiediamo quando questi campi covettoriali siano in effetti **differenziali esatti**, cioè esistano  $(n - d)$  funzioni indipendenti  $\lambda_i(x)$  tali che:

$$\omega_i = \frac{\partial \lambda_i}{\partial x}$$

Tale condizione è detta di **completa integrabilità** per la  $\Delta(x)$ . Se la  $\Delta(x)$  è espressa come

$$\Delta(x) = \text{span} \{ f_1(x), \dots, f_d(x) \} = \text{Im} F(x)$$

le funzioni cercate dovranno verificare le equazioni differenziali alle derivate parziali

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x} F(x) = 0, \quad \forall i, \quad \forall x$$

Il problema chiaramente ci interessa ai fini della discriminazione dei vincoli cinematici tra olonomi ed anolonomi; ma vedremo che esso ha importanza più generale, coinvolgendo tutta la analisi di raggiungibilità di sistemi nonlineari.

Si consideri il luogo dei punti  $\lambda_i(x) = \text{cost}$  in  $\mathbb{R}^n$ . Il gradiente  $\frac{\partial \lambda_i}{\partial x}(x)$  può essere visto geometricamente come un vettore in  $x$  e orientato come la normale  $n(x)$  al luogo. La condizione che

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x} f_j(x) = 0, \quad \forall i, j, \quad \forall x$$

equivale a imporre che ognuno dei vettori  $f_j(x)$ , e ogni loro combinazione lineare, sia perpendicolare alla normale al luogo in quel punto, cioè **tangente** al luogo. In tal caso risulta evidente che un sistema il cui vettore

velocità  $\dot{x}$  appartenga a  $\Delta(x)$  sarebbe costretto a rimanere su  $\lambda_i(x) = cost$  indefinitamente qualora vi si venga a trovare in qualsiasi istante. È pertanto fondamentale il seguente

*Teorema di Frobenius* Una distribuzione è completamente integrabile se e solo se è involutiva.

Il teorema di Frobenius ha conseguenze immediate sulla raggiungibilità del sistema. Se infatti per un sistema, la distribuzione di controllo ha dimensione  $d < n$  ed è integrabile, esisteranno  $n - d$  superfici in  $M$  definite da  $\lambda_i(x) = c_i = cost$ , che il sistema non può abbandonare (le costanti dipendendo dalle condizioni iniziali). Il sistema non potrà raggiungere nessun punto che si trovi al di fuori della superficie intersezione (che ha dimensione  $d$ ), e non sarà quindi certamente completamente raggiungibile.

Partendo da condizioni iniziali diverse, si avranno traiettorie giacenti su superfici di equazione  $\lambda_i(x) = c'_i$  con  $c' \neq c$  ma ancora costante. Queste superfici sono parallele tra loro (nel senso che i piani tangenti sono paralleli), e formano una *foliazione* di superfici.

Il teorema di Frobenius vale **localmente** cioè  $\Delta(x)$  è integrabile in un intorno di  $x_0$  se e solo se è involutiva nell'intorno. Questo significa che il sistema potrebbe ancora uscire dalla intersezione delle superfici integrali, allontanandosi sufficientemente dal punto iniziale. Per avere un risultato valido *in grande* ho bisogno di una delle ulteriori condizioni

1.  $\Delta(x)$  **analitica** (cioè tutti i suoi campi vettoriali sono analitici) su  $M$  analitico, ovvero
2.  $\Delta(x) \in C^\infty$  su  $M \in C^\infty$ , con  $\dim \Delta(x) = cost$

In queste ipotesi,  $\forall x_0 \in M$  esiste una *sottosuperficie integrale massima* che non può essere abbandonata dal sistema.

**Esempio**  $x \in \mathbb{R}^3$

$$g_1(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_3 \\ -x_2 \end{bmatrix} ; g_2(x) = \begin{bmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$\Delta(x) = \text{span} \{g_1, g_2\}$  ha dimensione 2 eccetto in  $x_3 = 0$ .

$$g_3 = [g_1, g_2] = \begin{bmatrix} +x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{x_1}{x_3}g_1 - \frac{x_1}{x_3}g_2 \in \Delta(x)$$

eccetto in  $x_3 = 0$ .

Per il teorema di Frobenius, ci attendiamo l'esistenza di una varietà integrale di dimensione 2: infatti, le superfici sferiche  $\lambda(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \text{cost.}$  sono tali per cui

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} \begin{bmatrix} g_1(x) & g_2(x) \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -x_3 \\ x_3 & 0 \\ -x_2 & x_1 \end{bmatrix} = 0$$

È possibile vedere facilmente che l'evoluzione di un sistema dinamico  $\dot{x} = g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2$ , non abbandonerebbe mai la superficie sferica sulla quale si trovano le sue condizioni iniziali: infatti, sarebbe  $\dot{\lambda} = \frac{\partial \lambda}{\partial x} \dot{x} = 0$ , per qualsiasi valore dei controlli  $u_1(t), u_2(t)$ .

Torniamo ora al sistema in forma affine nel controllo

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2 + \dots + g_m(x)u_m.$$

Una definizione di raggiungibilità per questo sistema potrebbe essere data così:

*Un sistema è raggiungibile se  $\forall x_1, x_2 \in X$  esiste  $T(< \infty)$ ,  $u : [0, T] \rightarrow U$  tale che  $x(T, x_1, u) = x_2$ .*

Per questa definizione "in grande" di raggiungibilità non esistono, al momento attuale, criteri di verifica di facile e generale applicabilità.

Perfino per una versione "locale" del tipo

*Un sistema è localmente raggiungibile in  $x_1$  se,  $\forall x_2$  in un intorno di  $x_1$ , esiste  $T(< \infty)$ ,  $u : [0, T] \rightarrow U$  tale che  $x(T, x_1, u) = x_2$ .*

Non si hanno al momento soddisfacenti criteri di verifica. Il problema è che la possibilità di poter raggiungere un punto anche vicino può dipendere per sistemi non lineari generali anche dal comportamento del sistema in regioni lontane: ad esempio, si consideri il sistema in  $\mathbb{R}^2$

$$\dot{x} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_1, & x_1 < 1 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2, & x_1 \geq 1 \end{cases}$$

in cui tutti i punti di un intorno dell'origine sono raggiungibili, ma solo dopo aver raggiunto il semipiano chiuso  $x_1 \geq 1$ . L'analisi di sistemi discontinui come questo è un argomento di ricerca attualmente ancora molto aperto.

Questo tipo di difficoltà è legata al fatto che i sistemi non lineari possono non essere analitici. I sistemi analitici sono quelli in cui i campi vettoriali di deriva e di controllo sono tutti esprimibili in serie di Taylor attorno al

punto iniziale. Questo significa che l'informazione locale sul sistema (cioè il valore dei campi e di tutte le loro derivate nel punto iniziale) è sufficiente a determinare tutto l'andamento del campo anche a distanza finita dal punto iniziale. Si può notare che l'esempio precedente non è analitico. Considereremo quindi una ulteriore restrizione del concetto di raggiungibilità, detta raggiungibilità *locale–locale*.

Introduciamo la notazione  $R_T^V(x_0)$  per indicare l'insieme dei punti raggiungibili da  $x_0$  al tempo  $T > 0$  seguendo traiettorie che rimangono, per  $t \leq T$ , contenute nell'intorno  $V$  di  $x_0$ .

*Un sistema non lineare è detto*

- raggiungibile localmente–localmente (*in sigla, l.l.c.*) da  $x_0$  se, per ogni intorno  $V$  (arbitrariamente piccolo) esiste  $T$  tale che  $R_T^V(x_0)$  contiene un intorno di  $x_0$ ;
- raggiungibile localmente in tempo breve (*“small-time locally controllable”, o s.t.l.c.*) da  $x_0$  se, per ogni  $V$  e per ogni  $T$  (arbitrariamente piccoli),  $R_T^V(x_0)$  contiene un intorno di  $x_0$ ;

Nelle definizioni appena date, si sostituisce la parola “raggiungibile” con la parola “accessibile” quando si possa solo dimostrare che  $R_T^V(x_0)$  contiene un insieme aperto non vuoto di  $M$  (cioè, non un intorno).

Si è visto in precedenza come le direzioni indicate dalle Lie bracket tra i campi vettori della distribuzione di controllo siano anch'esse possibili “direzioni di moto” locali del sistema. È naturale perciò considerare la seguente catena (o “filtrazione”) di distribuzioni

$$\begin{aligned}
 \Delta_0 &= \text{span}(g_1, \dots, g_m); & \Delta &= \text{span}(f, g_1, \dots, g_m) \\
 \Delta_1 &= \text{span}(g_1, \dots, g_m, [f, g_1], \dots, [f, g_m], \\
 &\quad [g_1, g_2], \dots, [g_1, g_m], \dots) = \\
 &= [\Delta_0, \Delta] + \Delta_0 \\
 &\vdots = \vdots \\
 \Delta_k &= \Delta_{k-1} + [\Delta_{k-1}, \Delta]
 \end{aligned}$$

La dimensione di  $\Delta_k(p)$  in un punto  $p$  è non decrescente, e limitata superiormente (dalla dimensione dello spazio di stato).

Se tutte le distribuzioni ottenute sono non-singolari in  $p$ , allora la dimensione di  $\Delta_k$  è strettamente crescente sino a che, per qualche  $k$ , si avrà  $\dim \Delta_k = \dim \Delta_{k-1}$ . A questo  $k$  la filtrazione si arresta (ogni successiva iterata offrirebbe ancora la stessa distribuzione). Si noti che  $k \leq n - m + 1$ , quindi la procedura è computabile in un numero finito di passi. La distribuzione  $\Delta_k$  viene detta *distribuzione di accessibilità* per il sistema.

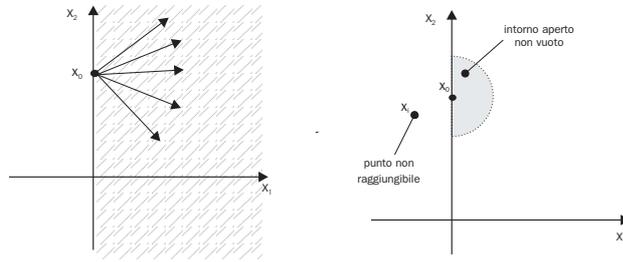


Figura 3.10: Sistema accessibile ma non raggiungibile

Se le distribuzioni ottenute sono singolari in  $p$ , la filtrazione deve procedere sinché non si giunge ad una distribuzione nonsingolare di dimensione pari alla successiva. In questo caso, il numero  $k$  di passi necessari alla procedura non è superiormente limitabile a priori.

In termini della distribuzione di accessibilità si può formulare il seguente

**Teorema di Chow.** Se  $\dim \Delta_k(p) = \dim \Delta_{k-1}(p) = n$  allora il sistema è l.l. accessibile.

Se  $\dim \Delta_k = \dim \Delta_{k-1} = r < n$  in tutti i punti di un intorno di  $p$ , l'insieme raggiungibile l.l. in tempo  $T$   $R_T^V$  è contenuto in una sottosuperficie  $S_p$  di dimensione  $r$  dello spazio di stato.  $R_T^V$  contiene un sottoinsieme aperto di  $S_p$ , quindi il sistema ristretto su  $S_p$  è l.l. accessibile.

In generale l'accessibilità di un sistema non implica la raggiungibilità. Ad esempio si consideri il seguente sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2^2 \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Il sistema è localmente accessibile da  $p$ , come si verifica dal teorema di Chow:

- a) Per  $p_2 \neq 0$ ,  $\dim \Delta_1(p) = 2$ ;
- b) Per  $p_2 = 0$ ,  $\Delta_1 = \text{span} \{g, [f, g]\}$  è singolare in  $p$ , ma  $\Delta_2 = \text{span} \{g, [f, g], [g, [f, g]]\}$  ha dimensione 2 ovunque.

Dalla definizione di locale accessibilità,  $R_T^V(p)$  contiene un insieme aperto non vuoto di  $M$  (un sottoinsieme del semipiano destro). Il sistema non è

però raggiungibile perché non posso raggiungere punti, anche arbitrariamente vicini al punto iniziale, appartenenti al semipiano sinistro (quindi  $R_T^V(p)$  non contiene un intorno): infatti le evoluzioni dello stato, a partire da punti  $p = (p_1, p_2)$ , appartengono al semipiano a destra della retta  $x = p_1$  perché  $\dot{x}_1$  è sempre positivo.

in tempo breve) data la accessibilità (l.l.). In particolare, è ovvio che la accessibilità è condizione necessaria per la raggiungibilità. In termini semplificativi, la raggiungibilità sarà possibile quando gli effetti del vettore di deriva possono essere “annullati” dal controllo. Si può dimostrare che le seguenti, assieme alla condizione di accessibilità, sono condizioni sufficienti (di crescente generalità e complessità) per la raggiungibilità in tempo breve a partire da un punto  $p$ :

1.  $f(x) \equiv 0, \forall x \in B_\epsilon(p)$ ;
2.  $f(x) \in \text{span} [g_1(x) \cdots g_m(x)], \forall x \in B_\epsilon(p)$ ;
3.  $f(p) = 0$  e  $\dim \Delta_L(p) = n$ , dove  $\Delta_L = \text{span} \{g_i, [f, g_i], \dots, \text{ad}_f^{\mu_i} g_i, \dots\}$ , con  $i = 1, \dots, m$  e per qualsiasi  $\mu_i \in \mathbb{N}$ ;
4.  $f(p) = 0$  e  $\dim (\Delta_L(p) + \Delta_{G1}(p)) = n$ , dove  $\Delta_{G1} = \text{span} \{[g_i, g_j]\}$ , per tutti gli  $i, j$  da 1 a  $m$ ;
5.  $f(p) = 0$ , e ogni Lie bracket tra le  $f$  e le  $g$  in cui appaiano un numero dispari di  $f$  e un numero pari (diverso da zero) di  $g$  (“bad” bracket), sia combinazione lineare di bracket con un minor numero totale di  $f$  e  $g$ .
6. Se la condizione di accessibilità è verificata per tutti i punti di  $u$  compatto  $M$  e il sistema è debolmente reversibile in  $M$  (vale a dire,  $q_1$  accessibile da  $q_0$  implica che  $q_0$  è raggiungibile da  $q_1$ ), allora il sistema è raggiungibile su  $M$  [Sontag], [Elizabeth Wang, 2011].

Si noti che i criteri 1, 2, sono molto più restrittivi perché richiedono proprietà che devono essere verificate su tutto un intorno di  $p$ , mentre le altre condizioni vengono valutate solo in  $p$  stesso.

La condizione 1) è particolarmente interessante per lo studio della olonomia di vincoli cinematici. Vediamo esplicitamente la procedura di analisi in questo caso.

Sia dato un sistema meccanico con  $n$  configurazioni  $q$ , sottoposto a  $m$  vincoli cinematici in forma di Pfaff,  $A(q)\dot{q} = 0$ . Si consideri la distribuzione  $\mathcal{S} = \mathcal{A}^\perp$  che annichila la distribuzione dei vincoli  $\mathcal{A}(q) = \text{rowspan } A(q)$ . Sia

$S(q)$  una base di  $\mathcal{S}$ , e siano  $s_i(q)$  i campi vettori che ne formano le colonne. La forma di controllo per il sistema in esame è pertanto

$$\dot{q} = s_1(q) u_1 + \cdots + s_{n-m}(q) u_{n-m}.$$

Si costruisca la filtrazione

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \text{span}(s_1, \dots, s_{n-m}) = \Delta \\ \Delta_1 &= [\Delta_0, \Delta_0] + \Delta_0 \\ &\vdots \\ \Delta_k &= \Delta_{k-1} + [\Delta_{k-1}, \Delta_0] \end{aligned}$$

Sia  $d = \dim \Delta_k$  costante in un intorno di un punto  $\bar{q}$ . Allora, le configurazioni del sistema non possono abbandonare (almeno localmente) una superficie di dimensione  $d$  nello spazio di stato, il che implica che

- $n - d$  degli  $m$  vincoli sono olonomi;
- i restanti  $m - (n - d)$  sono anolonomi;

Si dice in questo caso che il sistema ha grado di anolonomia  $m - n + d$ . Nel caso  $d = n$ , il sistema (completamente raggiungibile) è detto massimamente anolonomo.

Per quanto riguarda la condizione 2), la sua interpretazione è evidente:  $f(x)$  in questo caso può essere “neutralizzato” da opportuni controlli, e l’analisi viene ricondotta al caso precedente.

Per quanto riguarda la condizione 3), si consideri un sistema lineare

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$$

come sistema nonlineare, cioè  $f(x) = Ax$  e  $g_i(x) = B_i$ ,  $i$ -esima colonna di  $B$ .

Svolgendo i calcoli si ottiene  $[g_i, g_j] = 0$  e  $ad_f^k g_i = (-1)^k A^k B_i$ . Infatti,  $[g_i, ad_f^k g_j] = 0$ ,  $\forall i, j, k$  e  $[f, g] = [Ax, b_i] = -Ab_i$ ,  $[f, [f, g]] = [Ax, -Ab_i] = A^2 b_i$ , e  $[g_i, g_j] = [b_i, b_j] = 0$

Pertanto se la distribuzione

$$\begin{aligned} \Delta_k &= \text{span} \left[ g_1 : [f, g_1] : \cdots : ad_f^k(g_1) : \cdots : g_2 : [f, g_2] : \cdots : ad_f^k(g_2) : \cdots \right] \\ &= \text{span} [B, AB, \dots, A^k B] \end{aligned}$$

ha rango  $n$  per qualche  $k$ , il sistema è raggiungibile. Ci si riconduce quindi al consueto test lineare. Per Cayley-Hamilton, sappiamo che è sufficiente studiare  $\Delta_{n-1} = \Delta_L$ .

Si consideri ora un sistema  $\dot{x} = f(x) + G(x)u$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  che abbia equilibrio nell'origine (dopo eventuale traslazione), e lo si scriva nella forma

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u = Ax + p(x) + (B + r(x))u$$

con  $\|p(x)\|, \|r(x)\|$  infinitesimi di ordine almeno due.

Si può mostrare facilmente che questa coincide, a meno di infinitesimi di ordine superiore, con quella della approssimazione lineare. Pertanto, la raggiungibilità della approssimazione lineare in un punto di equilibrio è sufficiente per la raggiungibilità locale in tempo breve del sistema nonlineare originale.

Infine, l'applicazione all'esempio bidimensionale con termine di deriva sopra riportato della condizione 5) e' possibile solo per  $p_2 = 0$ ; la condizione non è soddisfatta proprio a causa della bad bracket  $[g, [f, g]]$ .

### Accessibilità in senso Debole

La distribuzione su cui si stabilizza la filtrazione di accessibilità,  $\Delta_k$ , coincide dunque per i sistemi lineari con la immagine della matrice di raggiungibilità

$$R = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$$

che è a sua volta uguale al sottospazio raggiungibile dall'origine (in un tempo arbitrario)  $\mathcal{R}_0 = \text{span } R$ .

In generale, l'insieme di raggiungibilità entro il tempo  $T$  da un punto  $x_0 \neq 0$ , per un sistema lineare  $\dot{x} = Ax + Bu$  non completamente raggiungibile, è dato da

$$\mathcal{R}(x_0, T) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n | \bar{x} = \exp(AT)x_0 + v, 0 \leq \tau \leq T, v \in \mathcal{R}_0\}.$$

Questo tipo di raggiungibilità è da considerarsi più debole di quella ottenuta dalla origine per i punti in  $\mathcal{R}_0$ , nel senso che alcuni punti possono essere raggiungibili solo in un tempo  $\tau$  fissato.

Ub test di accessibilità debole nei sistemi nonlineari è basato sulla filtrazione

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \text{span}(f, g_1, \dots, g_m) \\ \Gamma_1 &= \Gamma_0 + [\Gamma_0, \Gamma_0] \\ &\vdots \\ \Gamma_k &= \Gamma_{k-1} + [\Gamma_{k-1}, \Gamma_0] \end{aligned}$$

che si interrompe quando  $\dim \Gamma_k = \dim \Gamma_{k-1} = d$  quindi il sistema è l.l.d.a. se e solo se  $d = n$ .

**Esempio:** Differenze tra la locale forte accessibilità e la locale accessibilità. Limitiamo lo studio ad un sistema lineare del tipo

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

questo sistema non è raggiungibile perché la matrice di raggiungibilità ha rango pari a 1

$$[BAB] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

L'evoluzione libera del sistema è

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1(0) e^t, \\ x_2(t) = x_2(0) e^t, \end{cases}$$

la cui traiettoria è una retta con pendenza  $\frac{\pi}{4}$  nel piano  $(x_1, x_2)$ . La distribuzione  $(n-1)$ -esima relativa al test di locale debole accessibilità sarà

$$\Gamma_{n-1} = \text{span} [Ax] + \text{span} [B, AB]$$

mentre la distribuzione  $(n-1)$ -esima relativa al test di locale forte accessibilità è

$$\Delta_{n-1} = \text{span} [B, AB]$$

Ad esempio, ci chiediamo se a partire dallo stato iniziale  $x_0 = (1, 1)$  possiamo raggiungere il punto  $x_c = (0, 4)$  ad un tempo  $T$  arbitrariamente fissato. Questo non è possibile perché dal test di locale forte accessibilità vediamo che le direzioni possibili per questo tipo di controllo appartengono allo  $\text{span} [BAB]$ . Questo non vuol dire che il punto  $x_c$  non sia raggiungibile (infatti lo è al tempo  $T = \log(2)$ ): il test di locale accessibilità in  $x_c$  infatti indica  $\Gamma_1 = \text{span} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ .

**Esempio** Sistemi lineari tempo varianti

Possiamo riportarci ad un sistema non lineare tempo invariante ponendo un nuovo vettore di stato  $z \in \mathbb{R}^{n+1}$ :

$$z = \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} ; \dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{t} \end{bmatrix} = f(z) + g(z)u = \begin{bmatrix} A(t)x \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B(t) \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Calcoliamo adesso le Lie bracket:  $[g_i, g_j] = 0$ ,

$$[f, g_i] = \begin{bmatrix} 0 & B_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ax \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & \dot{A}x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \dot{B}_i - AB_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\frac{d}{dt} - A\right] B_i \\ 0 \end{bmatrix} \\
[f, [f, g_j]] &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{d}{dt} [B - AB] \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ax \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & \dot{A}x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{B} - AB \\ 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \left[\frac{d}{dt} - A\right] \begin{bmatrix} \dot{B} - AB \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\frac{d}{dt} - A\right]^2 B \\ 0 \end{bmatrix} \\
[g_i, [g, g_j]] &= 0 \quad ad_f^K g = \begin{bmatrix} \left[\frac{d}{dt} - A\right]^k B \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Indicando con  $\Delta$  l'operatore differenziale  $\left[\frac{d}{dt} - A\right]$ , il sistema è dunque accessibile se

$$\text{rank} \left( \begin{bmatrix} B : \Delta B : \Delta^2 B : \dots \end{bmatrix} \right) = n.$$

**Esempio** Raggiungibilità sistema altalena

Supponiamo che un bambino di massa  $m$  si alzi e si abbassi sulla altalena, variando così la lunghezza  $l$ . Le equazioni del moto sono ottenute facilmente con il metodo di Eulero-Lagrange,

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta - 2\frac{\dot{\theta}}{l} \dot{l}$$

e ponendo

$$\theta = x_1, \quad \dot{\theta} = x_2, \quad l = x_3, \quad \dot{l} = u$$

si ha in forma di controllo

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u; \quad f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -g \frac{\sin x_1}{x_3} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \frac{x_2}{x_3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si ottiene poi

$$[f, g] = \begin{bmatrix} -2 \frac{x_2}{x_3} \\ g \frac{S_1}{x_3^2} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad [f, [f, g]] = \begin{bmatrix} g \frac{S_1}{x_3} \\ -g C_1 \frac{x_2}{x_3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{span} \{g, [f, g], [f, [f, g]]\} = 3$$

eccetto che nei punti per cui  $x_2 = 0$ ,  $x_1 = 0 + k\pi$ ; quando l'altalena si trova in queste condizioni occorre uno start per iniziare a muoversi.

**Esempio** Sistemi in forma concatenata

Un sistema non lineare del tipo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \\ \dot{x}_2 = u_2 \\ \dot{x}_3 = x_2 u_1 \\ \dot{x}_4 = x_3 u_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = x_{n-1} u_1 \end{cases}$$

si dice in forma concatenata. Alcuni importanti sistemi robotici possono essere scritti in questa forma, come ad esempio un veicolo a singolo asse o unicycle ( $n = 3$ ), un veicolo a doppio asse ( $n = 4$ ), e un veicolo a doppio asse con  $m$  rimorchi ( $n = 4 + m$ ). È un sistema senza deriva, con campi di controllo

$$g_1 = (1 \ 0 \ x_2 \ x_3 \ \cdots \ x_{n-1})^T ; \quad g_2 = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0)^T$$

Calcolando le Lie bracket si ha

$$[g_1, g_2] = -\frac{\partial g_1}{\partial x} g_2 = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -e_3$$

$$[g_2, [g_1, g_2]] = 0 ; \quad [g_1, [g_1, g_2]] = -\frac{\partial g_1}{\partial x} [g_1, g_2] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e_4$$

e in generale

$$ad_{g_1}^k g_2 = e_{k+2}$$

Al  $(n-2)$ -esimo livello di Lie Bracket si ottiene quindi la completa raggiungibilità. Ne consegue che è possibile “parcheggiare” in configurazione arbitraria un veicolo con un numero arbitrariamente elevato di rimorchi (naturalmente, le manovre risulteranno molto complesse, ricorrendo a commutatori di ordine tanto più elevato quanto più alto è il numero di rimorchi).

Riprendiamo lo studio del modello completo:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \\ y_j = h_j(x) \quad , j = 1 \dots p \end{cases}$$

**Def:** Due stati sono detti **indistinguibili**, se per ogni  $u \in U$ , insieme dei controlli ammissibili, le evoluzioni a partire da  $x_1$  e  $x_2$  danno la stessa uscita  $y(t)$ .

Anche in questo caso la definizione si specializza in senso locale considerando in  $U$  solo controlli che, per  $T$  piccoli, non facciano allontanare  $x(t)$  da un intorno di  $x_1$  (e di  $x_2$ ). Per verificare l'uguaglianza di due funzioni  $y(x_1, u_1)$  e  $y(x_2, u_2)$ , in ogni istante  $t$ , è sufficiente (se sono analitiche) confrontare i valori di tutte le loro derivate in  $t = 0$ . Sarà dunque

$$y_i(0) = h_i(x_0)$$

$$\dot{y}_i(0) = \left. \frac{\partial h_i}{\partial x} \dot{x} \right|_0 = \left. \frac{\partial h_i}{\partial x} f(x) + \sum_j \frac{\partial h_i}{\partial x} g_j(x) u_j \right|_0 = L_g h_i(x_0) + \sum_j L_g h_i u_j(0)$$

e così via .

**Def:** Chiamo **Spazio di osservazione** lo spazio lineare di funzioni che contiene  $h_1, \dots, h_p$  e tutte le derivate di Lie  $L_{x_1}, \dots, L_{x_k} h_j$ , con

$$\begin{cases} x_i = f, g_1, \dots, g_m \\ k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

In altre parole, tutte le funzioni (dello stato) che appaiono nelle uscite, moltiplicate per funzioni degli ingressi ( $u_i, \dot{u}_i, \dot{u}_i^2$ , etc.). Questo spazio è anche lo spazio delle funzioni del tipo

$$L_{z_1} L_{z_2} \dots L_{z_k} h_j(x) \quad k = 1, 2, \dots$$

con

$$z_i = f(x) + \sum_{j=1}^m g_j(x) u_j^{(i)} \quad , \quad \underline{u}^{(i)} \text{ vettore costante}$$

Cioè esplicitamente lo spazio delle variazioni delle uscite corrispondenti a ingressi costanti attratti, di piccola durata. Infatti

$$L_{x_1+x_2} \lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial x}(x_1 + x_2) = L_{x_1} \lambda + L_{x_2} \lambda$$

$$L_x(\lambda_1 \lambda_2) = L_x \lambda_1 + L_x \lambda_2$$

Quindi essendo ogni  $z_i$  combinazione lineare di  $x_i$  e viceversa, anche le  $L_{z_i}$  e  $L_{x_i}$  lo sono. Lo spazio di osservabilità  $\Theta$  contiene tutte le funzioni  $h(x)$  e le loro derivate di ogni ordine calcolate lungo le traiettorie del sistema. Intuitivamente se le funzioni in  $\Theta$  sono indipendenti la loro eguaglianza per ogni  $u$  implica che sono applicate alla stessa  $x$ .

**Esempi:**

In un intorno di 0, in  $\mathbb{R}^1$ ,  $\sin(x)$  è invertibile.

$$\sin(x_1) = \sin(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ ( localmente )}$$

invece  $\cos(x)$  non lo è.

In  $\mathbb{R}^2$  le funzioni  $\begin{cases} \sin(x+y) \\ x \end{cases}$  sono indipendenti e

$$\begin{cases} \sin(x_1 + y_1) = \sin(x_2 + y_2) \\ x_1 = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

mentre per le funzioni  $\begin{cases} \sin(x+y) \\ x^2 \end{cases}$  questa proprietà non vale.

Un metodo per stabilire l'indipendenza di funzioni è dato dal teorema del Dini. infatti

$$J \begin{bmatrix} \sin(x+y) \\ x \end{bmatrix} \Big|_0 = \begin{bmatrix} \cos(x+y) & \cos(x+y) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Big|_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J \begin{bmatrix} \sin(x+y) \\ x^2 \end{bmatrix} \Big|_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si può notare come lo jacobiano nel primo caso generi due vettori linearmente indipendenti mentre nel secondo caso generi vettori linearmente dipendenti. Da questo esempio risulta chiara l'importanza delle derivate  $\frac{\partial}{\partial x}$  nel decidere l'indipendenza di funzioni.

Due funzioni  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  si dicono indipendenti se i covettori

$$df_1(x) = \frac{\partial f_1}{\partial x} ; df_2(x) = \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

sono indipendenti ( in un punto o in un insieme )

**Def:** si definisce la **Codistribuzione di osservabilità** come

$$d\mathcal{O} = \text{span} \left\{ \frac{\partial h_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial h_p}{\partial x}, \frac{\partial L_f h}{\partial x}, \dots \right\} = \text{span} \{ d\lambda(x), \lambda \in \theta \}$$

Se  $\dim d\mathcal{O} = n$ , il sistema è localmente osservabile (in un punto o in un insieme), cioè tra i punti vicini a  $x_0$ , l'unico indistinguibile è  $x_0$  stesso.

Si definisce  $\Omega$  la matrice tale che  $\text{rowspan } \Omega = d\mathcal{O}$ .

Se  $\Omega$  ha rango  $n$  in  $\bar{x}$ ,  $\Omega^\perp = \mathcal{N}(\Omega) = 0$  e quindi non esiste alcuno stato  $\bar{x} + \delta x$  in un intorno di  $\bar{x}$  tale che  $y(\bar{x} + \delta x, u) - y(\bar{x}, u) = \Omega \delta x = 0$ , cioè che lasci le funzioni  $y(t), \dot{y}(t), \dots$  invariate.

Se invece  $\dim(d\mathcal{O}) = k < n$  con  $k = \text{cost}$  esisteranno  $k$  funzioni  $\lambda(x)$  tali che  $d\mathcal{O} = \text{span} \{d\lambda_1 \dots d\lambda_k\}$ . Le superfici  $\lambda(x) = \text{cost}$  sono tali per cui traiettorie uscenti da due stati appartenenti all'intersezione di tutte le superfici sono indistinguibili dall'uscita.

L'osservabilità locale è una proprietà che non implica l'osservabilità globale, come è giustificato attendersi per sistemi non lineari.

Ad esempio il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = u & f(x) = 0 & g(x) = 1 \\ y_1 = \sin \alpha x \\ y_2 = \cos \alpha x \end{cases}$$

ha spazio di osservabilità

$$d\mathcal{O} = \{\sin \alpha x, \cos \alpha x, L_f y_1 = 0, L_f y_2 = 0, L_g y_1 = \alpha \cos \alpha x, L_g y_2 = -\alpha \sin \alpha x\}$$

la corrispondente codistribuzione di osservabilità è data da

$$d\mathcal{O} = \text{span} \{ \cos \alpha x, \sin \alpha x \}$$

da cui  $\dim(d\mathcal{O}) = 1$ , per ogni valore di  $x$ . Il sistema è localmente osservabile ovunque; comunque gli stati iniziali  $x_0$  e  $x_1 = x_0 + \frac{2K\pi}{\alpha}$  **non** sono distinguibili.

**Esempio** Caso lineare

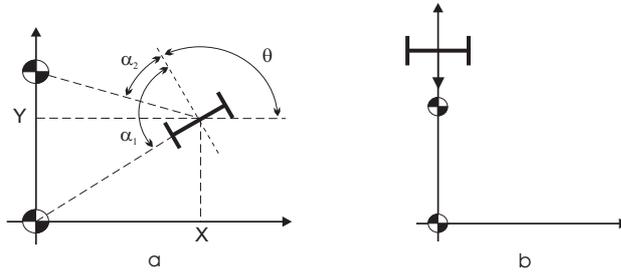
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu & f(x) = Ax & g_i(x) = b_i \\ y = Cx & h_i(x) = c_i x \end{cases}$$

Lo spazio di osservabilità sarà

$$\theta = \{c_1 x, \dots, c_m x, L_f h_1 = c_1 Ax, \dots, L_{g_i} h_j = c_j b_i u, \dots, L_f L_f h_1 = c_1 A^2 x, \dots\}$$

la codistribuzione di osservabilità

$$d\mathcal{O} = \text{span} \{c_1; \dots; c_m; c_1 A; \dots; c_m A; c_1 A^2; \dots\}$$



Il rango della codistribuzione coincide col rango della matrice

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \end{bmatrix}$$

e quindi col classico criterio ( di Kalman ) di osservabilità.

Si noti infine che se  $\text{rank}d\theta < n$  in un punto isolato ( di singolarità ), non si può escludere la locale osservabilità .

### Esempio

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ y = x^3 \end{cases}$$

questo sistema è osservabile ma  $\dim d\mathcal{O} = \dim x^3 = 0$  in  $x = 0$ .

Se il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g_1(x)u_1 + \dots \\ y_1 = h_1(x) \\ y_2 = \dots \end{cases}$$

è localmente accessibile e analitico, e  $M$  è convesso, allora è localmente osservabile se e solo se tiene la condizione di rango ( la codistribuzione non è singolare ).

### Esempio

Consideriamo ancora il modello semplificato di un'auto assieme a due equazioni di misura degli angoli sotto i quali una telecamera a bordo del veicolo osserva due punti fissi di traguardo.

$$q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} \quad \alpha_1 = \pi - \theta + \arctan \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} \quad \alpha_2 = \pi - \theta + \arctan \begin{bmatrix} (1-y) \\ x \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{q} = g_1(q)u_1 + g_2(q)u_2 = \begin{bmatrix} \cos(q_3) \\ \sin(q_3) \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2 \\ \alpha_1 = \pi - q_3 + \arctan \begin{bmatrix} q_2 \\ q_1 \end{bmatrix} \\ \alpha_2 = \pi - q_3 - \arctan \begin{bmatrix} (1 - q_2) \\ q_1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Lo spazio di osservazione contiene

$$\begin{aligned} L_g h_1 &= \frac{\partial h_1(x)}{\partial x} g_1(x) = \frac{x \sin \theta - y \cos \theta}{x^2 + y^2} \\ L_{g_2} h_1 &= -1 \\ L_{g_1} h_2 &= \frac{(d - y) \cos \theta + x \sin \theta}{x^2 + (y - d)^2} \\ L_{g_2} h_2 &= -1 \\ L_{g_2} L_{g_1} h_1 &= \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Gli elementi fino ad ora calcolati permettono di scrivere

$$\Theta = h_1, h_2, L_{g_2} h_1, L_{g_1} h_2, L_{g_2} h_2, L_{g_2} L_{g_1} h_1,$$

Non tutte queste funzioni sono indipendenti, infatti

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial x} &= \begin{bmatrix} \frac{-y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} & -1 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x} &= \begin{bmatrix} \frac{d - y}{x^2 + (d - y)^2} & \frac{x}{x^2 + (d - y)^2} & -1 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial L_{g_1} h_1}{\partial x} &= \left[ \frac{\sin \theta [x^2 + y^2] - 2x[x \sin \theta - y \cos \theta]}{[x^2 + y^2]^2}, \frac{-\cos \theta [x^2 + y^2] - 2y[x \sin \theta - y \cos \theta]}{[x^2 + y^2]^2}, \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{x^2 + y^2} \right] \\ \frac{\partial L_{g_2} h_1}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{g_1} h_2}{\partial x} &= \left[ \frac{\sin \theta [x^2 + (d - y)^2] - 2x[x \sin \theta + (d - y) \cos \theta]}{[x^2 + (d - y)^2]^2}, \frac{-\cos \theta [x^2 + (d - y)^2] - 2(d - y)[x \sin \theta + (d - y) \cos \theta]}{[x^2 + (d - y)^2]^2}, \right. \\ &\quad \left. \frac{x \cos \theta - (d - y) \sin \theta}{x^2 + (d - y)^2} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L_{g_2} h_2}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L_{g_2} L_{g_1} h_1}{\partial x} = \left[ \frac{\cos \theta [x^2 + y^2] - 2x [x \cos \theta + y \sin \theta]}{[x^2 + y^2]^2}, \frac{\sin \theta [x^2 + y^2] - 2y [x \cos \theta + y \sin \theta]}{[x^2 + y^2]^2}, \frac{-x \sin \theta + y \cos \theta}{x^2 + y^2} \right]$$

I campi covettoriali di  $d\theta$  calcolati hanno rango 3 laddove uno almeno dei seguenti determinanti é diverso da zero

$$D_1 = \det \begin{bmatrix} dh_1 \\ dh_2 \\ dL_{g_1} h_1 \end{bmatrix} = \frac{d(y-d)(y \cos \theta - x \sin \theta)}{[x^2 + (y-d)^2] [x^2 + y^2]^2}$$

$$D_2 = \det \begin{bmatrix} dh_1 \\ dh_2 \\ dL_{g_1} h_2 \end{bmatrix} = \frac{dy((y-d) \cos \theta - x \sin \theta)}{[x^2 + (y-d)^2] [x^2 + y^2]^2}$$

$$D_3 = \det \begin{bmatrix} dh_1 \\ dh_2 \\ dL_{g_2} L_{g_1} h_1 \end{bmatrix} = -\frac{d(y-d)(y \sin \theta + x \cos \theta)}{[x^2 + (y-d)^2] [x^2 + y^2]^2}$$

Si noti che i punti in cui sono situati i markers sono da escludersi perché in questi punti le funzioni  $h_1$  e  $h_2$  non sono definite.

Svolgendo i calcoli sui determinanti ottengo i seguenti risultati

$$D_1 = 0 \quad \text{se} \quad \begin{cases} y = d \\ d = 0 \\ \frac{y}{x} = \tan \theta \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \theta = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 0 \end{cases}$$

$$D_2 = 0 \quad \text{se} \quad \begin{cases} y = 0 \\ d = 0 \\ \frac{y-d}{x} = \tan \theta \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \theta = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 0 \end{cases}$$

$$D_3 = 0 \quad \text{se} \quad \begin{cases} y = d \\ d = 0 \\ \frac{y}{x} = -\tan \theta \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \theta = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

I tre minori si annullano contemporaneamente quando  $d = 0$ , cioè i markers sono coincidenti. Quindi se i markers coincidono il sistema non é osservabile e gli stati indistinguibili appartengono alla superficie  $\theta - \text{atan} \frac{y}{x} = \pi$ .

Infine osserviamo che se rinunciamo ad uno degli ingressi ottengo

1. caso in cui rinuncio a ruotare

$$\omega = \dot{\theta} = 0 \rightarrow \det \begin{bmatrix} dh_1 \\ dh_2 \\ dL_{g_1}h_1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} dh_1 \\ dh_2 \\ dL_{g_1}h_2 \end{bmatrix} = 0 \text{ per } \begin{cases} \theta = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 0 \end{cases}$$

cioé siamo nella seguente situazione

2. caso in cui rinuncio a avanzare

$$v = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} dh_1 \\ dh_2 \\ dL_{g_2}h_1 \end{bmatrix} = 0 \text{ sempre}$$

quindi il sistema non é osservabile solo ruotando.



# Capitolo 4

## Controllo di Sistemi Nonlineari

### 4.1 Introduzione

Vi sono due problemi fondamentali:

- Stabilizzazione
- Inseguimento (tracking)

La stabilizzazione consiste nel trovare un ingresso  $u(x)$  tale da rendere il sistema nonlineare  $\dot{x} = f(x, u(x))$ , asintoticamente (esponenzialmente) stabile attorno ad un punto di equilibrio  $x_0$ .

Il tracking si riferisce a un modello ingresso-uscita

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases}$$

e cerca di trovare  $u(x)$  tale che  $y(t) \rightarrow y_d(t)$  asintoticamente.

Ricordiamo che la stabilizzabilità si può ottenere con metodi lineari “robusti”, localmente: ( $\dot{x} = Ax + Bu + hot$ ) se  $(A, B)$  è stabilizzabile.

I metodi di linearizzazione feedback sono più potenti perché:

- a) valgono anche per sistemi con linearizzato che abbia poli non controllabili, marginalmente stabili;
- b) pur se si ottengono ancora risultati solo locali, sono spesso più ampi.

### 4.2 Linearizzazione Input-Stati

L’idea è quella, dato un sistema nonlineare del tipo

$$\dot{x} = f(x) + \sum_j g_j(x)u_j$$

e un punto di equilibrio

$$f(x_0) = 0,$$

di trovare un cambio di variabili  $z = \Phi(x)$  tale che

$$\Phi(x_0) = 0$$

e

$$\dot{z} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)} (f(\Phi^{-1}(z)) + \sum_j g_j(\Phi^{-1}(z))u_j) = Az + Bu$$

con  $z(0) = 0$ .

Cioè ottenere un sistema lineare nelle nuove variabili di stato  $z$  equivalente a quello iniziale, con punto di equilibrio in  $z(0)$ .

Questi sistemi sono sostanzialmente lineari, anche se appaiono in forma “travisata”.

Riconoscerli può non essere banale. Una condizione necessaria e sufficiente per capire se ci troviamo di fronte ad un sistema di questo tipo o meno, ci viene dal seguente teorema:

**Theorem 4** (H. Nijmijer, A.J. Van der Schaft). *Dato il sistema*

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i$$

con  $f(x_0) = 0$ , esiste un cambiamento di variabili  $\Phi(x) = z$  tale che  $\dot{z} = Az + Bu$ , con  $(A, B)$  coppia controllabile, se e solo se

- a)  $\dim(\text{span}\{ad_f^j g_i(x), i = 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n-1\}) = n \forall x \in \mathcal{B}(x_0)$ ;
- b)  $[ad_f^k g_i, ad_f^l g_j] = 0 \forall i, j, k, l; x \in \mathcal{B}(x_0)$ .

La condizione (a) corrisponde a chiedere che il linearizzato approssimante sia controllabile. La condizione (b) esclude tutti i sistemi onolomi.

Comunque i casi in cui si verificano queste ipotesi sono molto rari. In effetti, avendo il progettista a disposizione gli ingressi, egli ha la possibilità di riportare il sistema ad una forma lineare nella quale applicare le tecniche note del controllo lineare.

**Esempio.**

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\cos(\arcsin x_1)[x_2^{\frac{1}{3}} - u_1] \\ \dot{x}_2 = 3x_2^{\frac{2}{3}} \arcsin x_1 + 3x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{z}_1 = \arcsin x_1 \\ \dot{z}_2 = x_2^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \dot{z}_1 &= \frac{1}{\cos(\arcsin x_1)} \dot{x}_1 \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)} = -x_2^{\frac{1}{3}} + u_1 \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)} = -z_2 + u_1 \\ \dot{z}_2 &= \frac{1}{3} x_2^{-\frac{2}{3}} \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)} \dot{x}_2 = z_1 + z_2 \end{aligned}$$

cioè

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

\*\*\*

Un problema di maggior interesse pratico è quello della linearizzazione in retroazione.

Si consideri ad esempio lo schema (SISO) in figura, nel quale l'ingresso  $u$  è ottenuto mediante retroazione (nonlineare) degli stati come

$$u(x) = \alpha(x) + \beta(x)v, \quad \beta(x) \neq 0 \text{ con } v \text{ nuovo riferimento.}$$

Vediamo quando è possibile trovare funzioni  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$  e coordinate  $z = \Phi(x)$  tali che nelle nuove coordinate il sistema sia lineare

$$\dot{z} = Az + Bv$$

e controllabile <sup>1</sup>.

### Esempio.

Scriviamo l'equazione della dinamica di un link collegato a un motore elettrico:

$$\tau = I\ddot{q} + mgL \sin q.$$

Pongo

$$\tau = mgL \sin q + Iv \Rightarrow \ddot{q} = v$$

cioè

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v$$

---

<sup>1</sup> Siccome ci è data la possibilità di scegliere una retroazione degli stati sugli ingressi, possiamo sempre imporre la posizione dei poli di  $A$ , in particolare chiederemo che siano tutti nell'origine e che la coppia  $(A, B)$  sia in forma canonica di controllo:

$$A = \left( \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \vdots & & I & \\ 0 & & & \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right); \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Esempio.**

Si supponga adesso che il link collegato al motore abbia una certa cedevolezza.

Le equazioni del sistema diventano

$$\begin{cases} I\ddot{q}_1 + mgL \sin q_1 + k(q_1 - q_2) = 0 \\ J\ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) = \tau \end{cases}$$

cioè

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1 \\ x_2 &= \dot{q}_1 \\ x_3 &= q_2 \\ x_4 &= \dot{q}_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{mgL}{I} \sin x_1 - \frac{k}{I}(x_1 - x_3) \\ x_4 \\ \frac{k}{J}(x_1 - x_3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \end{pmatrix} \tau$$

Il controllo entra nella seconda equazione, e la nonlinearità nella prima.

Tipicamente, lo scopo è controllare il link  $q_1$ .

Si consideri l'uscita

$$y = q_1 = x_1$$

e le sue derivate

$$\dot{y} = x_2$$

$$\ddot{y} = -a \sin x_1 - b(x_1 - x_3)$$

$$y^{(iii)} = -a \cos x_1 \dot{x}_1 - b\dot{x}_1 + b\dot{x}_3 = -a \cos x_1 x_2 - bx_2 + bx_4$$

$$\begin{aligned} y^{(iv)} &= a \sin x_1 x_2^2 - a \cos x_1 \dot{x}_2 - b\dot{x}_2 + b\dot{x}_4 = \\ &= [a \sin x_1 x_2^2 + (a \cos x_1 + b)(a \sin x_1 + b(x_1 - x_3))] + b\frac{k}{J}(x_1 - x_3) + \frac{b}{J}\tau \end{aligned}$$

dove  $a = \frac{mgL}{I}, b = \frac{k}{I}$ .

Ponendo

$$\tau = -[a \sin x_1 x_2^2 + (\dots)(\dots) + b\frac{k}{J}(x_1 - x_3)]\frac{J}{b} + \frac{J}{b}v$$

si ottiene

$$y^{(iv)} = v.$$

Per stabilizzare  $q_1$ , basterà quindi porre

$$v = -c_0 y - c_1 \dot{y} - c_2 \ddot{y} - c_3 y^{(iii)}$$

da cui si ha

$$y^{(iv)} + c_3 y^{(iii)} + c_2 \ddot{y} + c_1 \dot{y} + c_0 y = 0$$

in questo modo, scegliendo i  $c_i$  opportunamente, si può fissare la posizione dei poli.

Si noti che sostanzialmente se scrivo

$$\begin{cases} z_1 = y = q_1 = x_1 \\ z_2 = \dot{z}_1 \\ z_3 = \dot{z}_2 \\ z_4 = \dot{z}_3 \end{cases} \quad \text{ottengo} \Rightarrow \dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v$$

e la retroazione è  $v = kz$ ,  $k = -(c_0 \ c_1 \ c_2 \ c_3)$ .

\*\*\*

Vediamo il caso generale (SISO):

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}$$

se il sistema è di questo tipo l'uscita non contiene  $u$ . Deriviamo l'uscita  $y$ :

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial h}{\partial x} (f(x) + g(x)u) = L_f h + L_g h u.$$

Se  $L_g h = 0$ , anche la derivata prima dell'uscita non contiene l'ingresso; calcoliamo le derivate successive dell'uscita

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \frac{\partial L_f h}{\partial x} \dot{x} = L_f^2 h + L_g L_f h u \\ &\vdots \\ y^{(r)} &= L_f^{(r)} h + L_g L_f^{(r-1)} h u \end{aligned}$$

Supponiamo che:

- $L_g L_f^i h = 0, \quad i = 0, 1, \dots, r-2$
- $L_g L_f^{(r-1)} h \neq 0$

sotto queste ipotesi il sistema si dice *di grado relativo*  $r$  (C.N.S.).

Quindi il grado relativo di un sistema rappresenta il numero di volte che si deve derivare la sua uscita per far comparire l'ingresso  $u$ .

Anche per i sistemi lineari può essere calcolato il grado relativo <sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup> In questo caso corrisponde alla differenza poli-zeri nella funzione di trasferimento

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Ricavando  $u$  dalla derivata  $r$ -esima di  $y$  e ponendo  $v = y^{(r)}$  otteniamo un ingresso in controreazione del tipo scelto all'inizio

$$u = -\frac{L_f^r h}{L_g L_f^{r-1} h} + \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h} v = \alpha(x) + \beta(x)v$$

$$\alpha(x) = -\frac{L_f^r h}{L_g L_f^{r-1} h} \quad \beta(x) = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h}$$

con  $v = y^{(r)}$ .

Possiamo allora usare le derivate successive di  $y$  per un cambio di variabili

$$\begin{aligned} z_1 &= y = h(x) \\ z_2 &= \dot{y} = L_f h(x) \\ &\vdots \\ z_r &= y^{(r-1)} = L_f^{r-1} h(x) \end{aligned}$$

Nel caso in cui  $r = n$  resta solo da verificare che

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ L_f^2 h(x) \\ \vdots \\ L_f^{r-1} h(x) \end{pmatrix}$$

sia un cambio di variabili ammissibile, cioè che le  $r$  funzioni siano *indipendenti*; ovvero le righe  $[dh(x_0), dL_f h(x_0), \dots, dL_f^{r-1} h(x_0)]$  sono indipendenti se  $r$  è il grado relativo <sup>3</sup>. Dunque, se il sistema iniziale ha grado relativo  $r = n$  rispetto all'uscita  $y$  e il cambio di variabili è ammissibile, posso scrivere il sistema nelle nuove coordinate <sup>4</sup> ed ottenere una *linearizzazione esatta*

$$\left. \begin{array}{l} L_g(Cx) = CB = 0 \\ L_g L_f(Cx) = CAB = 0 \\ \vdots \\ L_g L_f^{r-1}(Cx) = CA^{r-1}B \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_{n-r+1} s^{n-r}}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n}.$$

Infatti come è noto dalla teoria dei sistemi lineari, il grado relativo  $r$  è indicato dal primo coefficiente di Markov non nullo.

<sup>3</sup> Per la dimostrazione vedi Lemma 4.1.1 sul testo *Nonlinear Control Systems* di A. Isidori.

<sup>4</sup> Se  $L_g L_f^k h = 0, \forall k \Rightarrow h(x)$  non dipende da  $u$ ; infatti sotto queste ipotesi lo sviluppo in serie di Taylor di  $h(x)$  attorno ad un punto  $x_0$  assume la forma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} L_f^k h(x)|_{x=x_0} \frac{(t-t_0)^k}{k!}.$$

in feedback

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \vdots & \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= b(z) + a(z)u \end{cases}$$

che corrisponde ad un sistema lineare con reazione del tipo scelto,  $u = -\frac{b(z)}{a(z)} + \frac{v}{a(z)}$ .

Il fatto che il sistema abbia grado relativo  $r = n$ , non dipende solamente dalla forma del sistema, ma anche dalla funzione di uscita  $h(x)$  scelta.

In effetti, è facile dimostrare che  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  è linearizzabile in feedback se e solo se esiste una funzione  $\lambda(x)$  (che potrei non conoscere), che dà grado relativo  $r = n$ . Cerchiamo di capire per quali sistemi è possibile trovare  $\lambda(x)$ , che possa soddisfare:

$$\begin{cases} L_g h(x) = L_g L_f h(x) = \dots = L_g L_f^{n-2} h(x) = 0 \\ L_g L_f^{n-1} h(x) \neq 0 \end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases} L_g \lambda(x) = L_{ad_f g} \lambda(x) = \dots = L_{ad_f^{n-2} g} \lambda(x) = 0 \\ L_{ad_f^{n-1} g} \lambda(x) \neq 0 \end{cases}$$

(abbiamo supposto  $r = 1$ , allora  $n - r - 1 = n - 2$ ).

**Theorem 5.** *Condizione Necessaria e Sufficiente affinché esista una funzione  $\lambda(x)$  che, presa come uscita del sistema  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  con  $f(x_0) = 0$ , dia grado relativo  $n$*

ovvero

*affinché esistano un cambiamento di variabili  $\Phi(x)$  e le funzioni di retroazione statica  $\alpha(x)$  e  $\beta(x)$  tali da linearizzare il sistema detto*

è che

A)  $\text{rank}[g(x_0) \ ad_f g(x_0) \ \dots \ ad_f^{n-1} g(x_0)] = n;$

B)  $\text{span}\{g, \ ad_f g, \ \dots, \ ad_f^{n-2} g\}$  sia involutivo.

Nel caso SISO, la condizione IFF composta da:

a)  $\dim \text{span}\{g, \ ad_f g, \ \dots, \ ad_f^{n-1} g\} = n;$

b) la distribuzione  $\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-1} g\}$  è involutiva.

In alcuni casi l'idea è banale.

**Esempio.**

Riprendiamo l'equazione della dinamica di un link collegato a un motore:

$$\tau = I\ddot{q} + mgL \sin q.$$

Ponendo  $x = [x_1, x_2]^T = [q, \dot{q}]^T$  e  $u = \tau$ , si ottiene

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{mgL}{I} \sin x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \end{pmatrix} u.$$

Ponendo poi  $u = mgL \sin x_1 + Iv$ , si ottiene

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v.$$

A questo punto, il progetto di  $v$  può essere affrontato con i classici metodi per sistemi lineari, potendo imporre comportamenti arbitrari per il sistema controllato.

**Esempio.**

Nel caso del link con cedevolezza la cosa è meno banale:

$$\begin{cases} I\ddot{q}_1 + mgL \sin q_1 + k(q_1 - q_2) = 0 \\ J\ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) = \tau. \end{cases}$$

Si noti che in questo caso la nonlinearietà compare nella prima equazione mentre il controllo nella seconda. Ponendo  $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2]^T$  ed indicando con

$$f = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{mgL}{I} \sin x_1 - \frac{k}{I}(x_1 - x_3) \\ x_4 \\ \frac{k}{J}(x_1 - x_3) \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \end{pmatrix},$$

otteniamo

$$[g, [f g], [f[f g]], [f[f[f g]]]] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{k}{IJ} \\ 0 & 0 & \frac{k}{IJ} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} & 0 & \frac{k}{J^2} \\ \frac{1}{J} & 0 & -\frac{k}{J^2} & 0 \end{pmatrix},$$

che ha rango 4 se  $k \neq 0$  e  $IJ < \infty$ . Inoltre  $g$ ,  $ad_f g$ ,  $ad_f^2 g$  sono costanti e di conseguenza sono involutivi. Quindi deve essere possibile trovare  $\lambda(x)$ .

Come si trovano  $\Phi(x)$ ,  $\alpha(x)$  e  $\beta(x)$ ?

La prima componente di  $\Phi(x)$ ,  $z_1 = \Phi_1(x)$ , è scelta come quella superficie tangente a  $g$ ,  $[f g]$ ,  $\dots$ ,  $ad_f^{n-2} g$  (che sicuramente esiste), ma naturalmente non a  $ad_f^{n-1} g$ . Quindi

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} g = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} [f g] = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} [f[f g]] = 0$$

⋮

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} ad_f^{n-2} g = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} ad_f^{n-1} g \neq 0$$

Nel caso in esame si ha

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} g = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_4} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} [f g] = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} [f[f g]] = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} ad_f^3 g \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \neq 0$$

$\Phi_1$  deve essere funzione di  $x_1$  solamente. Ad esempio  $\Phi_1(x) = x_1$ . Le altre componenti di  $\Phi$  si ottengono così:

$$\Phi_2 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} f = x_2 = L_f \Phi_1(x)$$

$$\Phi_3 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} f = -\frac{mgL}{I} \sin x_1 - \frac{k}{I}(x_1 - x_3) = L_f^2 \Phi_1(x)$$

$$\Phi_4 = \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} f = -\frac{mgL}{I} x_2 \cos x_1 - \frac{k}{I}(x_2 - x_4) = L_f^3 \Phi_1(x).$$

Infine,

$$\begin{cases} \alpha(x) = \frac{L_f^n \Phi_1}{L_g L_f^{n-1} \Phi} = \frac{L_f^4 \Phi_1}{L_g L_f^3 \Phi_1} \\ \beta(x) = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} \Phi_1} = \frac{1}{L_g L_f^3 \Phi_1}, \end{cases}$$

ed essendo

$$L_f^4 \Phi_1(x) = a(x)$$

$$L_g L_f^3 \Phi_1(x) = \frac{k}{IJ},$$

con

$$a(x) = \frac{mgL}{I} \sin x_1 (x_2^2 + \frac{mgL}{I} \cos x_2 + \frac{k}{I}) + \frac{k}{I} (x_1 - x_3) (\frac{k}{I} + \frac{k}{J} + \frac{mgL}{I} \cos x_1),$$

si ottiene il controllo in retroazione linearizzante

$$u = \frac{IJ}{k}(v - a(x)) = -\frac{IJ}{k}a(x) + \frac{IJ}{k}v. \quad (4.1)$$

Con il cambiamento di coordinate precedentemente scelto e con il controllo definito in (4.1), si ottiene

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \dot{z}_3 = z_4 \\ \dot{z}_4 = v \end{cases}$$

### 4.2.1 Procedura Operativa (Sistemi SISO)

Riassumiamo i passi da compiere per trovare un ingresso linearizzante e un cambio di coordinate:

- calcolare  $ad_f^i g$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ ;
- verificare le condizioni necessarie e sufficienti (A) e (B);
- dalle equazioni differenziali alle derivate parziali

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} [g(x) \dots ad_f^{n-2} g] = 0$$

integrare  $\lambda(x)$

- porre

$$\alpha(x) = -\frac{L_f^n \lambda(x)}{L_g L_f^{n-1} \lambda(x)}$$

$$\beta(x) = -\frac{1}{L_g L_f^{n-1} \lambda(x)}$$

- cambiare le coordinate con

$$\Phi(x) = (\lambda(x), L_f \lambda(x), \dots, L_f^{n-1} \lambda(x))$$

**Esempio.**

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x_2 \\ \sin x_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$[f \ g] = \begin{pmatrix} 0 \\ -c_3 \\ 0 \end{pmatrix}; [f \ [f \ g]] = \begin{pmatrix} c_2 c_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3; [g \ [f \ g]] = \begin{pmatrix} 0 \\ s_3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{span}\{g, [f \ g]\}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \lambda}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} c_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = x_1 = z_1 \\ L_f \lambda = s_2 = z_2 \\ L_f^2 \lambda = c_2 s_3 = z_3 \\ L_f^3 \lambda = -s_3^2 s_2 \\ L_g L_f^2 \lambda = c_2 c_3 \end{cases}$$

quindi

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v = s_3 T_2 T_3 + \frac{1}{c_2 c_3} v$$

definito su

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} < x_2 < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} < x_3 < \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Il nostro sistema, con una retroazione opportuna,  $v = kz$ , ha tutti i poli in  $-1$ :

$$\begin{aligned} (s+1)^3 &= s^3 + 3s^2 + 3s + 1 \\ k &= (-1 \quad -3 \quad -3). \end{aligned}$$

\*\*\*

**Osservazione:** la completa controllabilità dell'approssimazione lineare è condizione necessaria alla linearizzazione in retroazione.

Infatti, supponiamo senza perdere di generalità che sia  $f(0) = 0$  (se fosse  $f(x_0) = 0$ , si potrebbe considerare il sistema traslato in  $x_0$ ) ed effettuiamo la seguente scomposizione

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \Leftrightarrow \dot{x} = Ax + \hat{f}(x) + \hat{g}(x)u + Bu,$$

con

$$\begin{aligned} \hat{f}(0) &= 0 & \hat{g}(0) &= 0 \\ B &= g(0) \\ A &= \frac{\partial f}{\partial x}|_{x=0} \Rightarrow \frac{\partial \hat{f}}{\partial x}|_{x=0} = 0 \end{aligned}$$

Calcolando

$$[f, g] = [Ax + \hat{f}, B + \hat{g}] = \frac{\partial \hat{g}}{\partial x} Ax + \frac{\partial \hat{g}}{\partial x} \hat{f} - AB - A\hat{g} - \frac{\partial \hat{f}}{\partial x} B - \frac{\partial \hat{f}}{\partial x} \hat{g}$$

troviamo

$$[f, g]|_0 = -AB$$

e in generale  $ad_f^k g = (-1)^k A^k B + p_k(x)$ , dove  $p_k(0) = 0$ .

Quindi

$$\text{rank}\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-1} g\}|_0 = \text{rank}[B, AB, \dots, A^{n-1} B].$$

Ciò significa che imporre la condizione (A) equivale a richiedere la completa controllabilità. Questo riduce il vantaggio della linearizzazione in retroazione (ingresso-stati), perché modi marginalmente stabili non-controllabili (ad esempio poli complessi coniugati posti sull'asse immaginario), ne impediscono l'applicazione.  $\triangleleft$

## 4.2.2 Linearizzazione Ingresso-Uscita

La linearizzazione esatta in retroazione (ingresso-stati) può essere inapplicabile in certi casi:

- a) se  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  non soddisfa le condizioni necessarie e sufficienti di esistenza di una funzione di “uscita”  $\lambda(x)$  con grado massimo;
- b) se il sistema ha una uscita  $h(x)$  con significato fisico tale da imporne la scelta (soprattutto in problemi di inseguimento);
- c) se non si vuole o non si riesce ad integrare il sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali che definiscono l’uscita di grado relativo massimo.

In questi casi, si può comunque procedere ad una linearizzazione esatta, ancorché parziale (talvolta detta ingresso-uscita):

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}$$

$$L_g L_f^i h(x) = 0 \quad i = 0, 1, \dots, r-2$$

$$L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$$

$$r < n.$$

Posso ancora utilizzare le  $r$  funzioni indipendenti di cui dispongo come parte di un cambiamento di variabili:

$$\begin{aligned} z_1 &= \Phi_1(x) = h(x) \\ z_2 &= \Phi_2(x) = L_f h(x) \\ &\vdots \\ z_r &= \Phi_r(x) = L_f^{r-1} h(x) \end{aligned}$$

Ma restano da trovare  $n - r$  funzioni indipendenti da queste. Questo in sé non è difficile, spesso basta prendere alcuni dei “vecchi” stati. Procedendo come fatto nel caso  $r = n$ , la dinamica delle nuove  $r$  variabili è

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} = L_f h = z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1} &= z_r \\ \dot{z}_r &= L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x) u \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)} \\ &= b(z) + a(z)u \end{aligned}$$

mentre per le restanti  $n - r$  non ci possiamo aspettare nulla di speciale:

$$\begin{aligned}\dot{z}_{r+1} &= q_{r+1}(z) + p_{r+1}(z)u \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= q_n(z) + p_n(z)u\end{aligned}$$

L'uscita del nuovo sistema è naturalmente ancora

$$y = h(x) = z_1.$$

La dinamica delle variabili del secondo gruppo dunque non influenza questa uscita (dopo la retroazione).

La scelta delle  $n - r$  variabili "complementari" deve solo soddisfare la condizione di costruire, con le prime  $r$  funzioni, un cambiamento di variabili lecito (invertibile), cioè

$$\det \left[ \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_n \end{pmatrix} \right] \neq 0$$

nella regione d'interesse.

È comodo peraltro scegliere le variabili complementari  $\Phi_{r+1} \dots \Phi_n$  in modo che

$$L_g \Phi_i(x) = 0 \quad r+1 \leq i \leq n.$$

Infatti, in questo caso si ha

$$\begin{aligned}\dot{z}_{r+1} &= \frac{\partial \Phi_{r+1}}{\partial x} \dot{x} = L_f \Phi_{r+1}(x) + L_g \Phi_{r+1}(x)u = q_{r+1}(z) \\ &\vdots \\ z_n &= q_n(z)\end{aligned}$$

con  $x = \Phi^{-1}(z)$ .

Cosicché, la dinamica delle variabili complementari oltreché ininfluenza sull'uscita, è indipendente dagli ingressi.

Nelle nuove coordinate, possiamo dunque riscrivere il sistema nella forma "normale"

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_0 \xi + b_0 v \\ \dot{\eta} = q(\xi, \eta) \end{cases} \quad y = \xi_1 = c_0 \xi$$

dove

$$\xi = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix}; \quad \eta = \begin{pmatrix} z_{r+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix};$$

$$A_0 = \left( \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \vdots & & I & \\ 0 & & & \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right); \quad b_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$c_0 = (1 \ 0 \ \dots \ 0);$$

e l'ingresso in retroazione linearizzato è

$$u = -\frac{b(\xi, \eta)}{a(\eta, \xi)} + \frac{1}{a(\xi, \eta)}v$$

Se per le variabili  $\eta$  non vale  $L_g \Phi_{r-1}(x) = 0$ , si avrà più in generale

$$\dot{\eta} = q(\xi, \eta) + p(\xi, \eta)v$$

da un punto di vista ingresso-uscita, il sistema è linearizzato; la sua f.d.t. è

$$\frac{y(s)}{v(s)} = \frac{1}{s^r}$$

Resta però la dinamica “interna”, delle variabili  $\eta$ .

La stabilizzazione del sottosistema linearizzato è solo “esterna” e non implica che il sistema nel suo complesso non possa avere componenti divergenti e quindi inaccettabili.

È quindi fondamentale studiare cosa accade della dinamica delle variabili  $\eta$ .

Per far questo, studiamo il problema:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_0 \xi + b_0 v \\ v = k \xi \\ \dot{\eta} = p(\xi, \eta) \end{cases}$$

determinando quali stati iniziali  $(\eta_0, \xi_0)$  e quali controlli mantengono l'uscita costantemente a zero; questo perchè le evoluzioni a partire da questi stati iniziali e con quei controlli rappresentano i “modi” della parte inaccessibile  $\eta_0(t)$ .

Ricordando che

$$y \equiv \xi_1 \equiv 0 \Rightarrow \xi_2 \equiv \dot{\xi}_1 \equiv 0 \Rightarrow \xi_3 \equiv \dot{\xi}_2 \equiv 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \xi_r \equiv \dot{\xi}_{r-1} \equiv 0$$

perciò

$$\xi_0 = \xi(t) = 0$$

$$\xi_r = v \Rightarrow v \equiv 0 \Rightarrow u = -\frac{b(0, \eta)}{a(0, \eta)}$$

resta dunque

$$\dot{\eta} = q(0, \eta) \quad \eta_0 \text{ qualsiasi.}$$

Questa equazione in  $\eta$  viene chiamata *Zero Dinamica*.

Il nome Zero Dinamica deriva dall'analogia con il comportamento dei sistemi lineari che possiedono un polinomio degli zeri:

$$G(s) = k \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_{n-r-1} s^{n-r-1} + s^{n-r}}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n}$$

realizzato in forma minima (canonica di controllo) come

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

$$A = \left( \begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & I & \\ \hline -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} & \end{array} \right); \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k \end{pmatrix}; \quad C = (b_0 \dots b_{n-r-1} \ 1 \ 0 \ \dots \ 0).$$

Trattando  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $y = Cx$  come sistema non lineare, la sua forma normale è ottenuta ponendo

$$\begin{aligned} \xi_1 &= y = Cx = b_0 x_1 + \dots + x_{n-r+1} \\ \xi_2 &= \dot{y} = CAx = b_0 x_2 + \dots + x_{n-r+2} \\ &\vdots \\ \xi_r &= y^{(r-1)} = CA^{r-1}x = b_0 x_r + \dots + x_n \end{aligned}$$

e scegliendo per complemento

$$\begin{aligned} \eta_1 &= x_1 \\ &\vdots \\ \eta_{n-r} &= x_{n-r}. \end{aligned}$$

Per questa scelta, si ha

$$\frac{\partial}{\partial x} \Phi(x) = \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \eta(x) \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{cccc|cccc} b_0 & b_1 & \dots & b_{n-r-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & \dots & b_{n-r-2} & b_{n-r-1} & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_0 & b_{r+1} & \dots & b_{n-r-1} & 1 \\ \hline 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right)$$

quindi lo jacobiano è sicuramente non-singolare e inoltre  $L_g\eta(x) = (I_{n-r} \mid 0)B = 0$ .

La forma normale è dunque

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_0\xi + b_0v \\ \dot{\eta} = q(\xi, \eta) = P\xi + Q\eta \end{cases}$$

La dinamica di  $\eta$  è infatti certamente lineare; per di più vale

$$Q = \left( \begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & I & \\ \hline -b_0 & -b_1 & \dots & -b_{n-r-1} & \end{array} \right)$$

infatti

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \dot{x}_1 = x_2 = \eta_2 \\ &\vdots \\ \dot{\eta}_{n-r-1} &= \eta_{n-r} \\ \dot{\eta}_{n-r} &= \dot{x}_{n-r} = x_{n-r+1} = \\ &= \xi_1 - b_0\eta_1 - b_1\eta_2 - \dots - b_{n-r-1}\eta_{n-r} \end{aligned}$$

La Zero Dinamica è quindi

$$\dot{\eta} = q(0, \eta) = Q\eta$$

cioè, ha polinomio caratteristico

$$b_0 + b_1s + \dots + b_{n-r-1}s^{n-r-1} + s^{n-r}$$

ovvero il polinomio degli zeri di  $G(s)$ . Gli zeri di trasmissione sono proprio quei valori di  $s \in \mathcal{C}$  per i quali esistono condizioni iniziali tali per cui l'ingresso  $e^{st}$  lascia invariata l'uscita.

L'importanza dello studio della zero dinamica discende dal seguente teorema.

**Theorem 6.** *Con riferimento alla forma normale*

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_0\xi + b_0v \\ \dot{\eta} = q(\xi, \eta) \\ y = \xi_1 \end{cases}$$

*una retroazione  $v = v(\xi) = k\xi$ , con  $k = (-k_0 \dots -k_r)$  coefficienti di un polinomio a radici con parte reale negativa, rende certamente asintoticamente stabile il sistema non lineare originale se la Zero Dinamica  $\dot{\eta} = q(0, \eta)$  è asintoticamente stabile (in  $\eta_0 = 0$ ).*

Il controllo che effettivamente stabilizza il sistema originale

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}$$

è

$$u(x) = -\frac{L_f^r h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)} + \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)} (-k_0 \Phi_1(x) - \dots - k_{r-1} \Phi_{r-1}(x)).$$

Il risultato è quasi banale se l'approssimazione lineare del sistema è stabilizzabile. Il linearizzato approssimante è infatti

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ \star & Q \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_0 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

con autovalori unione di quelli di  $A$  e quelli di  $Q$  (con  $Q$  vuota se il sistema originario è controllabile e  $Q$  stabile se il sistema originario è stabilizzabile). Il punto importante è che la zero dinamica può esser dimostrata stabile anche quando la sua linearizzazione è solo marginalmente stabile; cioè possono essere resi asintoticamente stabili anche sistemi la cui approssimazione lineare possiede autovalori sull'asse immaginario.

### Esempio.

Prendiamo un sistema con:

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_3 - x_2^3 \\ -x_2 \\ x_1^2 - x_3 \end{pmatrix}; \quad g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad y(x) = x_1.$$

Calcoliamo il grado relativo

$$\begin{aligned} h(x) &= x_1 \\ L_f h(x) &= (1 \ 0 \ 0) f(x) = x_3 - x_2^3 \\ L_g h(x) &= (1 \ 0 \ 0) g(x) = 0 \\ L_f^2 h(x) &= (0 \ -3x_2^2 \ 1) f(x) = 3x_2^3 + x_1^2 - x_3 \\ L_g L_f h(x) &= (0 \ -3x_2^2 \ 1) g(x) = 3x_2^2 + 1 \neq 0 \\ &\Rightarrow r = 2 \end{aligned}$$

Esiste un'altra uscita con  $r = 3$ ?

Verifichiamo le condizioni (A) e (B):

$$ad_f g = [f \ g] = - \begin{pmatrix} 0 & -2x_2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2x_1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_2^2 - 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$ad_f^2 g = \begin{pmatrix} 3x_2^2 - 1 \\ -1 \\ 6x_1x_2 + 2x_1 + 1 \end{pmatrix}$$

$$[g [f g]] = \begin{pmatrix} 6x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3x_2^2 - 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

La condizione (B) è verificata, ma la (A) non lo è ...

$$\text{rank} [g(x) \ ad_f g(x) \ ad_f^2 g(x)]|_{x=0} = 2$$

Non esiste allora una funzione  $\lambda(x)$  che dia grado relativo massimo per effettuare una linearizzazione esatta.

Scegliamo le nuove coordinate:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 \\ \xi_2 &= L_f h = x_3 - x_2^3 \end{aligned}$$

$\eta_1(x)$ :

$$L_g \eta_1 = 0$$

$$d\eta_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \begin{cases} \nearrow \eta_1 = \alpha x_1 \\ \searrow \eta_1 = \alpha x_2 + \alpha x_3 \end{cases}$$

la scelta  $\eta = \alpha x_1$  non è indipendente da  $\xi_1 = x_1$ ; quindi scelgo  $\eta = x_2 + x_3$  (con la costante  $\alpha = 1$ ).

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 - x_2^3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix};$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3x_2^2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Forma normale:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= (x_1^2 + 3x_2^3 + x_3) + (3x_2^2 + 1)u \\ \dot{\eta}_1 &= \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} (f + gu) = x_1^2 - x_2 - x_3 = \xi_1^2 - \eta_1 \\ y &= \xi_1 \end{aligned}$$

Zero dinamica:

$$y \equiv 0 \Rightarrow \xi_1 \equiv 0, \xi_2 \equiv 0 \Rightarrow \dot{\eta}_1 = -\eta_1, \forall \eta_1(0)$$

$$\begin{cases} u = -\frac{x_1^2 + 3x_2^3 - x_3}{3x_2^2 + 1} + \frac{1}{3x_2^2 + 1}v \\ v = (k_1 \ k_2) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$\Rightarrow$  Il sistema è asintoticamente stabile (esternamente e internamente).

### 4.3 Inseguimento di traiettorie

Supponendo che il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}$$

abbia grado relativo  $r$  e che sia stato posto nella forma normale

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_0\xi + b_0\nu \\ \dot{\eta} = q(\eta, \xi) + p(\eta, \xi)\nu \end{cases}$$

utilizzando l'ingresso linearizzante

$$u = -\frac{b(\eta, \xi)}{a(\eta, \xi)} + \frac{1}{a(\eta, \xi)}\nu,$$

desideriamo inseguire una traiettoria assegnata per l'uscita

$$y(t) = \hat{y}(t).$$

Perché l'inseguimento sia perfetto, dovremo supporre

$$y(0) = h(x_0) = \hat{y}(0),$$

e se definisco il vettore

$$\hat{\xi} = \begin{pmatrix} \hat{y} \\ \dot{\hat{y}} \\ \vdots \\ \hat{y}^{(r-1)} \end{pmatrix}$$

si ha che

$$y(t) \equiv \hat{y}(t), \forall t \Leftrightarrow \xi(t) = \hat{\xi}(t).$$

In pratica tutto ciò implica che le variabili di stato  $\xi$  coincidano con l'uscita e le sue derivate in un intorno di  $t = 0$ .

In questo caso, scegliendo l'ingresso  $\nu = \hat{y}^{(r)}$ , cioè

$$u = -\frac{b(\eta, \hat{\xi})}{a(\eta, \hat{\xi})} + \frac{1}{a(\eta, \hat{\xi})} \hat{y}^{(r)}.$$

con  $\eta$  soluzione di

$$\dot{\eta} = q(\hat{\xi}, \eta) + p(\hat{\xi}, \eta) \hat{y}^{(r)}$$

otteniamo lo scopo:

$$y^{(r)} = \dot{\xi}_{r-1} = b(\xi, \eta) + a(\xi, \eta) \left\{ -\frac{b(\xi, \eta)}{a(\xi, \eta)} + \frac{1}{a(\xi, \eta)} \hat{y}^{(r)} \right\} = \hat{y}^{(r)}.$$

Naturalmente, nella pratica è difficile poter fissare gli stati iniziali del sistema e allo stesso tempo condizioni iniziali sbagliate non permetterebbero di ottenere questo risultato. In tale caso, quanto di meglio si può chiedere è un inseguimento asintotico cioè tale che  $\|y(t) - \hat{y}(t)\| \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow \infty$ .

Questo si ottiene sfruttando il controllo "lineare"  $\nu$ :

$$\nu = \hat{y}^{(r)} - c_{r-1}(\xi_r - \hat{\xi}_r) - \dots - c_0(\xi_1 - \hat{\xi}_1)$$

Fissato

$$e = \xi - \hat{\xi}$$

il vettore di errore, ho

$$\nu = \hat{y}^{(r)} - c^T e \text{ con } c^T = (c_0 \ c_1 \ \dots \ c_{r-1})$$

$$\dot{\xi}_r = \hat{y}^{(r)} - c^T e \Rightarrow e_1^{(r)} + c_{r-1} e_1^{(r-1)} + \dots + c_0 e_1 = 0.$$

Scegliendo i coefficienti  $c_i$  in modo opportuno, l'errore di inseguimento viene fatto convergere a zero con dinamica arbitraria (lineare).

Riconsideriamo la dinamica delle variabili  $\eta$ :

$$\dot{\eta} = q(\xi, \hat{\xi}) + p(\eta, \hat{\xi}) \hat{y}^{(r)}$$

e l'ingresso

$$u = -\frac{b(\xi, \eta)}{a(\xi, \eta)} + \frac{1}{a(\xi, \eta)} \hat{y}^{(r)}$$

Notando che  $\hat{y}(t)$  (quindi  $\hat{y}^{(r)}$ ,  $\hat{\xi}(t)$ ) sono assegnati, posso vederlo come un sistema che, prendendo le uscite desiderate per ingresso, fornisce come uscita gli ingressi necessari all'inseguimento, usando come stati gli  $\eta$ : *Sistema*

*Inverso.*

Il problema residuo nell'inseguimento è la limitatezza di  $\eta$ ,  $\xi$  ed  $u$ .

**Theorem 7.** *Sotto le seguenti ipotesi:*

- se  $\hat{y}(t), \dot{\hat{y}}(t), \dots, \hat{y}^{(r)}$  sono sufficientemente “piccoli”,
- se  $\dot{\eta} = f(\eta, \hat{y})$  è asintoticamente stabile e limitata,
- e se  $c$  ha coefficienti Hurwitz,

$\Rightarrow \eta, \xi$  sono limitati.

## 4.4 Linearizzazione in retroazione MIMO

Consideriamo un sistema “quadrato”

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \\ y_1 = h_1(x) \\ \vdots \\ y_m = h_m(x) \end{cases}$$

e procediamo, analogamente al caso SISO, a differenziare le uscite finché non appare esplicitamente almeno uno degli ingressi:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = h_1(x) \\ \dot{y}_1 = L_f h_1(x) \\ \vdots \\ y_1^{(r_1)} = L_f^{r_1} h_1(x) + L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x) u_1 + \dots + L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x) u_m \\ \quad \text{(dove almeno una delle } L_{g_i} L_f^{r_1-1} h_1(x) \neq 0) \\ \\ y_2 = h_2(x) \\ \dot{y}_2 = L_f h_2(x) \\ \vdots \\ y_2^{(r_2)} = L_f^{r_2} h_2(x) + \sum_{i=1}^m L_{g_i} L_f^{r_2-1} h_2(x) u_i \\ \quad \text{(dove almeno una delle } L_{g_i} L_f^{r_2-1} h_2(x) \neq 0) \\ \\ \vdots \\ \vdots \\ \\ y_m = h_m(x) \\ \dot{y}_m = L_f h_m(x) \\ \vdots \\ y_m^{(r_m)} = L_f^{r_m} h_m(x) + \sum_{i=1}^m L_{g_i} L_f^{r_m-1} h_m(x) u_i \\ \quad \text{(dove almeno una delle } L_{g_i} L_f^{r_m-1} h_m(x) \neq 0) \end{array} \right.$$

Consideriamo le ultime equazioni di queste catene in forma matriciale; si ha

$$\begin{pmatrix} y_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ y_m^{(r_m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_f^{r_1} h_1(x) \\ \vdots \\ L_f^{r_m} h_m(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

$$\underline{y} = \Gamma(x) + E(x)\underline{u}$$

Se la matrice  $E(x)$  è invertibile (in un intorno di un punto  $x_0$ ), si dice che il sistema ha grado relativo vettoriale

$$\underline{r} = (r_1 \dots r_m)^T$$

e grado relativo totale  $r = \sum_{i=1}^m r_i$ .

Se questo accade posso definire  $r$  funzioni dei vecchi stati

$$\begin{array}{lll} \xi_1^1 = \xi_1 = h_1(x) & \xi_1^2 = \xi_{r_1+1} = h_2(x) & \dots \quad \xi_1^m = \xi_{r+1} = h_m(x) \\ \xi_2^1 = \xi_1 = L_f h_1(x) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_{r_1}^1 = \xi_{r_1} = L_f^{r_1-1} h_1(x) & \xi_{r_2}^2 = \xi_{r_1+r_2} = L_f^{r_2-1} h_2(x) & \dots \quad \xi_{r_m}^m = \xi_r = L_f^{r_m-1} h_m(x) \end{array}$$

che sono indipendenti e altre  $(n - r)$  funzioni indipendenti da queste

$$\eta_1(x) \dots \eta_{n-r}(x)$$

tali che per  $i = 1, \dots, m$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi}_1^i = \xi_2^i \\ \dot{\xi}_2^i = \xi_3^i \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{r_i-1}^i = \xi_{r_i}^i \\ \\ \dot{\xi}_{r_i}^i = b_i(\xi, \eta) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(\xi, \eta) u_j \\ \\ \dot{\eta} = q(\xi, \eta) + \sum_{j=1}^m p_j(\xi, \eta) u_j \end{array} \right. \leftarrow \left\{ \begin{array}{l} y_1 = \xi_1^1 \\ y_2 = \xi_1^2 \\ \vdots \\ y_m = \xi_1^m \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{righe di } \Gamma(x), E(x) \\ \text{(con } x = \Phi^{-1}(\eta, \xi)) \\ \text{in cui interviene} \\ \text{l'ingresso} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Se poi trovo  $\eta(x) : L_{g_j} \eta(x) = 0 \forall j$ , scompare l'ultima sommatoria e resta  $\dot{\eta} = q(\eta, \xi)$  (ciò è possibile solo se  $\text{span}\{g_1 \dots g_m\}$  è involutivo).

Questa è detta *forma normale* per il sistema MIMO a m-ingressi e m-uscite.

Il problema della linearizzazione in retroazione per un sistema

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i$$

consiste nel trovare un vettore di  $m$  funzioni

$$\alpha(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1(x) \\ \vdots \\ \alpha_m(x) \end{pmatrix}$$

ed una matrice di  $m \times m$  funzioni

$$\beta(x) = \begin{pmatrix} \beta_{11}(x) & \dots & \beta_{1m}(x) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \beta_{m1}(x) & \dots & \beta_{mm}(x) \end{pmatrix}$$

tali che, ponendo

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = \alpha(x) + \beta(x)v$$

esista un cambio di coordinate  $\xi = \Phi(x)$  nel quale sia

$$\dot{\xi} = A\xi + Bu$$

$$A = \text{diag}(A_1, \dots, A_m), \quad B = \text{diag}(b_1, \dots, b_m)$$

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad b_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il problema è risolubile se e solo se esistono  $m$  funzioni di “uscita”  $h_1(x), \dots, h_m(x)$  rispetto alle quali il sistema ha grado relativo  $r_1, r_2, \dots, r_m$ , con

$$r_1 + r_2 + \dots + r_m = n.$$

In questo caso, le nuove coordinate sono scelte come visto sopra:

$$\xi_1^1 = h_1, \quad \xi_2^1 = \dot{h}_1 = L_f h_1, \quad \dots, \quad \xi_2^2 = h_2, \quad \text{etc.} \dots$$

Il controllo linearizzante è

$$U = -E^{-1}(x)\Gamma(x) + E^{-1}(x)\nu$$

(si ricordi l'ipotesi  $E(x)$  invertibile).

**Theorem 8.** *La linearizzazione esatta (completa) in retroazione è possibile per il sistema*

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i$$

se e solo se considerando:

$$\Gamma_0 = \text{span}\{g_1 \dots g_m\}$$

$$\Gamma_1 = \Gamma_0 + [f \Gamma_0]$$

$$\vdots$$

$$\Gamma_i = \Gamma_{i-1} + [f \Gamma_{i-1}] = \text{span}\{\text{ad}_f^k g_j, 0 \leq k \leq i, 1 \leq j \leq m\}$$

si ha ...

$$\dim \Gamma_i = \text{cost} \quad \text{in un intorno di } \bar{x}, \text{ per } i = 1, \dots, n-1$$

$$\dim \Gamma_{n-1} = \eta \quad (\text{controllo linearizzante approssimante})$$

$$\Gamma_i \text{ è involutiva, con } 0 \leq i \leq n-2.$$

**Osservazione:** se il sistema è SISO, la condizione coincide con quella vista. Se le uscite  $h_1(x) \dots h_m(x)$  sono già assegnate, ovvero se non è possibile trovarne di perfettamente linearizzanti, potrò procedere ad una linearizzazione parziale (ingresso-uscita). Se  $r_1 + \dots + r_m = r < n$  e  $E(x)$  è invertibile (cioè, è definito un grado relativo), posso sempre applicare il controllo

$$u(x) = -E^{-1}(x)\Gamma(x) + E(x)\nu$$

che ottiene la perfetta *noninterazione* e linearizzazione I/O:

$$\begin{array}{l} y_1^{(r_1)} = h_1^{(r_1)} = \nu_1 \\ y_2^{(r_2)} = h_2^{(r_2)} = \nu_2 \\ \vdots \end{array} \leftarrow \begin{cases} \text{catene di} \\ r_i \text{ integratori} \end{cases}$$

Intrinsecamente, restano  $n - r$  variabili di stato non “visibili” dal rapporto I/O:

$$\dot{\eta} = q(\xi, \eta) + p(\xi, \eta)u = q(\xi, \eta) - p(\xi, \eta)E^{-1}(\cdot)\Gamma(\cdot) + p(\xi, \eta)E^{-1}(\cdot)\nu$$

Si hanno risultati analoghi al caso SISO:

- i controlli  $\nu_i = -c_0^i \xi_1^i - c_1^i \xi_2^i - \dots - c_{r_i-1}^i \xi_{r_i}^i + \bar{\nu}_i$  pongono i poli delle catene nelle posizioni desiderate (LHP);
- la retroazione (a) rende tutto il sistema stabile se la zero dinamica

$$\dot{\eta} = q(0, \eta) + p(0, \eta)u(0, \eta)$$

è asintoticamente stabile.

Se il sistema non ha grado relativo definito ( $E(x)$  singolare) *non* è disaccoppiabile, ma può essere linearizzabile I/O<sup>5</sup>.◀

### Esempio.

Supponiamo di avere il sistema

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 + x_2^2 \\ x_3 - x_1x_4 + x_4x_5 \\ x_2x_4 + x_1x_5 - x_5^2 \\ x_5 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$$

---

<sup>5</sup>Vedi testo Isidori

$$g_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(x_1 - x_3) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad g_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = h_1(x) = x_1 - x_5 \\ y_2 = h_2(x) = x_4 \end{cases}$$

In questo caso

$$r = \{2 + 3\}$$

è il grado relativo totale massimo.

\*\*\*

## 4.5 Pendolo inverso

### 4.5.1 Modello fisico

Le equazioni dinamiche del modello sono date da

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + ml \cos \theta \ddot{\theta} - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 = u \\ ml \cos \theta \ddot{x} + ml^2 \ddot{\theta} - mgl \sin \theta = 0 \end{cases}$$

dove  $M$  è la massa del carrello,  $m$  è la massa posta all'estremità dell'asta (l'asta si considera di peso trascurabile),  $l$  è la lunghezza dell'asta,  $x$  è l'ascissa del carrello e  $g$  è l'accelerazione di gravità. L'ingresso  $u$  rappresenta una forza applicata al carrello. Indicando con  $[x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}]^T$  lo stato del sistema, si ottiene il seguente sistema nonlineare posto in forma di stato,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = \frac{l \sin x_2 x_4^2 - mg \sin x_2 \cos x_2 + u}{M + m \sin x_2} \\ \dot{x}_4 = \frac{(M + m)g \sin x_2 - ml \cos x_2 \sin x_2 x_4^2 - \cos x_2 u}{l(M + m \sin x_2)} \end{cases}$$

ovvero nella classica forma

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

ponendo

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{m \sin x_2 (lx_4^2 - g \cos x_2)}{M + m \sin x_2} \\ \frac{(M + m)g \sin x_2 - ml \sin x_2 \cos x_2 x_4^2}{l(M + m \sin x_2)} \end{bmatrix}$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M + m \sin x_2} \\ \frac{-\cos x_2}{l(M + m \sin x_2)} \end{bmatrix}.$$

Si consideri come uscita del sistema l'angolo dell'asta (che è nullo quando l'asta è in posizione verticale), ovvero

$$y = h(x) = x_2.$$

## 4.5.2 Linearizzazione approssimata

La linearizzazione approssimata sfrutta la formula di Taylor per linearizzare il sistema non lineare

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

attorno a un punto di equilibrio. Si consideri l'origine come punto di equilibrio di interesse per il sistema. Semplici considerazioni fisiche permettono di concludere come tale punto di equilibrio sia instabile per il sistema. La linearizzazione attorno a tale equilibrio può essere ottenuta applicando lo sviluppo in serie di Taylor trascurando tutti i termini di ordine superiore al primo, ovvero

$$\dot{x} = Ax + \tilde{f}(x) + (B + \tilde{g}(x))u$$

dove

$$A = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x_{eq}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-mg}{M} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{g(M+m)}{lM} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \left. \frac{\partial}{\partial x} g(x) \right|_{x=x_{eq}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-m}{M^2} \\ \frac{m}{lM^2} \end{bmatrix},$$

ovvero i termini noti relativi ai monomi di grado 1 dello sviluppo in serie di Teylor di  $f(x)$  e  $g(x)$ , mentre con  $\tilde{f}(x)$  e  $\tilde{g}(x)$  sono stati indicati i termini di ordine superiore. Trascurando tali termini, il sistema linearizzato approssimato è dato da

$$\dot{x} = Ax + Bu.$$

### 4.5.3 Linearizzazione esatta

Calcoliamo il grado relativo del sistema

$$L_g h(x) = L_g x_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ * \\ * \end{bmatrix} = 0$$

$$L_f h(x) = [0 \ 1 \ 0 \ 0] f(x) = x_4$$

$$L_g L_f h(x) = L_g x_4 = [0 \ 0 \ 0 \ 1] g(x) = -\frac{\cos x_2}{l(M + m \sin x_2)}$$

$$L_g L_f h(x_{eq}) = -\frac{1}{lM}.$$

Il grado relativo del sistema è  $r = 2$ . Quindi la linearizzazione esatta sarà parziale, perché abbiamo a disposizione soltanto due funzioni indipendenti per il cambio di variabili:

$$\xi_1 = h(x) = x_2$$

$$\xi_2 = L_f h(x) = x_4$$

Per completare il cambio di variabili dobbiamo trovarne altre due indipendenti dalle altre e che possibilmente soddisfino la condizione  $L_g z_i = 0$ .

$$L_g \eta_3 = 0 \Rightarrow \frac{\partial \eta_3}{\partial x} g(x) = \frac{\partial x_1}{\partial x} g(x) = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ * \\ * \end{bmatrix} = 0$$

per  $\eta_3 = x_1$ .

$$L_g \eta_4 = 0 \Rightarrow \frac{\partial \eta_4}{\partial x} g(x) = \frac{\partial}{\partial x} [x_3 \cos x_2 + l x_4] g(x) =$$

$$= [0 \ * \ \cos x_2 \ l] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l \frac{ml}{ml_2(M + m \sin x_2)} \\ (-\cos x_2) \frac{ml}{ml_2(M + m \sin x_2)} \end{bmatrix} = 0$$

per  $\eta_4 = x_3 \cos x_2 + l x_4$  (la velocità assoluta della punta dell'asta). Adesso il cambio di variabili è completo

$$z = \Phi(x) = \begin{cases} \xi_1 = x_2 \\ \xi_2 = x_4 \\ \eta_3 = x_1 \\ \eta_4 = x_3 \cos x_2 + l x_4 \end{cases}$$

$$x = \Phi^{-1}(z) = \begin{cases} x_1 = \eta_3 \\ x_2 = \xi_1 \\ x_3 = \frac{\eta_4 - l \xi_2}{\cos \xi_1} \\ x_4 = \xi_2 \end{cases}$$

Il sistema complessivo nelle nuove variabili è descritto da

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \frac{(M + m)g \sin \xi_1 - ml \cos \xi_1 \sin \xi_1 \xi_2^2 - \cos \xi_1 u}{l(M + m \sin \xi_1)} \\ \dot{\eta}_3 = \frac{\eta_4 - l \xi_2}{\cos \xi_1} \\ \dot{\eta}_4 = \frac{(-lm(\cos \xi_1)^2 + \sin \xi_1 l M + l m) \xi_2}{(M + m \sin \xi_1) \cos \xi_1} + \frac{(-m + m(\cos \xi_1)^2 - \sin \xi_1 M) \eta_4}{(M + m \sin \xi_1) \cos \xi_1} + \dots \\ \dots + \frac{-mg \sin \xi_1 (\cos \xi_1)^3 + mg \sin \xi_1 \cos \xi_1 + g M \sin \xi_1 \cos \xi_1}{(M + m \sin \xi_1) \cos \xi_1} \end{cases}$$

Calcoliamo adesso l'ingresso linearizzante derivando l'uscita

$$y = x_2$$

$$\dot{y} = \dot{x}_2 = x_4$$

$$\ddot{y} = \dot{x}_4 = v = \frac{(M + m)g \sin x_2 - ml \cos x_2 \sin x_2 x_4^2 - \cos x_2 u}{l(M + m \sin x_2)}$$

da cui

$$u = \frac{\sin x_2}{\cos x_2} [(M + m)g - ml \cos x_2 \ddot{x}_4] - \frac{l(M + m \sin x_2)}{\cos x_2} v = \alpha(x) + \beta(x)v$$

Osserviamo adesso l'andamento della zero dinamica facendo evolvere liberamente il sistema partendo dallo stato iniziale  $x_{eq}$ . Otteniamo l'espressione

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = 0 \\ \dot{\xi}_2 = 0 \\ \dot{\eta}_3 = \eta_4 \\ \dot{\eta}_4 = 0 \end{cases}$$

Si può notare che la zero dinamica è marginalmente stabile quindi il sistema linearizzato sarà asintoticamente stabile solo esternamente.

#### 4.5.4 Confronto tra i due metodi di linearizzazione

In questo esempio si ricercano le differenze tra due diversi metodi di linearizzazione che si possono applicare su un sistema non lineare.

La linearizzazione standard si basa sullo sviluppo in serie di Taylor delle funzioni caratterizzanti il sistema in studio. Questo processo di approssimazione genera un sistema lineare che modella il non lineare intorno ad un punto di lavoro prestabilito. Sul modello lineare trovato si possono progettare controllori in grado di far evolvere il sistema secondo le specifiche date. Tali controllori se applicati al non lineare di partenza manterranno le specifiche di progetto su punti vicini al punto di lavoro. Non è detto però che se il sistema si allontana troppo da tale punto non si generi instabilità perché il modello lineare non approssima più il sistema originario non lineare.

La linearizzazione in feedback (o linearizzazione esatta) ricerca attraverso un retroazione dello stato di generare un ingresso che linearizza il sistema intorno ad un punto di lavoro. Come si può vedere dalla figura 2 il sistema visto dal nuovo ingresso  $v$  è lineare e sarà caratterizzato da un modello simile a quello generato dalla linearizzazione standard. Anche in questo caso il controllore progettato sul modello lineare può dare problemi di instabilità su punti lontani dal punto di lavoro.

Si ricerca in questo esempio di verificare che l'intorno di stabilità del controllo effettuato sul modello lineare standard è più piccolo di quello sul linearizzato in feedback. Per confrontare correttamente i due metodi occorre che i controllori progettati siano tali da far sì che i sistemi in retroazione abbiano gli stessi poli e zeri (in pratica siano lo stesso sistema lineare). Il sistema non lineare scelto è il pendolo inverso mostrato in figura 3.

L'ingresso del sistema é la forza applicata al carrello mentre l'uscita é la misura dell'angolo dell'asta (Sistema di tipo SISO).

#### 4.5.5 Linearizzazione in feedback

Il modello lineare ottenuto da questo metodo é un sistema con due poli nell'origine. Come controllore si utilizza perciò una rete correttiva ( rete anticipatrice ) e un controllo proporzionale per stabilizzare il sistema ottenendo il luogo delle radici mostrato in figura 4. La rete anticipatrice ha uno zero in -2 e un polo in -20 mentre la scelta della componente proporzionale é stata effettuata in modo da testare due diversi tipi di controllo :

1.  $K=12.5$  : con questa scelta i poli del sistema in retroazione sono posizionati in -5 -5 -10 .
2.  $K=100$  : i poli in questo caso sono complessi coniugati .

#### 4.5.6 Linearizzazione standard

Il modello lineare ottenuto con la funzione *linmod.m* di MATLAB presenta poli in -1.4832 e 1.4832 . Il sistema é ovviamente instabile ed occorre stabilizzarlo con un controllore in retroazione. Per usare lo stesso controllore progettato per l'altro metodo occorre portare il sistema ad avere due poli nell'origine. Si effettua perciò una retroazione puramente proporzionale e si posizionano con un  $K=110$  i poli nell' origine ( vedi luogo delle radici di figura 5 ) . A questo sistema applico i controllori precedentemente progettati.

Ora i due sistemi in retroazione derivati dai due metodi sono identici. Per il confronto occorre applicare il controllore progettato sul lineare standard al sistema non lineare di partenza.

#### 4.5.7 Controllo con $K=12.5$ e $K=100$

Si riportano nelle figure successive i grafici relativi alle simulazioni effettuate su MATLAB. Su ogni grafico sono riportate le risposte dei sistemi diversificate nel tratto :

1. ——— : controllo su sistema lineare standard
2. - - - - : controllo su sistema non lineare
3. - . - . : controllo su linearizzato in feedback

### 4.5.8 Conclusioni

Si può notare dai grafici che le risposte dei sistemi sono identiche con angolo di partenza pari a 0.3 rad. Man mano che ci si allontana da questo angolo le risposte si diversificano fino ad arrivare al punto in cui il controllo, progettato sul sistema lineare standard e applicato al non lineare, genera instabilità (questo accade per  $K=100$  e angolo di partenza 1.6 rad). Ciò dimostra che, almeno in questo esempio, l'insieme di convergenza del controllo sul sistema lineare standard è più piccolo di quello del sistema linearizzato in feedback.

## 4.6 Appendice: stabilità\*

Figura 4.1: Sistema con linearizzazione input-stati

Figura 4.2: Link di un robot

Figura 4.3: Link con cedevolezza

Figura 4.4: Inseguimento di tipo asintotico

Figura 4.5: Pendolo inverso

Figura 4.6: Linearizzazione standard

Figura 4.7: Linearizzazione in feedback

Figura 4.8: Pendolo inverso

Figura 4.9: Luogo delle radici

Figura 4.10: Luogo delle radici

Figura 4.11: Simulazione con  $k=12.5$  e angolo  $0.3$

Figura 4.12: Simulazione con  $k=12.5$  e angolo  $0.8$

Figura 4.13: Simulazione con  $k=12.5$  e angolo  $1.3$

Figura 4.14: Simulazione con  $k=12.5$  e angolo  $1.6$

Figura 4.15: Simulazione con  $k=100$  e angolo  $0.3$

Figura 4.16: Simulazione con  $k=100$  e angolo  $0.8$

Figura 4.17: Simulazione con  $k=100$  e angolo 1.3

Figura 4.18: Simulazione con  $k=100$  e angolo 1.6