A CURA DI GIULIA BALATRI
a.a. 2017 - 2018

MODELLI DI SORGENTI DI CAMPO BIOELETTRICO

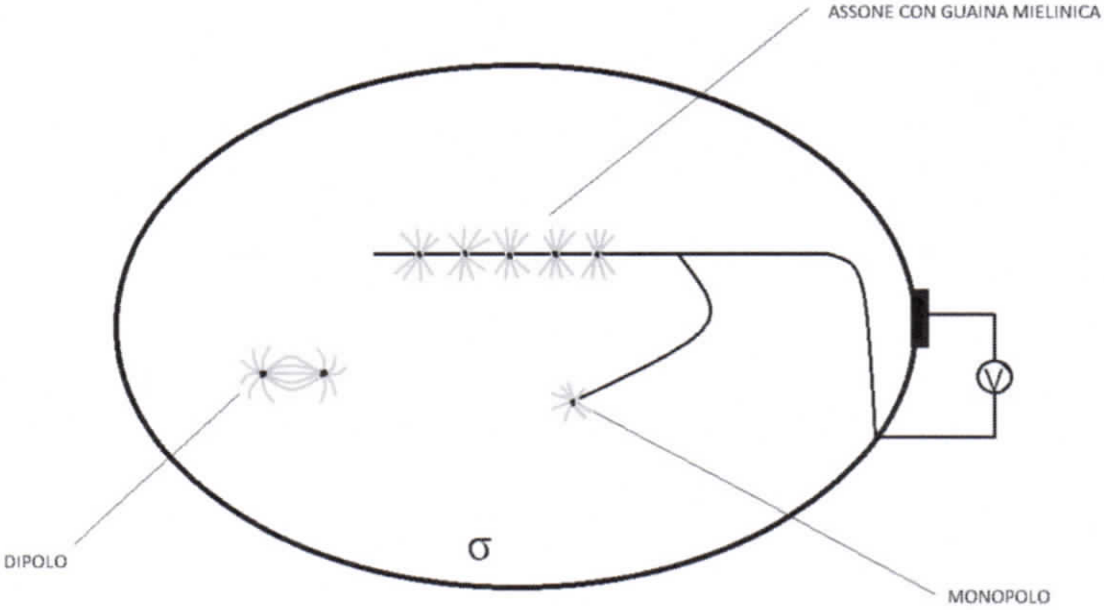
Attraverso questa analisi vorremmo creare un modello rappresentativo, dove esprimere, attraverso delle espressioni, il comportamento delle sorgenti elettriche di origine biologica. Queste sorgenti, generate dal passaggio di corrente attraverso la membrana di cellule eccitabili (tessuto nervoso e muscolare), possono essere schematizzate come monopoli o dipoli di corrente.

Vogliamo quindi creare un modello continuo, che rappresenti la propagazione della corrente generata da tessuti eccitabili nel corpo e dunque schematizziamo questa situazione come una sorgente di corrente (tessuto eccitabile) immersa in un volume conduttore (tessuti restanti del corpo).

Possiamo quindi rappresentare il corpo come un continuo bioelettrico, ovvero un volume tridimensionale in cui tutte le funzioni $\Phi = f(x,y,z,t)$ risultino essere continue e derivabili, attraverso il quale si possa propagare un flusso di corrente emessa $\bar{J}^s$ (x,y,z,t) , ovvero una corrente non conservativa dovuta all'attività bioelettrica (conversione di energia chimica in energia elettrica) dei nervi e dei muscoli.

Nella trattazione seguente, per facilitare la costruzione del modello, utilizzeremo delle ipotesi semplificative o precondizioni.

RAPPRESENTAZIONE MODELLO



IPOTESI SUL VOLUME CONDUTTORE

1) VOLUME CONDUTTORE INFINITO:
   estensione infinita del volume circostante le sorgenti di corrente.
2) TRASCURARE EFFETTI CAPACITIVI:
   Nella descrizione del volume conduttore corrispondente al corpo umano, possiamo trascurare nell'impedenza dei tessuti l'aspetto capacitivo. In effetti, dal punto di vista sperimentale, è stato osservato che tutti i segnali di tipo bioelettrico sono segnali a basse frequenze che non superano 1-2KHz. Sappiamo inoltre che a tali frequenze la componente capacitiva dei tessuti, dovuta a perdite per rilassamento dielettrico, è trascurabile rispetto alla conducibilità ohmica, di conseguenza consideriamo le correnti attraverso il volume derivanti solo da quest' ultima.
3) VOLUME CONDUTTORE OMOGENEO:

Assumiamo che la conducibilità sia costante in tutto il volume.

4) CONDIZIONE QUASI-STAZIONARIETA':
La condizione di quasi stazionarietà relativa alla variazione nel tempo delle correnti e dei potenziali nel corpo umano, implica che istante per istante possiamo vedere i campi elettromagnetici e le correnti come stazionari. Infatti il tempo impiegato dalle cariche a ridistribuirsi è trascurabile rispetto a qualunque cambiamento della sorgente.
Questo comporta che:

- $\bar{E} = -\bar{\nabla}\varphi$ (altrimenti il campo elettrico avrebbe anche un contributo indotto dovuto alle variazioni nel tempo del campo magnetico)

- $\bar{\nabla} \cdot \bar{J} = 0$ VEDI APPENDICE
(altrimenti la divergenza del flusso dipenderebbe dalla variazione nel tempo della densità volumetrica di carica)

IPOTESI SULLE SORGENTI

1) $\bar{J}^s$ (x,y,z,t) è zero ovunque fuori dalla regione dove si trovano le cellule attive
2) Le sorgenti di corrente elettrica sono monopoli/dipoli di corrente e assoni (considerabili come una serie di monopoli di corrente)
3) Se il volume conduttore è infinito e omogeneo e la conducibilità è σ, la sorgente primaria $\bar{J}^s$ stabilisce un campo elettrico $\bar{E}$ e una corrente di conduzione $\sigma\bar{E}$.

ANALOGIA EQUAZIONE DI POISSON DERIVATA DALLA LEGGE DI GAUSS E POTENZIALE ELETTRICO IN FUNZIONE DELLA DIVERGENZA DEL FLUSSO

$$\bar{J} = \overline{J^s} + \sigma\bar{E}$$

$$\bar{J} = \overline{J^s} - \sigma\bar{\nabla}\varphi$$

Applico l'operatore divergenza all' equazione precedente:

$$\begin{cases} \bar{\nabla} \cdot \bar{J} = \bar{\nabla} \cdot (\overline{J^s} - \sigma\bar{\nabla}\varphi) = \bar{\nabla} \cdot \overline{J^s} - \sigma\bar{\nabla}^2\varphi \\ \bar{\nabla} \cdot \bar{J} = 0 \end{cases}$$

Confronto l'equazione di Poisson-Gauss con il risultato trovato:

$$\begin{cases} \bar{\nabla}^2\varphi = \frac{1}{\sigma}\,\bar{\nabla} \cdot \overline{J^s} = -\frac{I_v}{\sigma} \\ \bar{\nabla}^2\varphi = \frac{-\rho}{\varepsilon} \qquad \text{legge di Poisson derivata dalla legge di Gauss} \end{cases}$$

Confrontando le due equazioni possiamo trovare un'analogia tra:

$$\begin{cases} \bar{\nabla} \cdot \overline{J^s} \rightarrow -\rho \\ \sigma \rightarrow \varepsilon \end{cases}$$

CALCOLO DEL POTENZIALE ELETTRICO IN UN PUNTO DELLO SPAZIO

Consideriamo la formula del potenziale elettrostatico di una distribuzione continua di cariche e facendo riferimento all' analogia precedente, sostituiamo i valori della densità di carica e della costante dielettrica con la divergenza del flusso della sorgente e con la conducibilità.

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_v \frac{\rho dV}{r} \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi(r) = -\frac{1}{4\pi\sigma}\int_v \frac{\bar{\nabla}\cdot \overline{J^s}\ dV}{r}$$

Fatto questo, cerchiamo una forma alternativa, mediante la quale esprimere l'integrale ricavato.

Partendo dalla seguente identità vettoriale

$$\bar{\nabla}\cdot\left[\frac{\overline{J^s}}{r}\right] = \frac{\bar{\nabla}\cdot\overline{J^s}}{r} + \left(\bar{\nabla}\frac{1}{r}\right)\cdot\overline{J^s}$$

E sostituendo nell' integrale del potenziale, possiamo scrivere:

$$\varphi(r) = -\frac{1}{4\pi\sigma}\left\{\int_v \bar{\nabla}\cdot\left(\frac{\overline{J^s}}{r}\right)\, dV - \int_v \left(\bar{\nabla}\frac{1}{r}\right)\cdot\overline{J^s}\, dV\right\}$$

Inoltre se applichiamo il teorema della divergenza al primo termine dell'integrale possiamo osservare che questo è uguale a zero.

$$\int_v \bar{\nabla} \cdot \left(\frac{\overline{J^s}}{r}\right) dV = \oint_S \frac{\overline{J^s} \cdot \overline{ds}}{r} = 0$$

Infatti avendo ipotizzato che tutte le sorgenti siano interne al volume (le sorgenti sono nulle al di fuori delle cellule attive) e considerando che la superficie che delimita il volume si trovi talmente lontana dalle sorgenti stesse, possiamo concludere dicendo che il flusso di $\overline{J^s}$ attraverso questa superficie risulterà essere nullo.

Allora possiamo scrivere il potenziale in due modi distinti

$$\varphi(r) = -\frac{1}{4\pi\sigma} \int_v \frac{\bar{\nabla} \cdot \overline{J^s}}{r} dV = \frac{1}{4\pi\sigma} \int_v \overline{J^s} \cdot \left(\bar{\nabla} \frac{1}{r}\right) dV$$

i quali ci permettono di confrontare i due integrali.

Nel primo caso la quantità $-\bar{\nabla} \cdot \overline{J^s}\, dV$ rappresenta la densità di carica di una sorgente puntiforme, il cui campo varia come $\frac{1}{r}$ e dove $-\bar{\nabla} \cdot \overline{J^s}$ indica la densità di flusso (ovvero la corrente per unità di volume). Mentre nel secondo caso $\overline{J^s}\, dV$ può essere visto come un elemento di dipolo, il cui campo varia come $\bar{\nabla} \frac{1}{r}$ e dove $\overline{J^s}$ rappresenta la densità di volume del dipolo.

MONOPOLI DI CORRENTE

I monopoli di corrente sono la tipologia più semplice di sorgente bioelettrica e nonostante risultino essere un'astrazione concettuale, possono effettivamente essere rappresentati da specifiche situazioni reali. Ad esempio potremmo immaginare di rappresentare un monopolo come un filo, infinitamente sottile ed isolato lungo tutta la sua estensione tranne che sulla punta, che inietta corrente in un volume conduttore di dimensione infinita. Prendendo come riferimento questa rappresentazione possiamo allora effettivamente calcolare il potenziale generato da questa sorgente di corrente.

$$\bar{J} = \frac{I_s}{4\pi r^2}\,\hat{r}$$

$$\bar{J} = \sigma\bar{E} = -\sigma\bar{\nabla}\varphi$$

$$\bar{E} = \frac{I_s}{4\pi\sigma r^2}\hat{r}$$

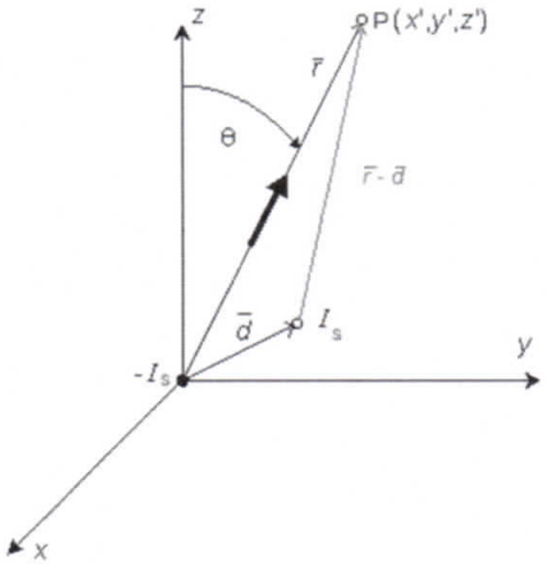
L' integrazione rispetto a r per $\varphi \rightarrow 0\ per\ r \rightarrow \infty$ fornisce:

$$\varphi(r) = \frac{I_s}{4\pi\sigma r}$$

DIPOLI DI CORRENTE

I dipoli di corrente sono delle sorgenti formate da due monopoli di segno opposto (indicati come sorgente e pozzo), separati da una piccola distanza d ed aventi stessa intensità di corrente I_s, dove secondo la definizione formale $I_s \to \infty$ e $d \to 0$.

La quantità finita risultante $p = I_s d$ viene definita momento di dipolo e può essere vista come un vettore orientato $\bar{p}$, detto vettore di dipolo, il quale risulta essere uguale a $\bar{p} = I_s \bar{d}$, dove $\bar{d}$ è il vettore che congiunge i due monopoli orientato dal monopolo negativo verso quello positivo.



$$\bar{p} = I_s \bar{d}$$

$$\bar{p} = \ vettore\ di\ dipolo$$

Vogliamo dunque descrivere il potenziale associato al dipolo in un qualunque punto dello spazio $P(x', y', z')$ e per farlo posizioniamo il polo negativo nell' origine per semplificare la trattazione.

Innanzitutto osserviamo che se il polo positivo, a sua volta, si trova nell' origine, il campo elettrico generato risulta essere nullo poiché le sorgenti si annullano l'una con l'altra. Di conseguenza possiamo concludere che il campo elettrico e così il potenziale, dipendano strettamente dallo spostamento $\bar{d}$ del polo positivo dall' origine.

Cerchiamo dunque di valutare il potenziale nello spazio facendo ricorso alla formula (principio di sovrapposizione degli effetti)

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\sigma} \sum_i \frac{I_{s,i}}{r_i}$$

che rappresenta il potenziale elettrostatico di un sistema di monopoli, dove $\frac{1}{4\pi\sigma}\frac{I_{s,i}}{r_i}$ è il potenziale generato da ciascuno di essi e dove r_i rappresenta la distanza di ognuno dal punto in cui calcolo il potenziale.

Quindi nel caso del dipolo, la sommatoria si riduce alla somma di due termini ovvero:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\sigma} \left(\frac{I_s}{r} - \frac{I_s}{|\bar{r} - \bar{d}|}\right)$$

Sfruttando quindi lo sviluppo in serie di Taylor troncato al primo ordine, possiamo scrivere:

$$f\,(\bar{r} - \bar{d}) \cong f\,(\bar{r}) - \bar{d}\ \cdot \bar{\nabla} f\,(\bar{r})$$

$$\frac{1}{|\bar{r} - \bar{d}|} \cong \frac{1}{r} - \bar{d} \cdot \bar{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)$$

di conseguenza

$$V(P) = \frac{I_s}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{|\bar{r} - \bar{d}|}\right) \cong \frac{I_s}{4\pi\sigma} \left(\bar{d} \cdot \bar{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)\right)$$

ed essendo $\bar{p} = I_s\bar{d}$

$$V(P) \cong \frac{\bar{p}}{4\pi\sigma} \cdot \bar{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\bar{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^2}\,\hat{r}$$

$$V(P) \cong \frac{p}{4\pi\sigma r^2}\,\hat{r} \cdot \hat{d}$$

APPENDICE

OPERATORE DIVERGENZA

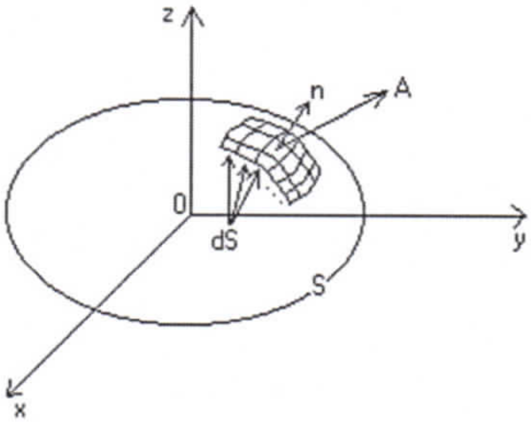
Dato un campo vettoriale $\vec{V}$, la sua *divergenza* (indicata con la sigla *div*) è definita come lo scalare dato dal prodotto scalare fra il vettore nabla e il vettore suddetto:

$$div\,\vec{V} = \vec{\nabla} \bullet \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

La divergenza di un vettore è quindi uno scalare formato dalla somma delle derivate parziali prime delle componenti del vettore rispetto agli assi coordinati nell'ordine.

TEOREMA DIVERGENZA

Consideriamo un campo vettoriale $\vec{A}$ ed una superficie chiusa *S* che racchiuda un volume *Vol*. Supponiamo che la superficie sia suddivisa in infiniti elementi infinitesimi di area *dS* ciascuno dei quali dotato di un versore $\vec{n}$ perpendicolare ad esso con verso orientato dall'interno all'esterno della superficie stessa (Fig. A.6).



Flusso di un vettore $\vec{A}$ attraverso una superficie *S*.

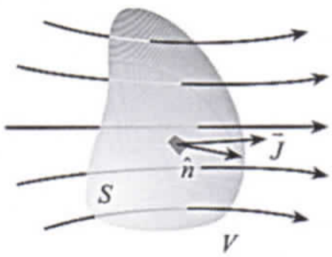
Sotto tale ipotesi, vale il seguente *teorema di Gauss* (o *teorema della divergenza*):

$$\oiint_S \vec{A} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_{Vol} div\vec{A} dV$$

L'integrale di sinistra è definito anche *flusso* del vettore $\vec{A}$ sulla superficie *S* ed il cerchietto sul segno di tale integrale significa che l'integrale è calcolato su tutta la superficie chiusa.

EQUAZIONE CONTINUITA'

Consideriamo un volume V racchiuso in una superficie S sottoposto ad un flusso di cariche con densità $\bar{J}$. La carica che passa nell'unità di tempo attraverso S è:



$$i = \int_S \bar{J} \cdot d\bar{s} = \int_S \bar{J} \cdot \hat{n}\, ds\,;$$

in particolare, nelle regioni di S in cui il prodotto $\bar{J} \cdot \hat{n}$ è positivo, risulta che una carica positiva esce da S oppure una carica negativa entra in S; viceversa $\bar{J} \cdot \hat{n}$ negativo indica che in tali regioni una carica positiva sta entrando oppure una carica negativa sta uscendo. Dal principio di conservazione della carica segue che la carica che attraversa nell'unità di tempo S, cioè la corrente i, è uguale alla variazione nell'unità di tempo della carica complessiva q_{int} contenuta in S:

$$i = \int_S \bar{J} \cdot d\bar{s} = -\frac{dq_{int}}{dt}.$$

Il segno meno è giustificato dal fatto che se l'integrale è complessivamente positivo, la carica all'interno diminuisce, così $dq_{int}/dt < 0$ (e viceversa se l'integrale è negativo). D'altra parte, se ρ è la densità di carica interna a V, si ha:

$$\int_S \bar{J} \cdot d\bar{s} = -\frac{dq_{int}}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dv = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv\,;$$

applicando quindi il teorema della divergenza al primo membro, si ha:

$$\int_V \bar{\nabla} \cdot \bar{J}\, dv = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv\,,$$

ovvero:

$$\int_V \left(\bar{\nabla} \cdot \bar{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dv = 0\,;$$

dovendo essere valida per qualunque volume V, da tale relazione segue:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0\,.$$

Questa espressione, nota col nome di *equazione di continuità*, esprime in maniera generale il principio di conservazione della carica elettrica. In condizioni stazionarie la densità di carica ρ è indipendente dal tempo, così $\partial \rho / \partial t = 0$ e, di conseguenza:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{J} = 0\,,$$

che esprime l'equazione di continuità della carica elettrica in regime stazionario.

BIBILIOGRAFIA

Per la trattazione del modello:

- Libro Bioelectromagnetism, Plonsey and Malmivuo
- Capitolo 9 Volume conductor theory, Plonsey
- Libro Fisica 2, Mazzoldi

Appendice:

- Appendice dispense di Fenomeni bioelettrici, De Rossi
- Altre fonti universitarie