

Protocollo del Consenso

Il consenso è un problema fondamentale per le reti di agenti mobili che vogliono trovarsi d'accordo su un dato valore che dipende dallo stato del singolo agente: punto del piano in cui incontrarsi, valore di temperatura dell'ambiente, direzione di moto da mantenere, etc.

Per questo tipo di problemi è necessario definire un protocollo sulla rete che consenta agli agenti di raggiungere un consenso sul valore in considerazione. Un protocollo definisce le regole di interazione e di scambio di informazione tra un agente e gli agenti “vicini”.

Consenso su reti statiche

Nel caso di reti di agenti statiche si vuole studiare la relazione tra le proprietà di convergenza del protocollo e la struttura o topologia della rete.

Il protocollo del consenso si basa su n entità dinamiche connesse da una rete su cui le entità si possono scambiare informazioni.

Definizione 21. *Sia x_i il valore del nodo v_i per $i = 1, \dots, n$. I nodi v_i e v_j concordano se e soltanto se $x_i = x_j$, altrimenti discordano.*

Il potenziale $\Psi_G(x)$ è una “misura di disaccordo” in quanto non appena due nodi

discordano si ha $\Psi_G(x) > 0$. Quindi minimizzare il potenziale del Laplaciano è equivalente a raggiungere il consenso.

Un esempio di protocollo di consenso è quello per cui la dinamica dello stato su cui si vuole raggiungere un consenso è data da:

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j \in N(i)} (x_j(t) - x_i(t)), \quad i = 1, \dots, n. \quad (20)$$

Consenso su reti non orientate

Considerando una relazione di adiacenza simmetrica e quindi di avere una rete rappresentata da un grafo G non orientato, il sistema complessivamente può essere rappresentato dall'equazione dinamica

$$\dot{x}(t) = -L(G)x(t). \quad \text{Dinamica del consenso} \quad (21)$$

Nel caso di un grafo non orientato il Laplaciano del grafo è una matrice simmetrica e tale per cui $L(G)\mathbf{1} = 0$.

Sia $V = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ la matrice ortonormale che diagonalizza il Laplaciano e ordinata in modo tale che $V^T L V = \Lambda(G)$ dove $\Lambda(G) = \text{diag}(\lambda_1(G), \dots, \lambda_n(G))$ (matrice diagonale con gli autovalori ordinati sulla diagonale). Si ha che:

$$\begin{aligned} e^{-L(G)t} &= e^{-(V\Lambda(G)V^T)t} = V e^{-\Lambda(G)t} V^T = \\ &= e^{-\lambda_1(G)t} v_1 v_1^T + e^{-\lambda_2(G)t} v_2 v_2^T + \dots + e^{-\lambda_n(G)t} v_n v_n^T. \end{aligned}$$

Partendo da un punto iniziale $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, la soluzione dell'equazione del consenso è $x(t) = e^{-L(G)t} x_0$ o equivalentemente

$$x(t) = e^{-\lambda_1(G)t} (v_1^T x_0) v_1 + e^{-\lambda_2(G)t} (v_2^T x_0) v_2 + \dots + e^{-\lambda_n(G)t} (v_n^T x_0) v_n.$$

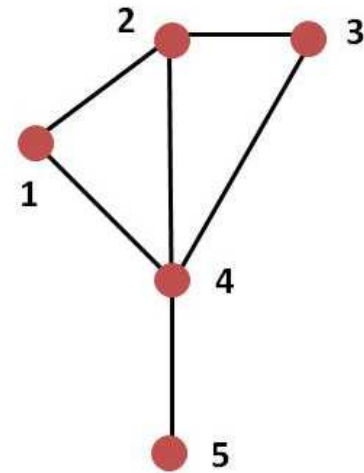
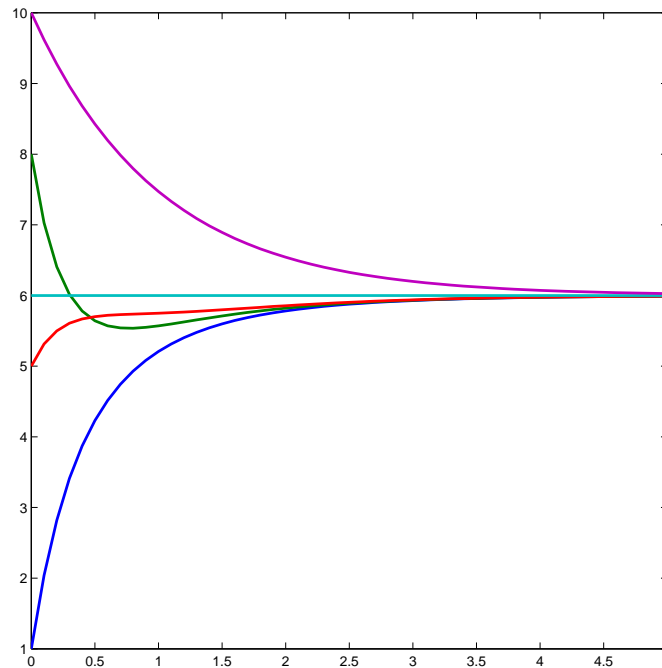
Teorema 9. *Sia G un grafo connesso, il protocollo di consenso 21 converge all'insieme \mathcal{A} sottospazio di $\text{span}(\mathbf{1})$, i.e. $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^n | x_i = x_j \forall i, j\}$ con tasso di convergenza $\lambda_2(G)$.*

Dimostrazione. Se il grafo è connesso tutti gli autovalori sono strettamente positivi a parte $\lambda_1(G) = 0$ quindi per t che diverge si ha $x(t) \rightarrow (v_1^T x_0) v_1 = \frac{\mathbf{1}^T x_0}{\sqrt{n}} \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{n}}$ e quindi $x(t)$ converge ad \mathcal{A} . L'autovalore che determina il tasso di convergenza è quello più lento: $\lambda_2(G)$. □

E' interessante notare che $\frac{d}{dt}(\frac{\mathbf{1}^T}{n} x(t)) = \frac{\mathbf{1}^T}{n} (-L(G)x(t)) = -x(t)^T L(G) \frac{\mathbf{1}}{n} = 0$. In altre parole, durante l'evoluzione del sistema la quantità $\frac{\mathbf{1}^T}{n} x(t) = \frac{1}{n} \sum_i x_i(t)$ (centroide degli stati della rete) rimane costante. Quindi lo stato della rete connessa, con il protocollo del consenso, converge al centroide degli stati iniziali della rete: $\frac{1}{n} \sum_i x_i(0)$.

Teorema 10. *Condizione necessaria e sufficiente affinché il protocollo del consenso converga ad \mathcal{A} per ogni condizione iniziale è che il grafo associato alla rete contenga un albero di copertura.*

In relazione all'esempio 4, dati i valori iniziali $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 8$, $x_3(0) = 5$, $x_4(0) = 6$, $x_5(0) = 10$, l'evoluzione degli stati del sistema è



Problema del Rendezvous

Dati N robot, come si dovrebbero muovere per far sì che si incontrino nello stesso punto utilizzando solo informazioni locali?

Sia x_i , $i = 1, \dots, N$ la posizione corrente in \mathbb{R}^2 di ogni robot. Si supponga che i robot abbiano la dinamica di un singolo integratore: $\dot{x}_i = u_i$, $i = 1, \dots, N$.

L'informazione a disposizione di ogni robot è la posizione relativa degli altri robot: $x_i - x_j$, $j = 1, \dots, N$. Si deve determinare una $u_i(x_i - x_1, \dots, x_i - x_N)$.

Scegliendo $u_i = -\gamma \sum_{j \neq i} (x_i - x_j)$ si ha una legge di controllo che può funzionare ma per la quale ogni robot deve conoscere la posizione relativa di tutti gli altri robot. Tale legge di controllo è centralizzata e non scalabile!

Data però una rete (di comunicazione, di vista, etc.) tra i robot è possibile considerare la legge $u_i = -\sum_{j \in N_i} (x_i - x_j)$ si ha $\dot{x}_i = -d(v_i)x_i + \sum_{j=1}^N a_{ij}x_j$ dove $d(v_i)$ è la cardinalità di N_i e a_{ij} sono gli elementi della matrice di adiacenza. Quindi $\dot{x} = -Dx + Ax = -Lx$ (D è la matrice dei gradi, A la matrice di adiacenza e L è il Laplaciano).

Il sistema ottenuto è quindi un sistema lineare tempo invariante che sappiamo essere stabile se L ha un solo autovalore nullo e gli altri a parte reale negativa. Inoltre sappiamo che il sistema converge allo spazio nullo di L $\mathcal{N}(L) = \text{span}(\mathbf{1})$ e

quindi i robot si ritroveranno tutti nello stesso punto. Ma, da un punto di vista fisico, dove si ritroveranno i robot?

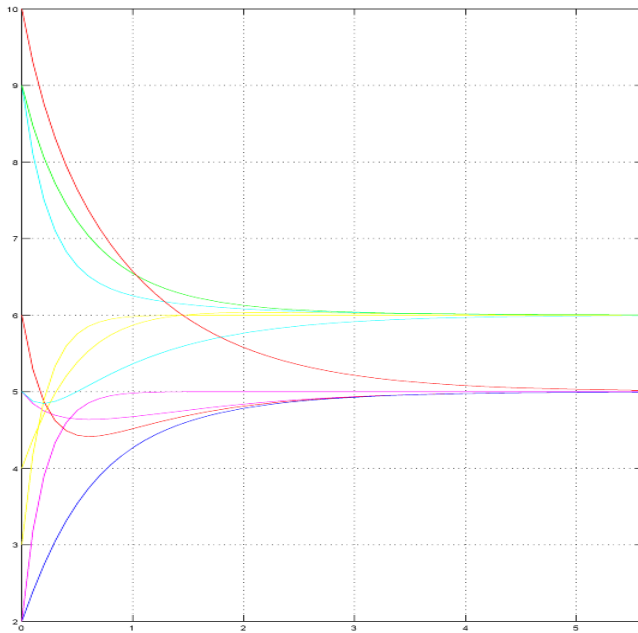
Sia $x_c(t) = \frac{1}{n} \sum_i^n x_i(t)$ il centroide dei robot all'istante t :

$$\dot{x}_c(t) = \frac{1}{n} \sum_i^n \dot{x}_i(t) = -\frac{1}{n} \sum_i^n \sum_{j \in N_i} (x_i - x_j)$$

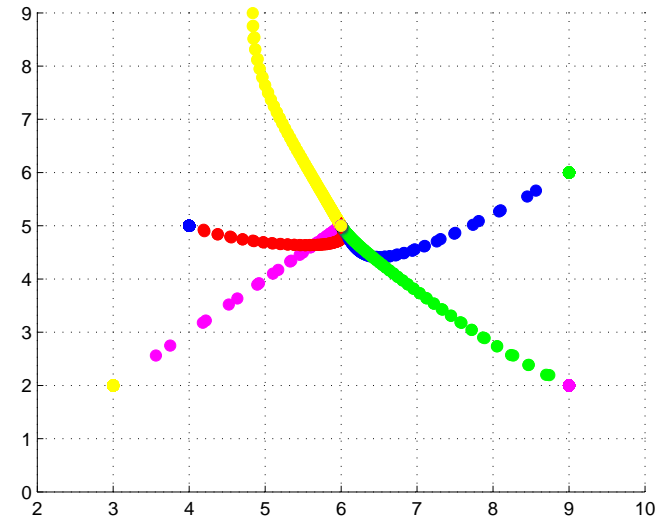
avendo considerato un grafo non orientato si ha che $j \in N_i \Leftrightarrow i \in N_j$ e quindi tutti i termini della sommatoria si cancellano due a due e $\dot{x}_c(t) = 0$. Visto che tutti i robot si incontrano nello stesso punto questo deve necessariamente essere il centroide (che è statico!) determinato dalle posizioni iniziali: $x_c = \frac{1}{n} \sum_i^n x_i(0)$

In relazione all'esempio 4, si considerino i robot nelle posizioni iniziali $x_1(0) = (4, 5)$, $x_2(0) = (9, 6)$, $x_3(0) = (9, 2)$, $x_4(0) = (3, 2)$, $x_5(0) = (5, 10)$.

Utilizzando il protocollo del consenso su entrambe le coordinate dei robot si ottiene



Evoluzione delle ascisse e delle ordinate dei robot.



Evoluzione dei robot nel piano cartesiano.

Consenso su reti orientate e pesate

Si consideri un grafo $G = (V, E, w)$ orientato e pesato con peso w_{ij} associato all'arco da i a j .

Considerando degli integratori ai nodi della rete si ha che la dinamica del sistema interconnesso con il protocollo del consenso $u_i = \sum_{j \in N(i)} w_{ij} (x_j(t) - x_i(t))$, si può rappresentare come

$$\dot{x}(t) = -L(G)x(t), \quad (22)$$

dove G è il grafo orientato che rappresenta le interconnessioni nella rete.

ATTENZIONE: si noti che per implementare il protocollo del consenso con questo formalismo in realtà l'agente i ammette l'arco (i, j) (e quindi $j \in N_i$) quando riceve informazioni da j (cioè riceve x_j) altrimenti non potrebbe calcolare la quantità $u_i = \sum_{j \in N(i)} w_{ij} (x_j(t) - x_i(t))$.

Dal teorema 5 sugli autovalori del Laplaciano per reti orientate e pesate si ha

Corollario 2. *Gli autovalori di $-L$ appartengono al disco nel piano complesso centrato $(-d_{max}(G), 0)$ e raggio $d_{max}(G)$, cioè in*
 $\tilde{D}(G) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + d_{max}(G)| \leq d_{max}(G)\}$

Teorema 11. *Dato un grafo orientato fortemente connesso, applicando alla rete di integratori il protocollo $u_i = \sum_{j \in N(i)} w_{ij} (x_j(t) - x_i(t))$ il protocollo è globalmente asintoticamente stabile e risolve il problema del consenso.*

Dimostrazione. Dal teorema 4 si ha che $\text{rank}(L) = n - 1$ e quindi L ha un solo autovalore nullo. Il corollario implica quindi che tutti gli autovalori di $-L$ sono a parte reale negativa e la dinamica del sistema 22 è stabile. Ogni equilibrio x_{eq} di 22 è un autovettore destro di L associato a $\lambda = 0$ ma questo implica $\bar{x} \in \text{span}(\mathbf{1})$ da cui $\bar{x}_i = \alpha$ per ogni $i = 1, \dots, n$. \square

Si noti che il teorema consente solo di dire che viene raggiunto un consenso ma non si può dire che si converge verso il centroide dei valori iniziali.

La soluzione dell'equazione dinamica 22 del consenso è

$$x(t) = \exp^{-L(G)t} x(0), \quad (23)$$

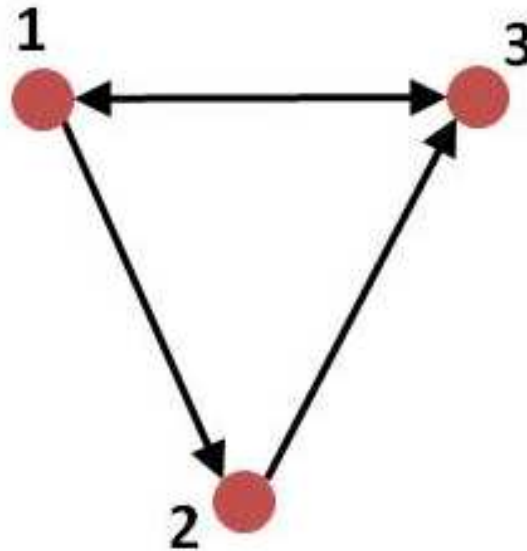
Teorema 12. *Dato $G = (V, E, w)$ grafo orientato fortemente connesso con laplaciano L tale che $Lw_r = 0$, $w_l^T L = 0$ e $w_l^T w_r = 1$. Si ha $R = \lim_{t \rightarrow \infty} \exp(-Lt) = w_r w_l^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$.*

Dimostrazione. Sia $A = -L$ e J la forma di Jordan associata ad A ($A = SJS^{-1}$ e $\exp(At) = S \exp(Jt) S^{-1}$), visto che $-L$ ha un unico autovalore nullo e tutti gli autovalori sono asintoticamente stabili si ha che $\exp(Jt)$ converge ad una matrice Q con tutti elementi pari a zero tranne $q_{11} = 1$. Quindi $R = S Q S^{-1}$.

Essendo $AS = JS$ si ha che la prima colonna di S è w_r mentre $S^{-1}A = JS^{-1}$ implica che la prima riga di S^{-1} è w_l^T . Dal fatto che $SS^{-1} = I$ segue che $w_l^T w_r = 1$. Da come è fatta Q segue che $R = w_r w_l^T$. \square

Una condizione sufficiente affinché lo stato converga al centroide delle condizioni iniziali (**average-consensus value**) è che sia $\sum_{i=1}^n u_i = 0$. Questa condizione è automaticamente verificata nel caso di grafi non orientati, infatti in questo caso $w_{ij} = a_{ij} = a_{ji}$ per ogni $w_{ij} \neq 0$.

Nel caso di reti orientate si può avere convergenza ad un valore diverso dal centroide iniziale. Ad esempio si consideri la rete in figura 234 con $n = 3$.



Si supponga costo 1 per ogni arco. G è un grafo connesso e $u_1 = (x_2 - x_1) + (x_3 - x_1)$, $u_2 = (x_3 - x_2)$ e $u_3 = x_1 - x_3$ da cui segue

$\sum_{i=1}^n u_i = x_3 - x_1$. Se i nodi v_1 e v_3 sono in disaccordo la proprietà $\sum_{i=1}^n u_i = 0$ non è verificata. Inoltre il Laplaciano risulta

$$L(G) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con autovalori 0, 2, 2 e autovettori destro e sinistro dell'autovalore nullo pari a: $w_r^T = (1, 1, 1)$ e $w_l^T = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$. Si ha quindi:

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Da cui ogni componente di $x(t)$ converge a $\frac{1}{4}(x_1(0) + x_2(0) + 2x_3(0))$. Per ogni condizione iniziale tale che $x_1(0) + x_2(0) \neq 2x_3(0)$ il protocollo del consenso non fornisce il valore medio dei valori iniziali ($\frac{1}{3}(x_1(0) + x_2(0) + x_3(0))$) nonostante si abbia convergenza asintotica.

E' quindi interessante capire quale classe di grafi orientati sono tali per cui il protocollo del consenso risolve l'average-consensus problem.

Teorema 13. *Si consideri una rete di integratori con una topologia costante rappresentata da un grafo $G = (V, E, w)$ orientato e fortemente connesso. Il protocollo del consenso è globalmente asintoticamente stabile e risolve il problema dell'average-consensus se e soltanto se $\mathbf{1}^T L = 0$.*

Dimostrazione

Sia $w_r = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}$, dal teorema 12 si ha

$$x^* = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = R x_0 = w_r w_l^T x_0 = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{1} w_l^T x_0$$

Se, per ipotesi, il valore su cui si raggiunge il consenso è pari al centroide iniziale, si ha:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{1} w_l^T x_0 = \frac{1}{n} \mathbf{1}^T x_0 \mathbf{1}, \forall x_0$$

$\mathbf{1} w_l^T = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{1} \mathbf{1}^T$ da cui $w_l = w_r = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{1}$. Quindi l'autovalore sinistro ha tutte le componenti uguali e $\mathbf{1}^T L = 0$.

Si supponga ora che $\mathbf{1}^T L = 0$, sia $w_l = \beta \mathbf{1}$ con $\beta \in \mathbb{R}$ e $\beta \neq 0$. Dalla condizione

$w_l^T w_r = 1$ si ottiene $\beta = \frac{1}{\sqrt{n}}$ e $w_l = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{1}$. Il valore concordato è quindi

$\frac{1}{\sqrt{n}} w_l^T x_0 \mathbf{1} = \frac{1}{n} \mathbf{1}^T x_0 \mathbf{1}$ il vettore con tutte componenti pari al centroide dei valori iniziali.

Corollario 3. *Si consideri una rete di integratori con una topologia costante rappresentata da un grafo $G = (V, E, w)$ orientato e fortemente connesso. Sia γ un autovettore sinistro non negativo associato all'autovalore nullo e tale che $\sum_{i=1}^n \gamma_i > 0$. Il protocollo del consenso converge al valore condiviso*

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n \gamma_i x_i(0)}{\sum_{i=1}^n \gamma_i},$$

combinazione convessa dei valori iniziali.

Dimostrazione. Dato γ autovettore sinistro si ha $\gamma^T u = -\gamma^T Lx = 0$. Pertanto dato $\beta = \gamma^T x$ si ha $\dot{\beta} = \gamma^T \dot{x} = \gamma^T u = 0$ e quindi β è una quantità costante. Sia x^* il vettore verso cui lo stato $x(t)$ converge. Dall'invarianza di β si ottiene che $\gamma^T x^* = \gamma^T x(0)$. Sappiamo inoltre che esiste un valore α tale che $x^* = \alpha \mathbf{1}$. Concludendo $\gamma^T \alpha \mathbf{1} = \alpha \sum_{i=1}^n \gamma_i = \gamma^T x(0)$ da cui la tesi. \square

Quindi per una rete fortemente connessa, l'esistenza di un autovettore sinistro non negativo associato all'autovalore nullo assicura che i robot con il protocollo del consenso si vanno ad incontrare in un punto che è nell'involuppo convesso delle posizioni iniziali.

Teorema 14. *Sia $G = (V, E, w)$ un grafo orientato con matrice di adiacenza A . Tutte le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1) G è bilanciato;

2) $w_l = \mathbf{1}$ è l'autovettore sinistro del Laplaciano di G associato all'autovalore nullo, cioè $\mathbf{1}^T L = 0$;

3) $\sum_{i=1}^n u_i = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ con $u_i = \sum_{v_j \in N_i} a_{ij}(x_j - x_i)$.

Dimostrazione. Dimostriamo l'equivalenza tra le prime due affermazioni.

La seconda affermazione indica che la somma dei valori per colonna del Laplaciano è nulla. La somma degli elementi della colonna j -esima vale:

$$\sum_{i=1}^n l_{ij} = - \sum_{i=1, i \neq j}^n a_{ij} + l_{jj} = -deg_{in}(v_j) + deg_{out}(v_j).$$

Tale somma è nulla se e soltanto se il grafo è bilanciato.

Dimostriamo ora l'equivalenza tra le ultime due affermazioni.

$0 = \sum_{i=1}^n u_i = \mathbf{1}^T u = -\mathbf{1}^T Lx$ per ogni valore di $x \in \mathbb{R}^n$ se e soltanto se $\mathbf{1}^T L = 0$. □

Si noti che non si richiede che il grafo sia connesso.

Dai teoremi 13 e 14 segue:

Teorema 15. *Si consideri una rete di integratori con una topologia costante rappresentata da un grafo $G = (V, E, w)$ orientato e fortemente connesso. Il protocollo del consenso è globalmente asintoticamente stabile e risolve il problema dell'average-consensus se e soltanto se il grafo è bilanciato.*

Consenso in tempo discreto

L'algoritmo del consenso viene implementato da ogni agente in forma iterativa

$$x_i(k+1) = x_i(k) + \epsilon \sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_j(k) - x_i(k)), \quad (24)$$

dove $\epsilon > 0$ è il passo di integrazione.

La dinamica dell'intero sistema è lineare

$$x(k+1) = Px(k) \quad (25)$$

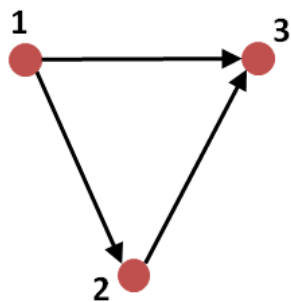
dove $P = I - \epsilon L$ è la **matrice di Perron** associata al grafo e con parametro ϵ .

Definizione 22. *Una matrice è **riducibile** (o decomponibile) se esiste una permutazione di righe e colonne che trasformi la matrice in triangolare a blocchi (equivalentemente esiste un sottoinsieme di indici I tale che $a_{ij} = 0$ per ogni $i \in I$ e $j \notin I$. Se tale sottoinsieme di indici non esiste la matrice è detta **irriducibile** (o non decomponibile).*

Una matrice non negativa è **irriducibile** se è associata ad un grafo fortemente connesso,

Definizione 23. *Una matrice è **stocastica per righe** (o per colonne) se le somme per righe (per colonne) è pari a uno. Una matrice stocastica e irriducibile è **primitiva** se ha un solo autovalore di modulo massimo.*

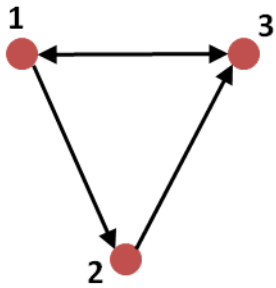
Esempio 13. *Si consideri il grafo*



$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{sia } \epsilon = \frac{3}{4} \text{ si ha: } P = \begin{bmatrix} -1/2 & 3/4 & 3/4 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

P è riducibile

Esempio 14. *Si consideri il grafo*



$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{sia } \epsilon = \frac{1}{2} \text{ si ha: } P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{bmatrix}$$

P è stocastica per righe, positiva e irriducibile con autovalori

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ e quindi primitiva.

Teorema 16. *Sia G un grafo orientato con n nodi e grado massimo $d_{max}(G) = \max_i \sum_{j \neq i} a_{ij}$. La matrice di Perron P con parametro $\epsilon \in (0, 1/d_{max}]$ verifica le seguenti proprietà:*

- ▶ *P è una matrice non negativa stocastica per righe con un autovalore pari a 1.*
- ▶ *Tutti gli autovalori di P appartengono al cerchio unitario.*
- ▶ *Se G è bilanciato P è doppiamente stocastica (stocastica per righe e per colonne).*
- ▶ *Se G è fortemente connesso e $0 < \epsilon < 1/d_{max}$ allora P è una matrice primitiva.*

Dimostrazione

- ▶ *$P = I - \epsilon L$ ha un autovalore pari ad uno in quanto L ha un autovalore nullo. $P\mathbf{1} = \mathbf{1} - \epsilon L\mathbf{1} = \mathbf{1}$ quindi P è stocastica per righe. Infine $P = I - \epsilon D + \epsilon A$ e ϵA è non negativa mentre $I - \epsilon D$ ha elementi diagonali pari a $1 - \epsilon d_i \geq 1 - d_i/d_{max} \geq 0$ da cui segue che P è anche non negativa.*

- ▶ Gli autovalori μ_i della matrice di Perron si trovano a partire dagli autovalori λ_i del Laplaciano: $\mu_i = 1 - \epsilon\lambda_i$. Gli autovalori del Laplaciano sono (per il Teorema di Gershgorin 1) nel cerchio $|s - d_{max}| \leq d_{max}$ essendo $\epsilon \leq 1/d_{max}$ si ha che gli autovalori di P sono nel cerchio $|z| \leq 1$.
- ▶ Se G è un grafo orientato bilanciato si ha che $\mathbf{1}$ è autovettore sinistro di L per cui $\mathbf{1}^T P = \mathbf{1}^T - \epsilon \mathbf{1}^T L = \mathbf{1}^T$ da cui segue che P è doppiamente stocastica.
- ▶ Se G è fortemente connesso la matrice P è irriducibile. Inoltre, dato $0 < \epsilon < 1/d_{max}$ la trasformazione $z = 1 - \epsilon s$ trasforma il cerchio $|s - d_{max}| = d_{max}$ in un cerchio strettamente contenuto nel disco unitario e passante per il punto $z = 1$ inoltre P ha un solo autovalore pari ad 1 in quanto L ha un solo autovalore nullo. Quindi esiste un solo autovalore di P di modulo massimo e P è primitiva.

L'importanza di avere una matrice di Perron P che sia primitiva è dovuta al fatto che questa condizione è necessaria per la convergenza dell'algoritmo del consenso.

Lemma 2. *Sia P una matrice non negativa e primitiva con autovettori sinistro e destro v_l e v_r tali che $v_r^T v_l = 1$, allora $\lim_{k \rightarrow \infty} P^k = v_r v_l^T$.*

Teorema 17. *Si consideri una rete di agenti $x_i(k+1) = x_i(k) + u_i(k)$ rappresentata da un grafo G . Si consideri l'algoritmo del consenso $u_i(k) = \epsilon \sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_j(k) - x_i(k))$ dove $0 < \epsilon < 1/d_{max}$ e d_{max} è il grado massimo. Se G è un grafo orientato fortemente connesso si ha:*

- ▶ *un consenso viene raggiunto per ogni condizione iniziale;*
- ▶ *il valore di consenso è $\alpha = \sum_i w_i x_i(0)$ dove $\sum_i w_i = 1$;*
- ▶ *se G è bilanciato (P doppiamente stocastica) il problema dell'average-consensus è risolto e $\alpha = 1/n \sum_i x_i(0)$.*

Dimostrazione. ► Si noti che $x(k) = P^k x(0)$, e il consenso a tempo discreto viene raggiunto se esiste il $\lim_{t \rightarrow \infty} P^k$. Dal punto 4 del Teorema 16 si ha che P è una matrice primitiva e, in base al Lemma 2, il limite $\lim_{t \rightarrow \infty} P^k$ esiste per le matrici primitive.

- Inoltre $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} P^k x(0) = v_r v_l^T x(0)$. Essendo $v_r = \mathbf{1}$ si ha $x_i \rightarrow v_l^T x(0)$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Il gruppo quindi ammette un valore di consenso pari a $\sum_{i=1}^n v_{li} x_i(0)$ dove, dal Lemma 2, $\sum_{i=1}^n v_{li} = 1$.
- Se il grafo è bilanciato dal Teorema 16 (punto 3) si ha che P è doppiamente stocastica e $v_l = \frac{1}{n} \mathbf{1}$. Segue che il valore di consenso è $\frac{1}{n} \mathbf{1}^T x(0)$ che è il valore dell'average-consensus.

□

Consenso su reti dinamiche

Nel caso di agenti mobili come i veicoli la rete di connessione tra i robot può cambiare nel tempo. I robot possono non comunicare a causa dell'aumento della loro distanza o a causa di ostacoli sopraggiunti.

In generale le reti di comunicazione possono essere dinamiche. Sotto quali ipotesi l'algoritmo del consenso continua a convergere?

Caso connesso

Nel caso non orientato, se la topologia della rete non è costante si ha

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j \in N_i(t)} (x_j(t) - x_i(t)),$$

Se lo stato x_i dell'agente i -esimo è un vettore di p componenti (nel caso del Rendezvous planare $p = 2$), su ogni componente z_j si ha $\dot{z}_j(t) = -L(t)z_j$, con $j = 1, \dots, p$. Se $G(t)$ è connesso si ha che lo spazio nullo di $L(t)$ ha dimensione 1 e il suo ortogonale $n - 1$. Ogni componente si può scrivere come $z_j(t) = \alpha_j(t)\mathbf{1} + \hat{z}_j(t)$ con $\hat{z}_j(t)$ ortogonale a $\mathbf{1}$. Sappiamo che $\dot{\alpha}_j(t) = 0$ quando $G(t)$ è connesso.

La proiezione $w_j(t)$ di $z_j(t)$ nello spazio ortogonale al nullo di $L(t)$ ha dimensione $n - 1$ e $\dot{w}_j(t) = M(t)w_j(t)$ per $j = 1, \dots, d$. Essenzialmente si ha un cambio di base in cui si mette l'autovalore 0 al primo posto in L e quindi

$$L = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array} \right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ -M \\ \end{array}$$

Inoltre sempre sotto l'ipotesi di $G(t)$ connesso si ha che M è simmetrica e $M(t) < 0$ da cui $w_j^T M(t) w_j < 0$. Non è possibile concludere direttamente sulla asintotica stabilità del sistema in quanto il sistema è lineare ma tempo variante. In particolare quello che si ha è un sistema switching in quanto il numero dei possibili grafi associati al sistema è finito:

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)} x, \sigma(t) \in \{1, \dots, q\}.$$

Tali sistemi sono asintoticamente stabili per ogni $\sigma(t)$ se esiste una candidata di Lyapunov comune a tutti i sistemi.

Si consideri un grafo G_k e la corrispondente matrice M_k . Si consideri $V = \frac{1}{2}w_j^T w_j$ che è definita positiva per ogni k .

Dalla simmetria di M_k si ha $\dot{V} = w_j^T M_k w_j$ essendo M_k definita negativa si ha che V è una funzione di Lyapunov ed è indipendente da k pertanto è la candidata comune che garantisce l'asintotica stabilità del sistema.

Concludendo si ha che w_j converge a 0 e z_j allo spazio generato da $\mathbf{1}$ finchè il grafo $G(t)$ rimane connesso.

E' possibile dimostrare che una condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità è quella che esiste un tempo T finito tale che su ogni intervallo $[\tau, \tau + T]$ l'unione $\bigcup_{\tau}^{\tau+T} G(t)$ è connessa.

Ma come si può fare in modo che i grafi $G(t)$ siano connessi?

Idea: aggiungere un peso w_{ij} ai termini $x_j - x_i$ in u_i con w_{ij} grande quando gli agenti i e j sono lontani.

Caso di rete costante a tratti

Si consideri la matrice del Laplaciano $L(t)$, il protocollo del consenso converge se $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \mathbf{1}\mu^T x(0)$ per un certo vettore colonna μ . Supponiamo che la topologia della rete è costante a tratti per un tempo positivo (*dwell time*) limitato inferiormente. Dati gli istanti t_1, t_2, \dots in cui la rete può cambiare, i dwell time sono $\tau_i = t_{i+1} - t_i$. Si ha consenso se
$$\lim_{i \rightarrow \infty} e^{-L(t_i)\tau_i} e^{-L(t_{i-1})\tau_{i-1}} \dots e^{-L(t_0)\tau_0} = \mathbf{1}\mu^T.$$

Si deve quindi studiare la convergenza di prodotti infiniti di matrici stocastiche.

Una matrice A è **irriducibile e aperiodica** (SIA) se $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = \mathbf{1}v^T$ dove v è un vettore colonna.

Dato un insieme finito di matrici SIA $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_n\}$ tale che ogni prodotto finito sia SIA, per ogni infinita sequenza S_{i_1}, S_{i_2}, \dots esiste un vettore colonna v tale che $\lim_{j \rightarrow \infty} S_{i_j} S_{i_{j-1}} \dots S_{i_1} = \mathbf{1}v^T$.

Un altro risultato di convergenza si ha quando la collezione dei grafi di comunicazione è connessa. Con collezione di un insieme di grafi si intende un grafo con insieme di vertici e archi pari all'unione di tutti gli insiemi di vertici e archi dei grafi considerati. La collezione è congiuntamente connessa se il grafo ottenuto è connesso. Si noti che se anche un solo grafo della collezione è connesso allora anche la collezione è connessa. Inoltre una collezione può essere connessa senza che nessun grafo della collezione lo sia.

Per il consenso discreto si ha convergenza se tutti i grafi di comunicazione sono bilanciati e la collezione è connessa.

Consenso su reti con ritardo

Si consideri il problema del consenso continuo su reti a topologia fissa in cui lo stato del nodo v_i passa attraverso il canale di comunicazione e_{ij} con un ritardo pari a $\tau_{ij} > 0$ prima di raggiungere il nodo v_i . La funzione di trasferimento associata al canale risulta quindi

$$h_{ij}(s) = e^{-\tau_{ij}s}.$$

La dinamica del consenso risulta

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j \in N_i} a_{ij} [x_j(t - \tau_{ij}) - x_i(t - \tau_{ij})].$$

Applicando la L -trasformata si ottiene:

$$sX_i(s) - X_i(0) = \sum_{j \in N_i} a_{ij} h_{ij}(s) [X_j(s) - X_i(s)],$$

dove $X_i(s)$ è la trasformata di $x_i(t)$. Equivalentemente

$$X(s) = (sI + L(s))^{-1}x(0),$$

dove $L(s)$ è il laplaciano associato alla matrice di adiacenza $[A(s)]_{ij} = a_{ij}h_{ij}(s)$.

Teorema 18. *Si consideri una rete di integratori con ritardo uniforme $\tau_{ij} = \tau$. Si supponga che il grafo G sia a topologia costante, non orientato e connesso. Il protocollo del consenso è globalmente asintoticamente stabile e risolve il problema dell'average-consensus se e soltanto se vale una delle seguenti condizioni (equivalenti):*

- ▶ $\tau \in]0, \tau^*[$ con $\tau^* = \pi / (2\lambda_n)$ e $\lambda_n = \lambda_{max}(L)$.
- ▶ Il diagramma di Nyquist di $\Gamma(s) = e^{-\tau s} / s$ non circonda il punto $-1/\lambda_k, \forall k > 1$.

Inoltre per $\tau = \tau^$ il sistema converge asintoticamente oscillando con frequenza λ_n .*

Osservazione

Dal teorema di Gershgorin 1 si ha che anche $\lambda_n \leq 2d_{max}(G)$ e quindi una condizione sufficiente per la convergenza del consenso è

$$\tau \leq \frac{\pi}{4d_{max}}.$$

Quindi reti con elevato numero di archi uscenti dai nodi sono meno tolleranti ai ritardi di comunicazione.

Controllo di formazioni

In questa parte del corso ci occupiamo del problema di descrivere cosa sono le formazioni di robot, di definire delle strategie di controllo che consentono ad un insieme di robot di raggiungere una data formazione e infine il problema di definire leggi di controllo che consentono di mantenere la formazione una volta raggiunta e quindi di muovere la formazione.

La formazione può essere descritta fornendone la forma (cioè le distanze relative tra gli agenti) o le configurazioni desiderate.

Specifiche di formazione

Sia D un insieme di distanze che si desiderano mantenere tra i robot:

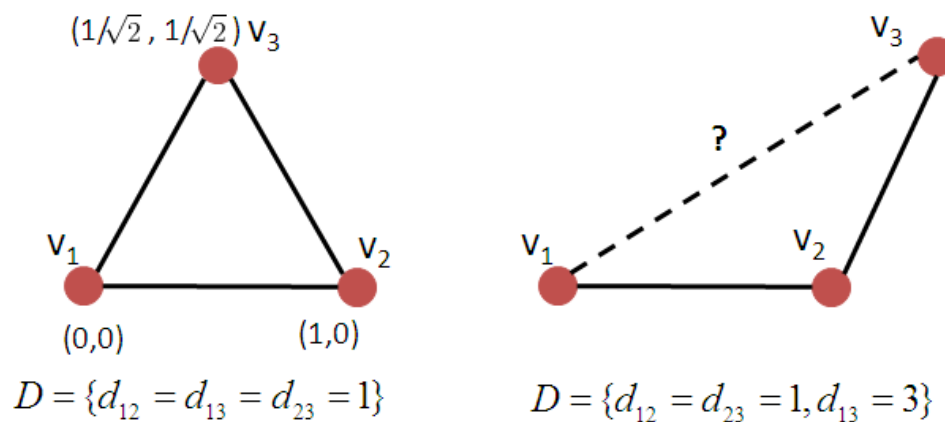
$$D = \{d_{ij} \in \mathbb{R} \mid d_{ij} > 0, i, j = 1, \dots, n, i \neq j, d_{ij} = d_{ji}\}.$$

Si suppone che l'insieme delle distanze D corrisponda ad una formazione ammissibile

Più formalmente si ha che

Definizione 24. Una formazione caratterizzata dall'insieme D è **ammissibile** se esistono dei punti $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}^p$ (con $p = 2, 3$) tali che

$$\|z_i - z_j\| = d_{ij}, \text{ per tutti gli indici } i, j = 1, \dots, n, i \neq j.$$



Nella figura, sono riportate due formazioni: a sinistra una formazione ammissibile a destra una non ammissibile.

Definizione 25. Data una formazione D , ogni altra formazione D' per la quale esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $D' = \alpha D$ è **scale-invariant**.

Si consideri $\Xi = \{z_1, \dots, z_n | z_i \in \mathbb{R}^p, i = 1, \dots, n\}$ tale che $\|z_i - z_j\| = d_{ij}$ per tutte le coppie di punti in Ξ .

Definizione 26. Ogni insieme di punti $x_i \in \mathbb{R}^p$ con $i = 1 \dots, n$ e $p = 2, 3$, tali che $x_i = z_i + \tau$ per ogni $i = 1 \dots, n$, rappresentano una formazione **translational-invariant** per un arbitrario $\tau \in \mathbb{R}^p$.

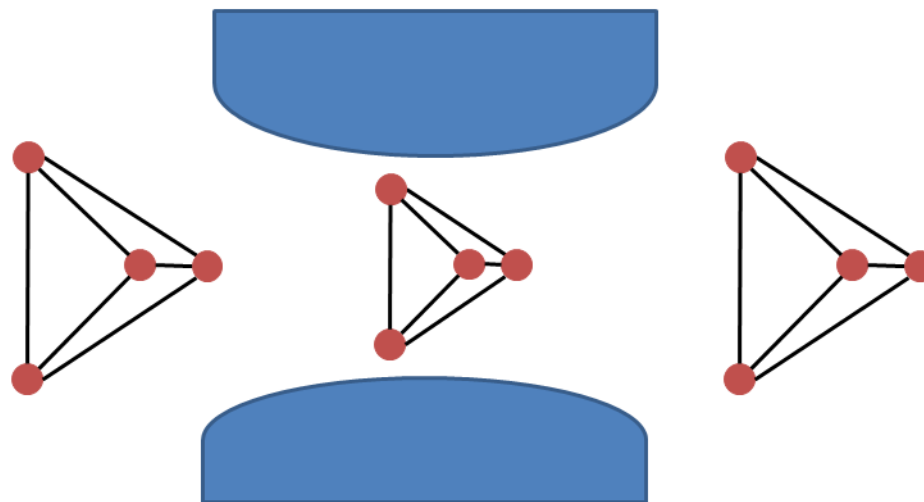


Figura 20: Esempio di formazioni scale-invariant (prima e seconda formazione) e translational-invariant (prima e terza formazione).

Una formazione può essere descritta da un grafo $G_f(V, E_f, w)$ dove V è l'insieme dei nodi che rappresentano i robot, E_f è l'insieme di archi che specificano le distanze che vanno mantenute nella formazione e la funzione peso $w : E_f \rightarrow \mathbb{R}^+$ specifica la distanza d_{ij} da mantenere tra i nodi v_i e v_j : $w(v_i, v_j) = d_{ij}$. In generale, non è consigliato descrivere una formazione specificando le distanze desiderate tra tutte le coppie di robot. Infatti, imporre di mantenere una data distanza implica che il robot deve raggiungere e poi mantenere la distanza prefissata e questo richiede un costo computazionale. E' quindi meglio minimizzare il numero di archi che descrive la formazione.

In alcuni casi inoltre, data una formazione è necessario assegnare ad ogni agente il proprio posto previsto nella formazione.

Formazioni Rigide

Si consideri un grafo $G_f(V, E_f, w)$ che rappresenta una formazione ammissibile e un insieme di punti $\Xi = \{z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}^p\}$ tali che $\|z_i - z_j\| = d_{ij}$ tali che $(v_i, v_j) \in E_f$. Si considera la **struttura** $\mathcal{G}(\Xi) = (\Xi, G_f)$ come il grafo e un insieme di punti che ne verificano l'ammissibilità.

Definizione 27. *Una traiettoria di $\mathcal{G}(\Xi)$ è un'insieme di stati continuo $x_1(t), \dots, x_n(t)$ tali che $x_i(0) = z_i$.*

Tale traiettoria rappresenta il moto di una rete di robot che all'istante iniziale era in formazione.

Definizione 28. *La traiettoria (e quindi il moto) di una rete di robot è **consistente con gli archi** se $\|x_i(t) - x_j(t)\|$ è costante per tutti i $(v_i, v_j) \in E_f$.*

Definizione 29. *La traiettoria (e quindi il moto) di una rete di robot è **rigida** se $\|x_i(t) - x_j(t)\|$ è costante per tutti gli indici i e j .*

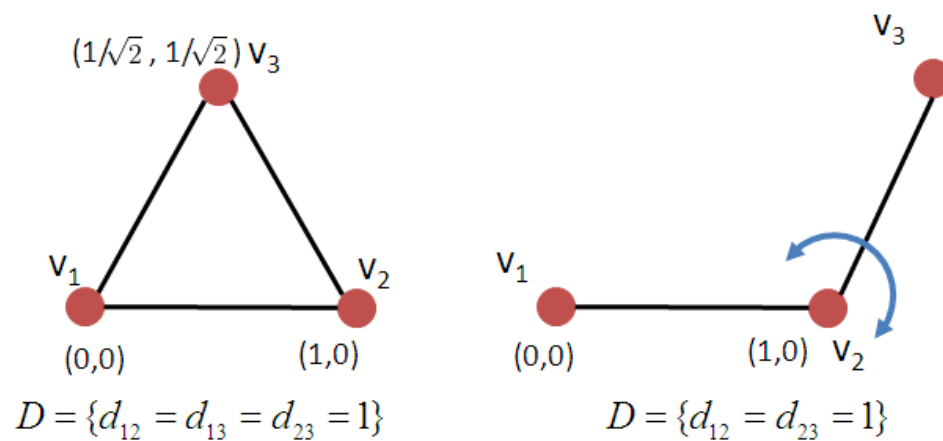


Figura 21: Sinistra: grafo rigido, Destra: grafo non rigido

Definizione 30. *Una struttura è **rigida** se e soltanto se tutte le traiettorie consistenti con gli archi sono traiettorie rigide, altrimenti è **flessibile**.*

Ovviamente, una struttura rigida rappresenta una formazione rigida e cioè una formazione la cui forma può essere mantenuta rigidamente con la semplice imposizione di mantenere costanti delle distanze.

Una traiettoria consistente con gli archi è tale che $\|x_i(t) - x_j(t)\|^2$ è costante per tutti i $(v_i, v_j) \in E_f$. Si ha quindi che

$$(\dot{x}_i(t) - \dot{x}_j(t))(x_i(t) - x_j(t)) = 0$$

per tutti i $(v_i, v_j) \in E_f$.

L'assegnamento di velocità infinitesimali costanti $\dot{x}_i = u_i$ che verificano l'equazione precedente corrisponde a un **moto infinitesimale** della struttura.

Dato $u = (u_1^T, \dots, u_n^T)^T$ si ha che i moti infinitesimali corrispondono alla soluzione del sistema lineare

$$R(\mathcal{G}(\Xi))u = 0,$$

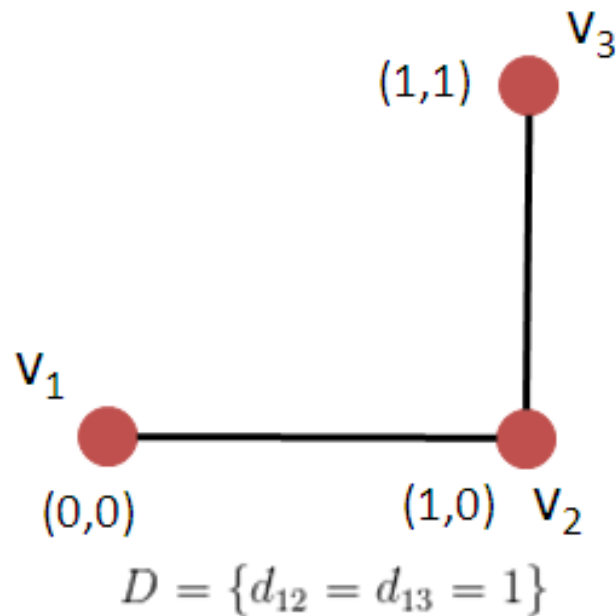
e $R(\mathcal{G}(\Xi))$ è detta **matrice di rigidità** che consiste in $|E_f|$ righe e pn colonne.

Definizione 31. Una struttura è **infinitesimalmente rigida** se $R(\mathcal{G}(\Xi))u = 0$ per ogni moto infinitesimale u .

Teorema 19. Una struttura con $n \geq 2$ robot in \mathbb{R}^2 è infinitesimalmente rigida se e soltanto se $\text{rank}(R(\mathcal{G}(\Xi))) = 2n - 3$.

Si ha che la rigidezza infinitesimale implica la rigidezza.

Esempio 15. Si consideri il caso di tre robot planari ($n = 3$ e $p = 2$) le cui condizioni iniziali siano $q = (x_1(0)^T, x_2(0)^T, x_3(0)^T)^T = (0, 0, 1, 0, 1, 1)^T$.



Per il mantenimento della formazione

si hanno i seguenti vincoli:

$$\begin{cases} (x_1 - x_2)^T (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 0 \\ (x_2 - x_3)^T (\dot{x}_2 - \dot{x}_3) = 0 \end{cases}$$

La matrice di rigidità risulta

$$\begin{pmatrix} (x_1 - x_2)^T & (x_2 - x_1)^T & 0 \\ 0 & (x_2 - x_3)^T & (x_3 - x_2)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = 0.$$

In particolare per $t = 0$ si ha

$$R(\mathcal{G}(\Xi(0))) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si ha $\text{rank}(R) = 2 < 2n - 3$ e pertanto la formazione non è rigida.

Dato un grafo di formazione G_f una struttura $\mathcal{G}(\Xi) = (\Xi, G_f)$ può essere vista come una particolare realizzazione di G_f .

Definizione 32. *Un grafo è **rigido** se ha una realizzazione infinitesimalmente rigida.*

Chiaramente l'aggiunta di archi in grafi rigidi non ne modifica la rigidità. Ha senso quindi chiedersi quale sia il numero minimo di archi per garantire che il grafo sia rigido.

Definizione 33. *Un grafo è **minimamente rigido** è rigido ma perde la rigidità se un qualsiasi arco viene eliminato..*

Nel caso planare si ha

Teorema 20. *Un grafo con $n \geq 2$ vertici in \mathbb{R}^2 è minimamente rigido se e soltanto se*

- ▶ *ha $2n - 3$ archi e*
- ▶ *ogni sottografo indotto con $n' \leq n$ vertici ha non più di $2n' - 3$ archi.*

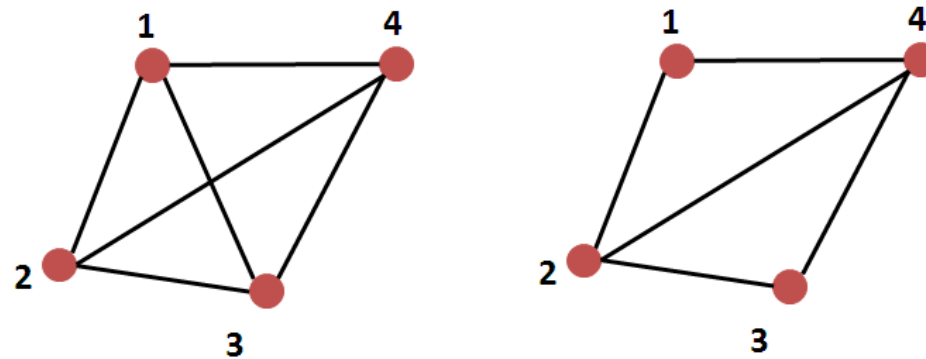


Figura 22: Sinistra: grafo non minimamente rigido, Destra: grafo minimamente rigido

Strutture persistenti

Se un arco corrisponde alla distanza da mantenere tra due agenti, il compito di mantenimento della distanza desiderata può essere delegato ad uno dei due agenti. Questo corrisponde con l'assegnare una orientazione all'arco e quindi al grafo.

Definizione 34. *Una struttura orientata $\mathcal{D}(\Xi) = (\Xi, \mathcal{D}_f)$ dove \mathcal{D}_f è il grafo orientato che rappresenta la formazione. L'arco $(i, j) \in E_f$ rappresenta che è responsabilità di i mantenere la distanza d_{ij} e quindi rappresenta un vincolo per il moto di i .*

Definizione 35. *Una struttura è **consistente con i vincoli** se lungo tutte le traiettorie della struttura gli agenti verificano i rispettivi vincoli.*

Definizione 36. *Una struttura è **persistente** se è consistente con i vincoli e la corrispondente struttura non orientata è rigida.*

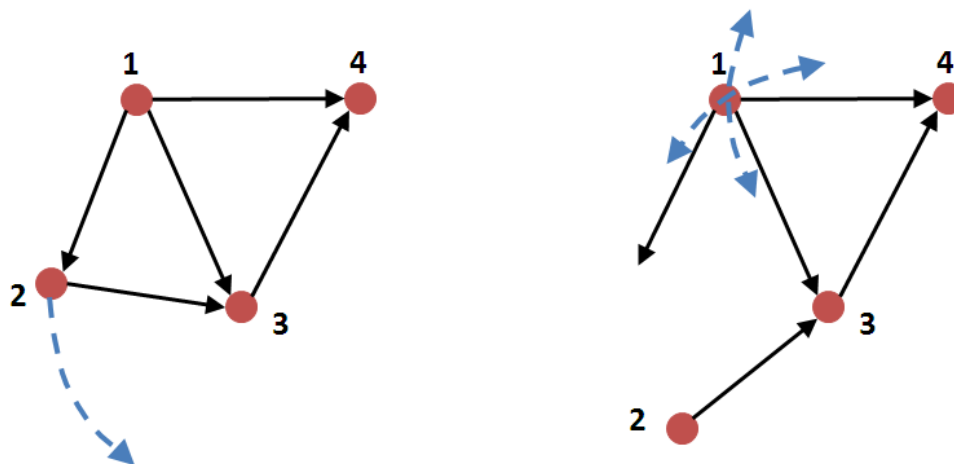


Figura 23: Esempio di formazione non persistente: l'agente 1 non è in grado di seguire l'agente 2 mantenendo la distanza desiderata con 3 e 4.

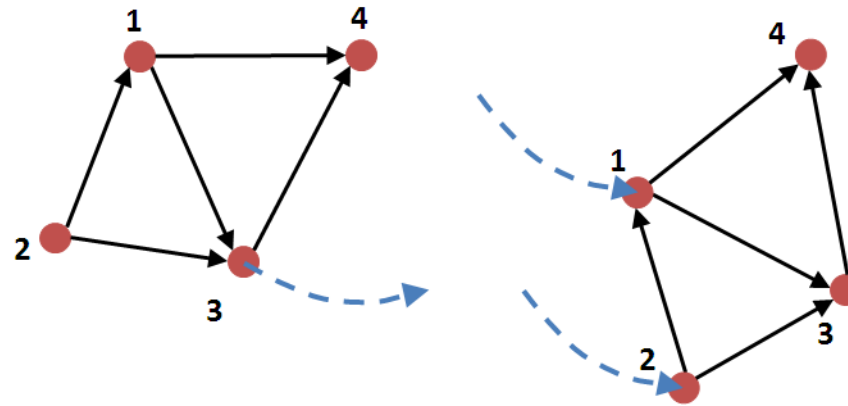


Figura 24: Esempio di formazione persistente: dato un movimento ammissibile dell'agente 3, gli agenti 1 e 2 possono mantenere la distanza desiderata con gli altri agenti.

Configurazioni relative

Una alternativa a fornire le distanze, che si desidera far raggiungere o mantenere agli agenti, è quella di fornire delle configurazioni relative.

Ad esempio dati tre agenti che si muovono in \mathbb{R}^3 si ha $x_i \in \mathbb{R}^3$ e la specifica della formazione può essere data attraverso il vettore delle configurazioni relative

$$z(t) = [(x_1(t) - x_2(t))^T (x_2(t) - x_3(t))^T]^T,$$

dove $z(t) \in \mathbb{R}^6$. In questo caso la formazione è completamente specificata infatti le distanze tra tutte le coppie sono determinabili una volta noto $z(t)$:

$$x_1(t) - x_3(t) = (x_1(t) - x_2(t)) + (x_2(t) - x_3(t)).$$

Una formazione è quindi data una volta individuato il vettore $\bar{z} \in \mathbb{R}^6$ delle configurazioni relative desiderate.

Dato $x = [x_1^T \ x_2^T \ x_3^T]^T \in \mathbb{R}^9$ il vettore delle configurazioni relative z si può costruire a partire dalla conoscenza della matrice di incidenza del grafo associato:

$$z(t) = F^T x(t),$$

Dove

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes I_3,$$

I_3 è la matrice di identità 3×3 e \otimes rappresenta il prodotto di Kronecker.

Si ricorda che se A è una matrice $m \times n$ e B è una matrice $p \times q$, il prodotto di Kronecker $A \otimes B$ è una matrice $mp \times nq$ definita a blocchi:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

Più in generale , dati n agenti in \mathbb{R}^p , per costruire una formazione è sufficiente prendere un albero di copertura orientato del grafo completo K_n e fornire un valore desiderato \bar{z} al vettore di configurazioni relative $z(t) = (D \times I_p)^T x(t)$ dove $x(t) = [x_1^T \dots x_n^T]^T \in \mathbb{R}^{np}$, D è la matrice di incidenza dell'albero di copertura e I_p è la matrice identità $p \otimes p$.

Ovviamente la stessa formazione può essere rappresentata tramite due diversi alberi di copertura per cui esistono delle matrici di trasformazione che trasformano una configurazione in un'altra equivalente.

Controllo lineare di formazioni: shape formation

Dopo esserci preoccupati di come specificare una formazione passiamo al problema di far raggiungere agli agenti una formazione desiderata.

In particolare, descriviamo ora come far muovere un insieme di agenti per raggiungere una formazione translational-invariant determinata da un grafo $G_f = (V, E_f)$ e un insieme di configurazioni finali Ξ .

In questo caso particolare siamo in grado di risolvere il problema (che risulta essere lineare) con le tecniche di consenso viste precedentemente.

Si consideri come stato x_i dell'agente i la posizione del robot, $x_i \in \mathbb{R}^p$ ($p = 1, 2, 3$). Si vuole un protocollo di formazione che garantisca che per un certo $\tau \in \mathbb{R}^p$ si ha $x_i = \xi_i + \tau$ per $i = 1, \dots, n$. Si consideri il grafo $G = (V, E)$ che rappresenta la rete degli agenti.

Si vuole guidare gli agenti in modo che valgano le due seguenti proprietà:

- ▶ $\|x_i(t) - x_j(t)\|$ converge asintoticamente a d_{ij} per tutti gli i e j tali che $(v_i, v_j) \in E$.
- ▶ Se il grafo G è dinamico ($G(t) = (V, E(t))$) deve convergere in tempo finito ad un grafo che ammette G_f come sottografo. Cioè si vuole che esista un $T > 0$ finito tale che $E_f \subset E(t)$ per ogni $t \geq T$.

Caso statico

Se il grafo è statico si assume che la seconda condizione sia verificata dal grafo G . E' necessario invece fare in modo che la prima condizione venga verificata. A tal fine si consideri τ_i l'errore rispetto alla configurazione $\xi_i \in \Xi$:

$$\tau_i(t) = x_i(t) - \xi_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Applicando il protocollo del consenso a τ_i si otterrebbe che a regime $x_i - \xi_i = \tau$ per un vettore costante τ e che quindi viene raggiunta una formazione translational-invariant.

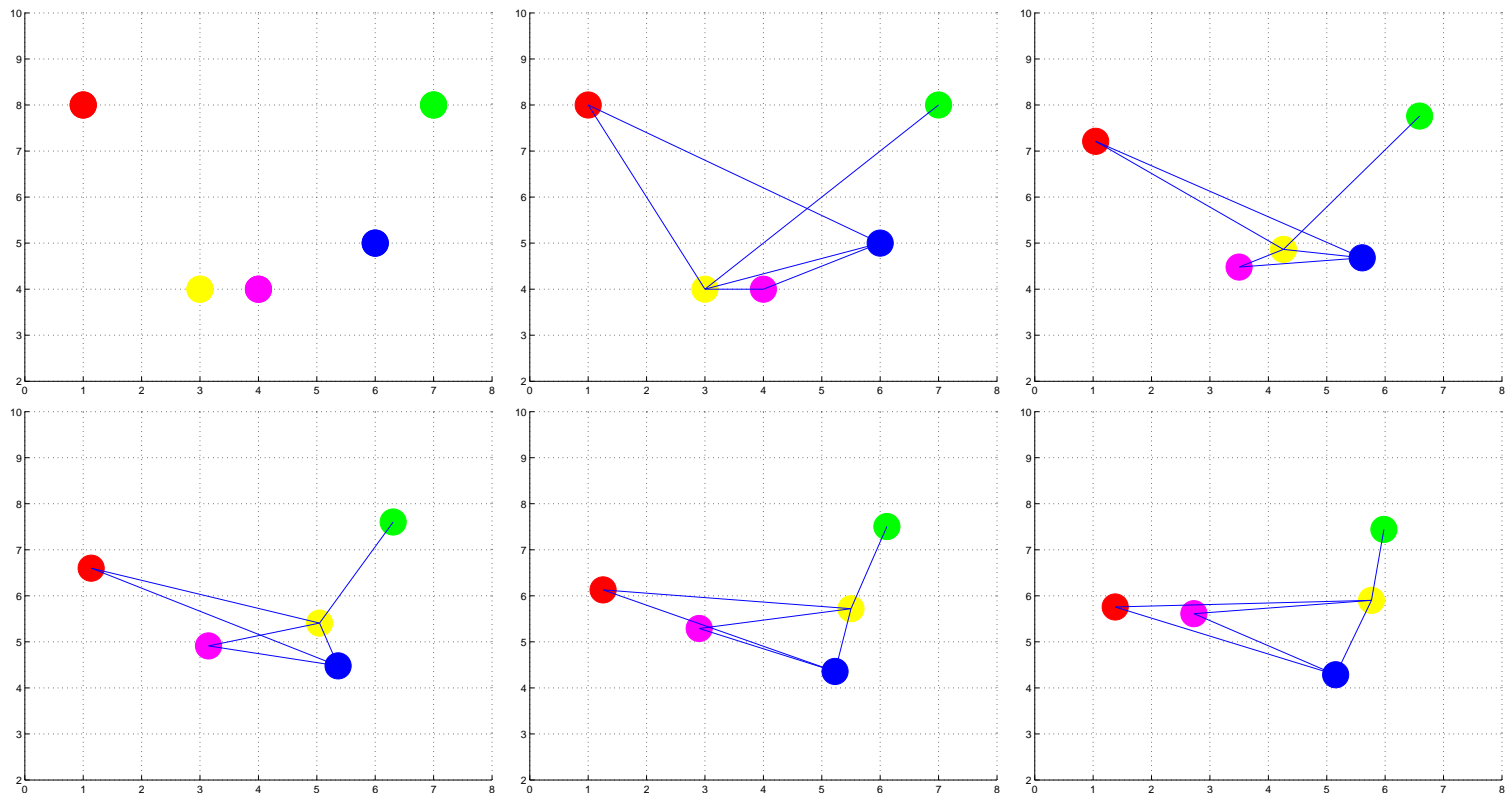
Si considera quindi $\dot{\tau}_i = - \sum_{j \in N_{f,i}} (\tau_i - \tau_j)$ dove $N_{f,i} = \{j \in \{1, \dots, n\} | (v_i, v_j) \in E_f\}$.

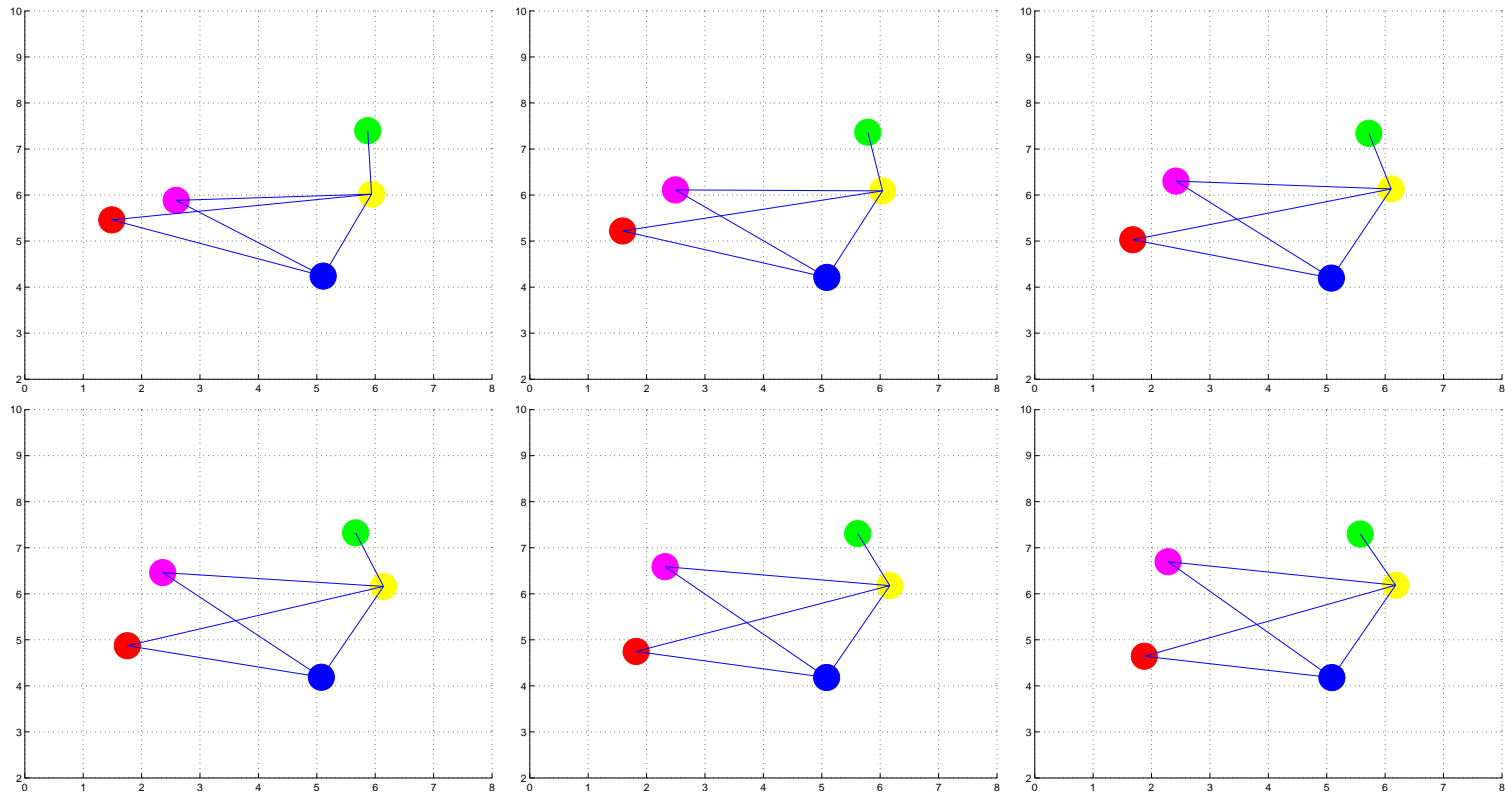
Data la scelta di τ_i si ha che $\dot{x}_i = \dot{\tau}_i$ e $\tau_i - \tau_j = x_i - x_j - (\xi_i - \xi_j)$ quindi una legge di controllo decentralizzato e lineare per la formazione è:

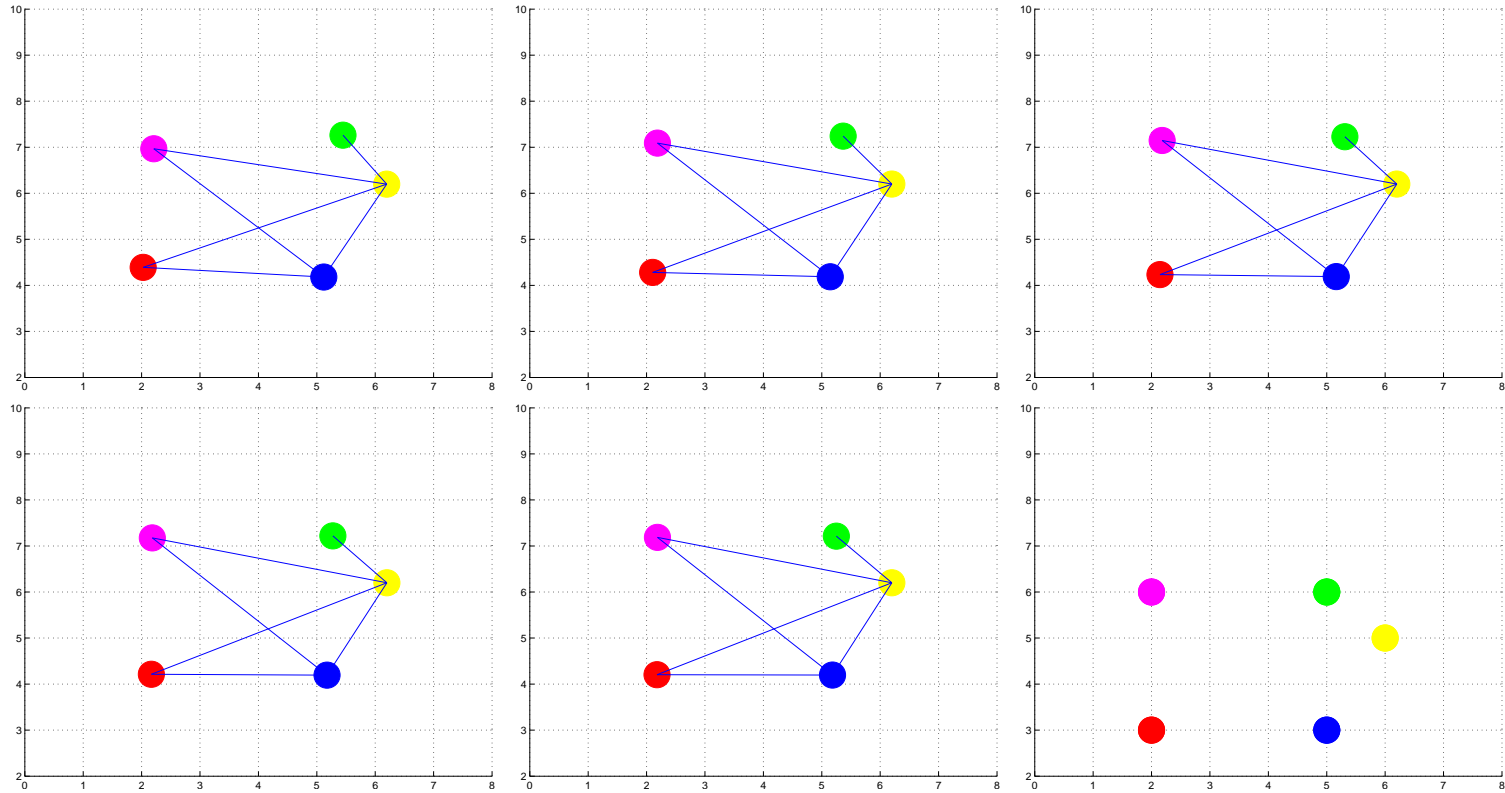
$$\dot{x}_i = - \sum_{j \in N_{f,i}} (x_i - x_j - (\xi_i - \xi_j))$$

Grazie alle proprietà di convergenza del protocollo del consenso, se il grafo è connesso si converge ad una formazione translational-invariant rispetto alla formazione di riferimento. Con questo approccio si assegna anche una posizione nella formazione ad ogni singolo agente.

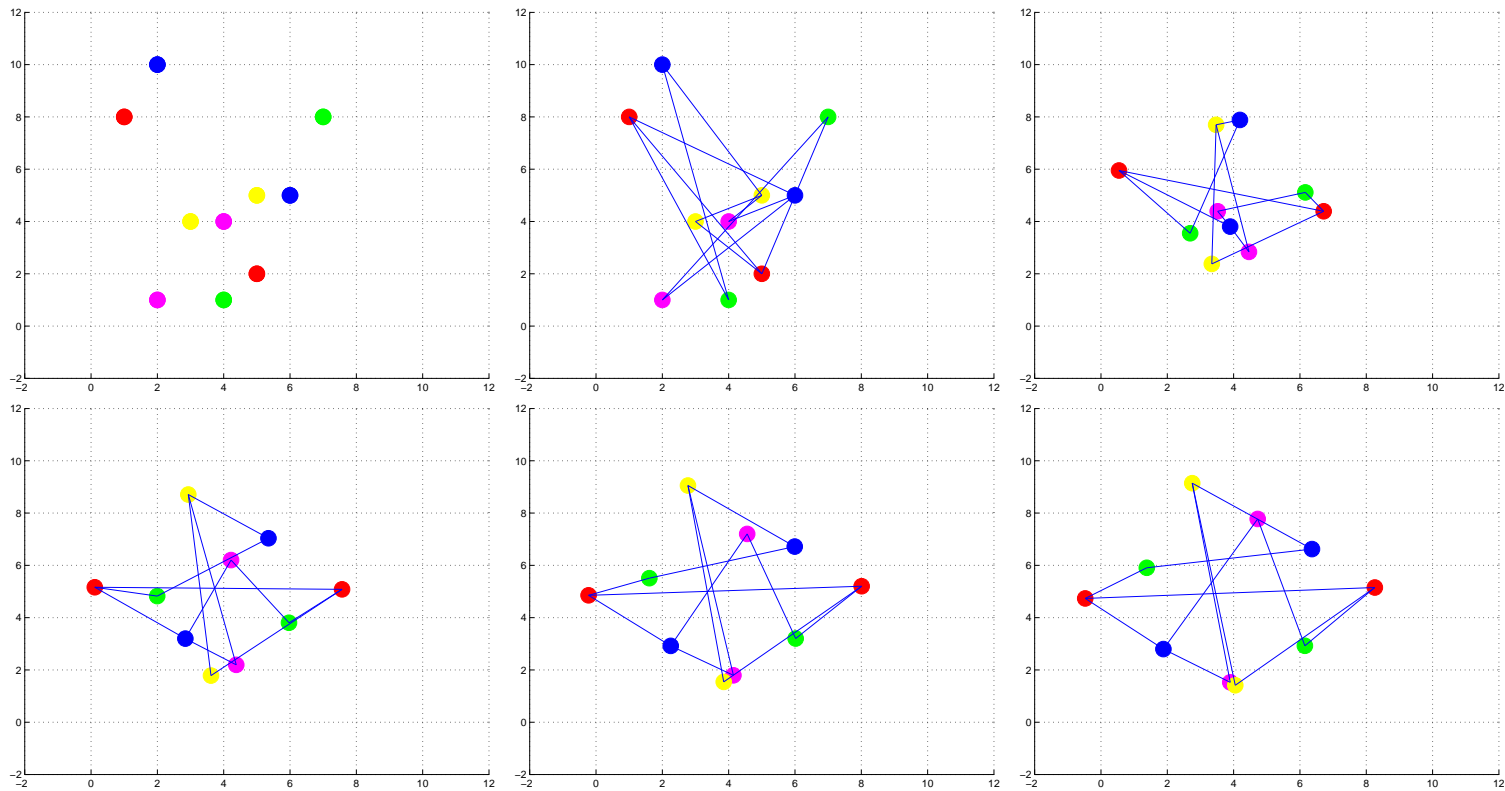
Esempio di raggiungimento della formazione con controllo lineare: prima e ultima immagine sono le condizioni iniziali e la formazione di riferimento. Caso con 5 agenti.

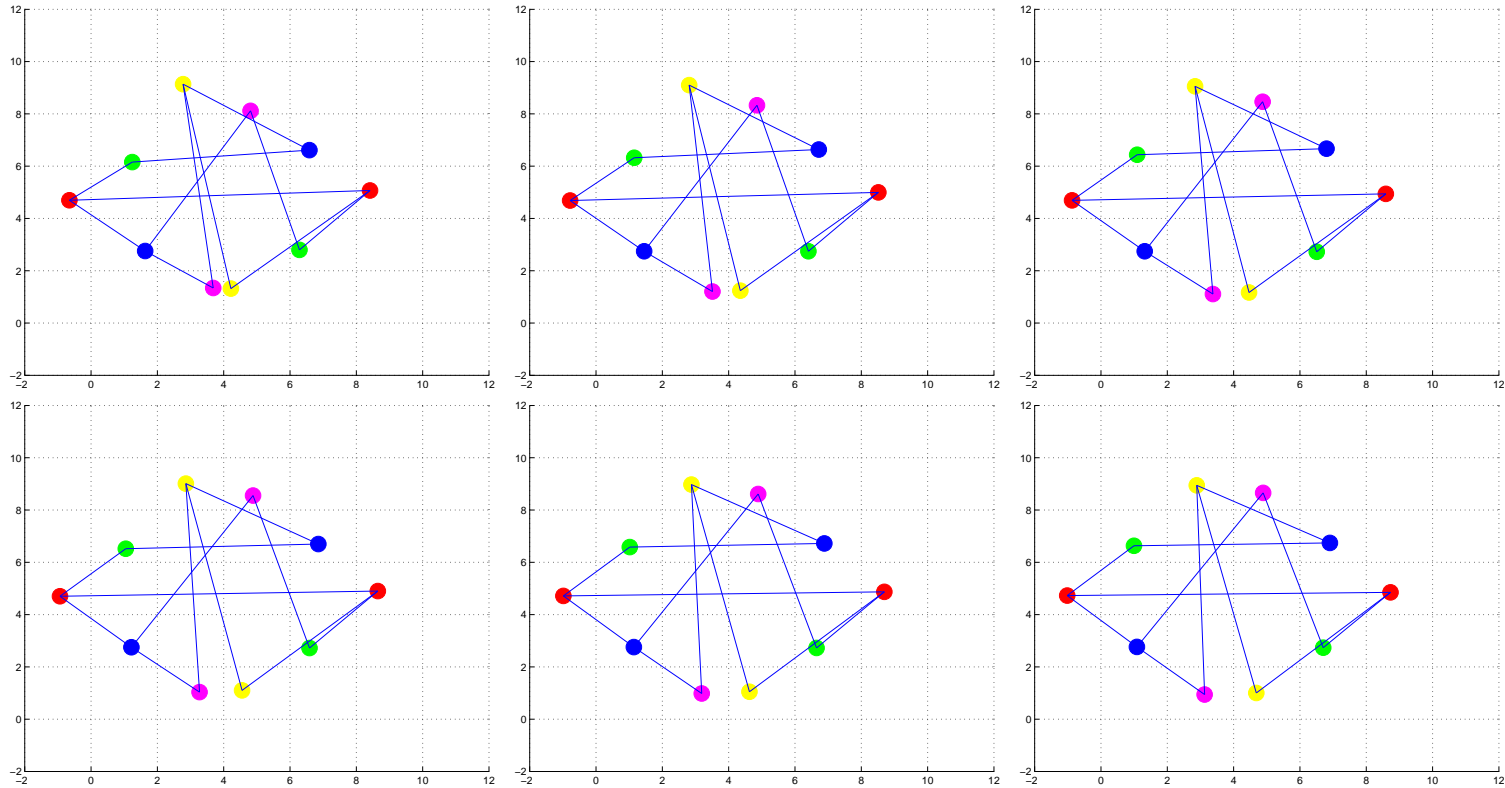


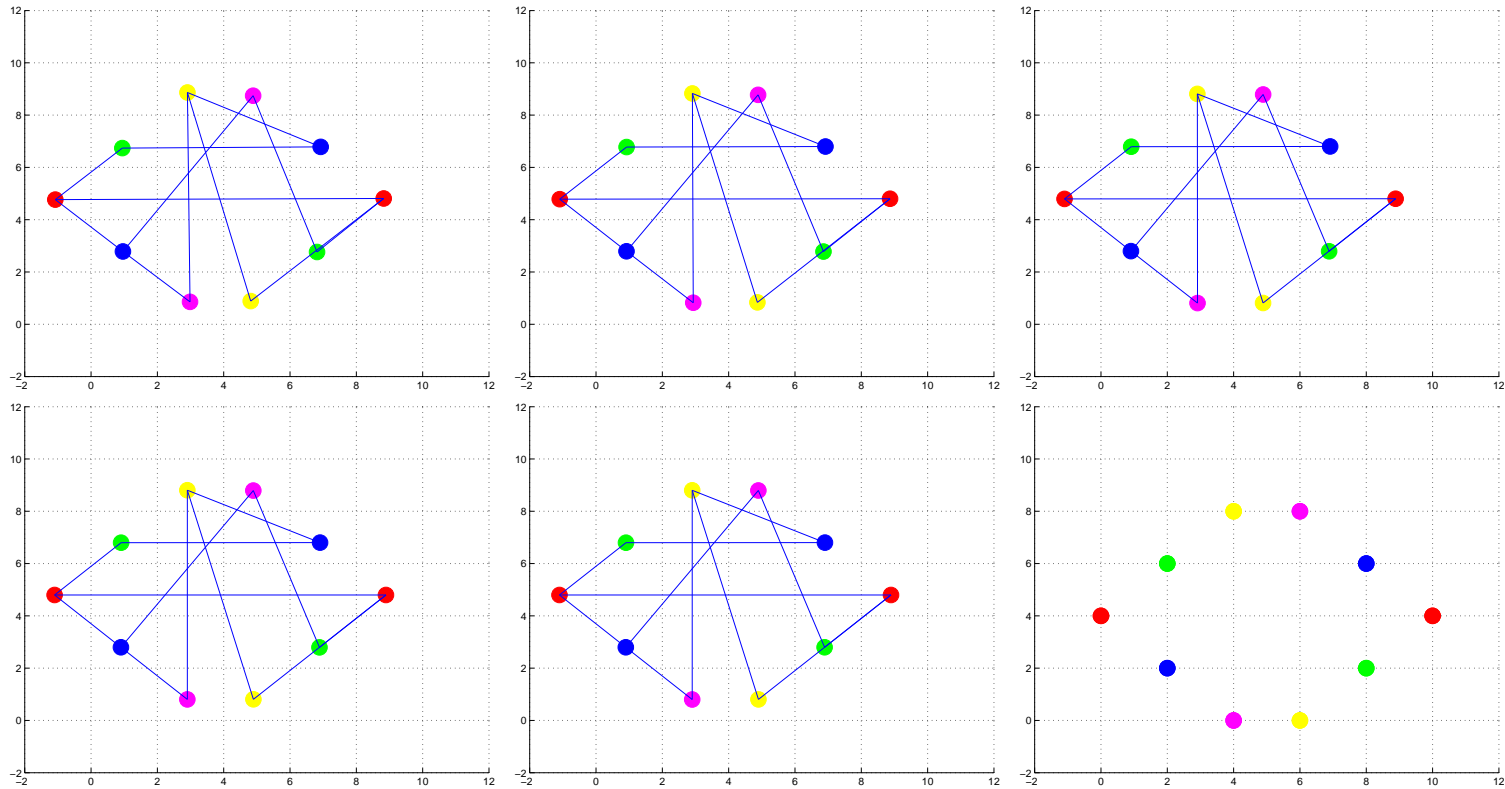




Esempio di raggiungimento della formazione con controllo lineare: prima e ultima immagine sono le condizioni iniziali e la formazione di riferimento. Caso con 10 agenti.







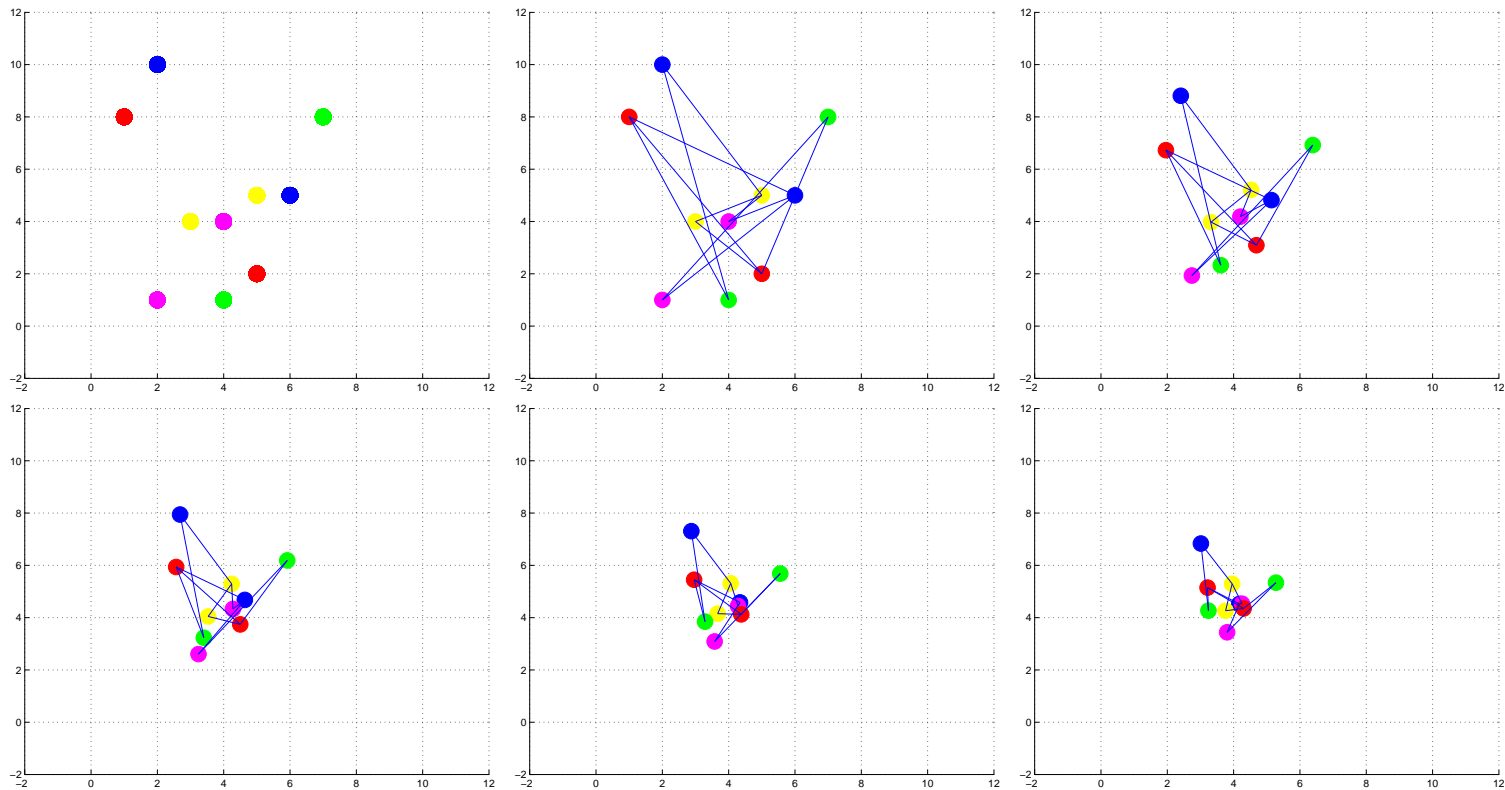
Caso dinamico

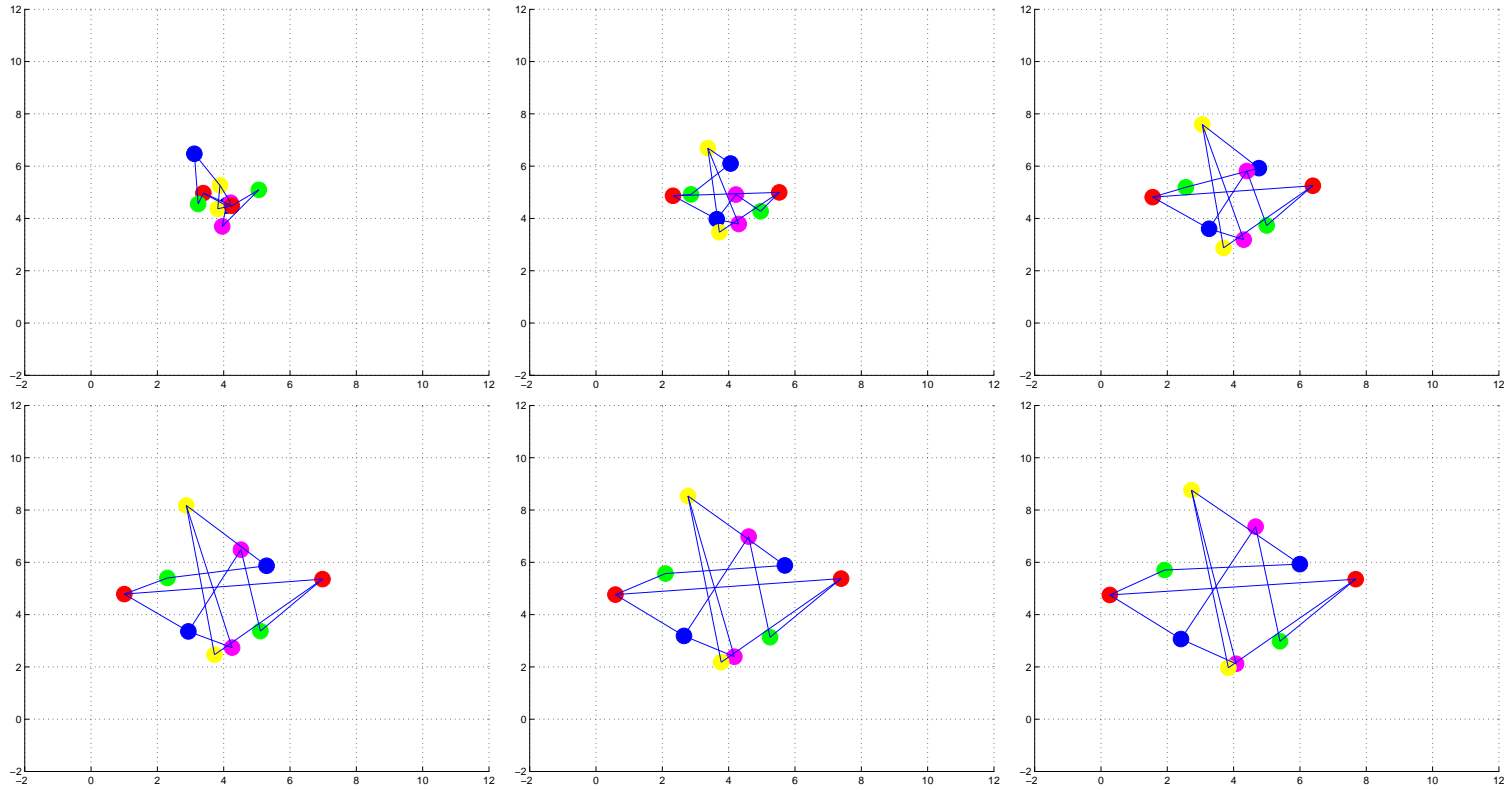
Se il grafo di interazione $G(t) = (V, E(t))$ è dinamico ma è tale da garantire che il grafo $G_f = (V, E_f)$ che rappresenta la formazione è tale che $E_f \subset E(t)$ per ogni $t \geq 0$ allora il protocollo descritto nel caso statico continua a convergere e a fornire una formazione translational-invariant (sempre sotto le ipotesi di connettività dei grafi).

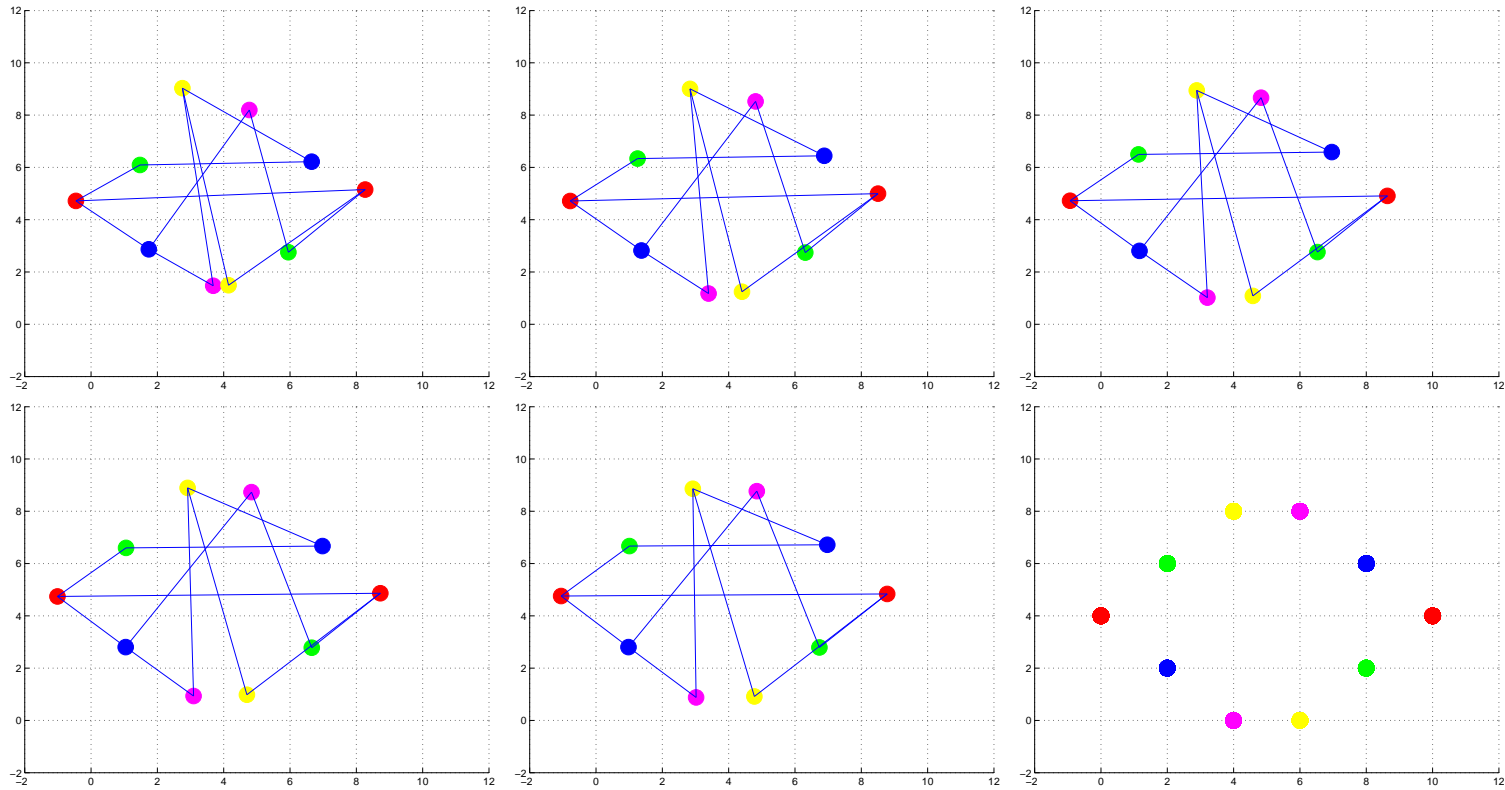
Per garantire che $E_f \subset E(t)$ per ogni $t \geq 0$ si possono utilizzare diverse strategie. Ad esempio si può fare un protocollo di rendezvous seguito da un protocollo di consenso lineare come quello descritto nel caso discreto. Si salta da un protocollo all'altro quando ogni agente ha $n - 1$ agenti adiacenti e questo è possibile tramite un classico algoritmo di esplorazione della rete in cui ogni agente invia un messaggio "ok" non appena riconosce che ha $n - 1$ agenti adiacenti e il protocollo del consenso parte non appena ogni agente riceve da tutti i propri nodi adiacenti il messaggio "ok".

In ogni caso è sempre necessario garantire che durante il protocollo del consenso si abbia $E_f \subset E(t)$ per ogni $t \geq 0$. Per fare questo è necessario utilizzare tecniche di controllo non lineare.

Esempio di raggiungimento della formazione con controllo lineare: prima e ultima immagine sono le condizioni iniziali e la formazione di riferimento. Caso con 10 agenti.







Controllo lineare di formazioni: configurazioni relative

Nel caso delle configurazioni relative si consideri l'albero di copertura orientato \mathcal{D} che rappresenta la formazione desiderata in termini di configurazioni relative. Sia D la matrice di incidenza associata al grafo \mathcal{D} .

Singolo integratore

Dato il modello del singolo integratore si ha $\dot{x}_i(t) = u_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ dove u_i rappresenta l'ingresso dell'agente i .

Sia $z(t) = D^T x(t)$ e z_{ref} le configurazioni relative desiderate. L'errore è dato da $e(t) = z_{ref} - z(t)$ e quindi

$$\dot{e}(t) = -D^T u(t).$$

Si consideri allora una retroazione degli stati della forma $u(t) = kDe(t)$ con $k > 0$. In questo caso u è un controllore proporzionale (P). Il sistema retroazionato risulta:

$$\dot{e}(t) = -D^T De(t).$$

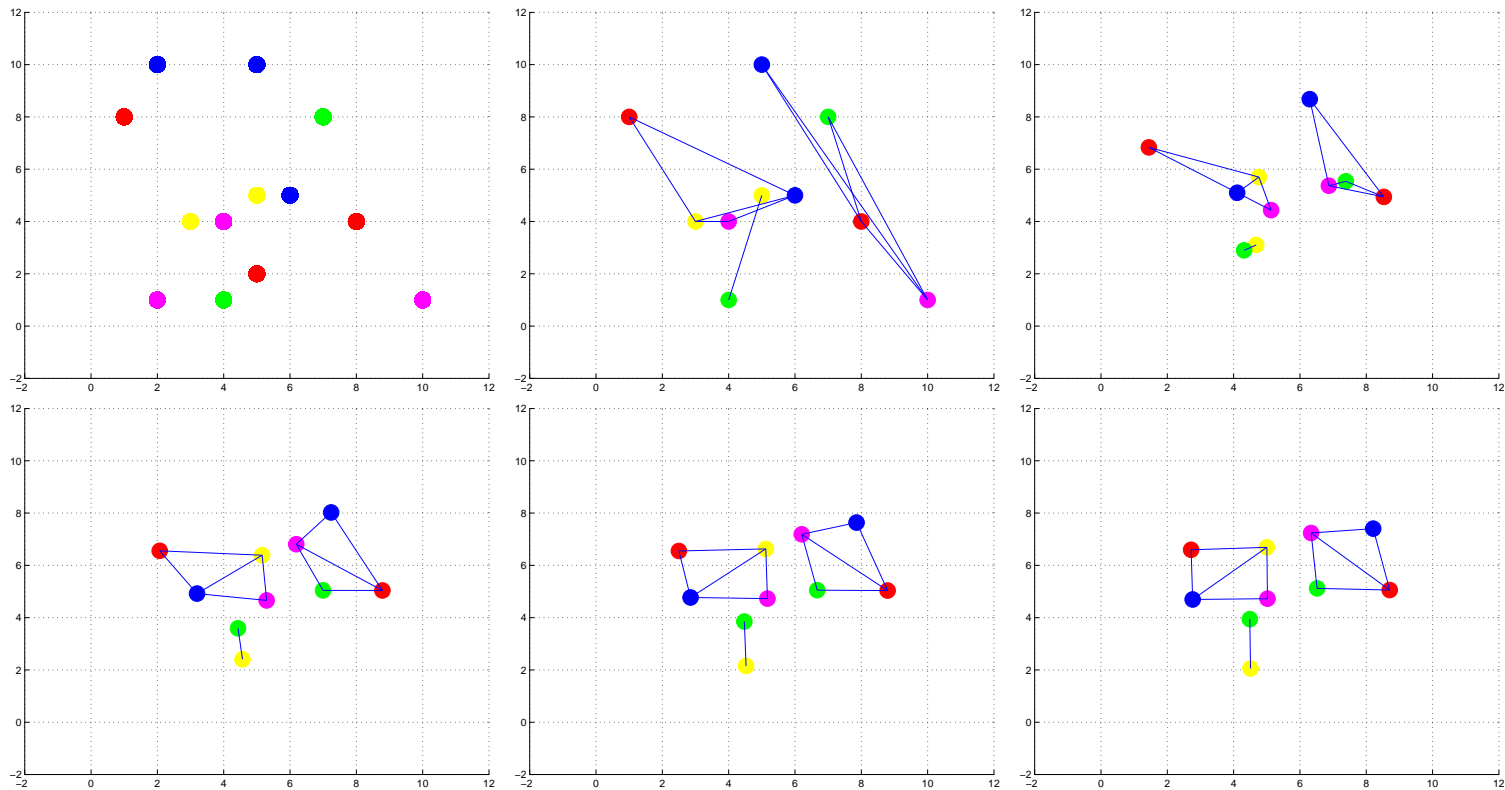
La matrice $D^T D$ è detta Laplaciano degli archi e risulta definita positiva per alberi di copertura orientati. Si ha quindi che la dinamica dell'errore è convergente esponenzialmente.

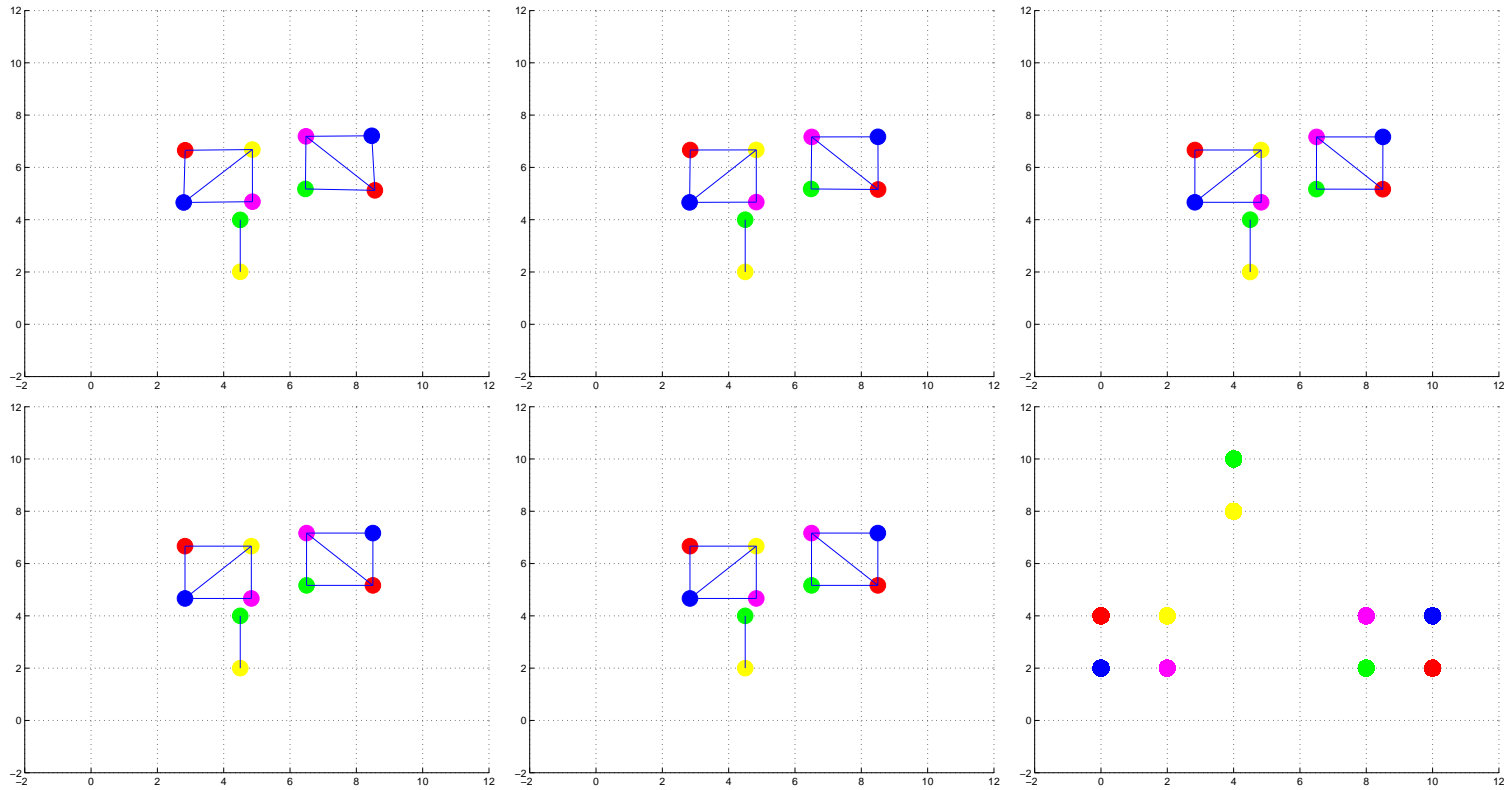
Il sistema controllato, rispetto alle coordinate $x = (x_1, \dots, x_n)$, risulta

$$\dot{x}(t) = -kLx(t) + kDz_{ref}.$$

Si noti che $z_{ref} = D^T x_{ref}$ e pertanto il sistema è equivalente a quello ottenuto nel controllo lineare di formazione basato sulle distanze.

Esempio di raggiungimento della formazione con controllo lineare: prima e ultima immagine sono le condizioni iniziali e la formazione di riferimento. Caso con 10 agenti.





Doppio integratore

Dato il modello del doppio integratore si ha $\ddot{x}_i(t) = u_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ dove u_i rappresenta l'ingresso dell'agente i .

Le configurazioni relative desiderate sono date in termini di un albero di copertura orientato \mathcal{D} e risultano essere $[z_{ref}(t)^T \dot{z}_{ref}(t)^T]^T$. Sia $e(t) = z_{ref} - D^T x(t)$ e supponendo che $\ddot{z}_{ref} = 0$ si ha

$$\ddot{e}(t) = -D^T u(t).$$

Si consideri la legge di controllo proporzionale-derivativa (PD)

$$u(t) = k(D \ D) \begin{pmatrix} e(t) \\ \dot{e}(t) \end{pmatrix}$$

Il sistema in anello chiuso risulta

$$\begin{pmatrix} \dot{e}(t) \\ \ddot{e}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -kD^T D - kD^T D & \end{pmatrix}.$$

Il fatto che $D^T D$ è definita positiva implica che la dinamica dell'errore è globalmente asintoticamente stabile per $k > 0$.

Il sistema controllato, rispetto alle coordinate $x = (x_1, \dots, x_n)$, risulta

$$\ddot{x}(t) = -kLx(t) - kL\dot{x}(t) + kDz_{ref}(t) + kD\dot{z}_{ref}(t).$$

Controllo in formazione di unicicli

Consideriamo ora un insieme di n unicicli le cui equazioni dinamiche risultano:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_i \cos \theta_i(t) \\ \dot{y}_i(t) = v_i \sin \theta_i(t) \\ \dot{\theta}_i(t) = \omega_i(t) \end{cases}$$

dove x_i, y_i sono le coordinate in \mathbb{R}^2 dell' i -esimo uniciclo, θ_i la sua direzione di moto, v_i la velocità lineare (supposta costante) e ω_i la velocità angolare considerata come l'ingresso dell'uniciclo u_i .

E' comodo considerare il moto dell'uniciclo in coordinate nel piano complesso:

$$r_i(t) = x_i(t) + jy_i(t),$$

dove j è l'unità immaginaria. In queste coordinate si ha che

$$\begin{cases} \dot{r}_i(t) = v_i e^{j\theta_i(t)} \\ \dot{\theta}_i(t) = u_i(t), \end{cases}$$

per $i = 1, \dots, n$.

Si consideri una velocità lineare costante e uguale per ogni uniciclo, senza perdere in generalità si può considerare $v_i = 1$ per $i = 1, \dots, n$. In questo modo la dinamica può essere studiata sulla circonferenza unitaria del piano complesso.

Per il sistema completo si considerino $\theta(t) = [\theta_1(t), \dots, \theta_n(t)]^T$, $u(t) = [u_1(t), \dots, u_n(t)]$ e $e^{j\theta(t)} = [e^{j\theta_1(t)}, \dots, e^{j\theta_n(t)}]^T$. Il nostro scopo è quello di determinare delle regole locali di interazione che consentano un movimento coordinato degli unicicli. La dinamica dell'uniciclo offre diversi comportamenti che possono quindi essere coordinati: sincronizzazione delle direzioni di moto (stessa direzione di moto per ogni uniciclo), comportamento bilanciato (centro di massa dell'insieme di unicicli rimane costante) e spaziatura (i veicoli si muovono intorno ad un centro fissato).

Vediamo ora come questi comportamenti si possono ottenere a partire da regole locali di interazione.

Definizione 37. Sia $p_m(\theta) = \frac{1}{nm} \mathbf{1}^T e^{jm\theta}$, lo stato medio di ordine m , e $U_m : [0, 2\pi]^n \rightarrow \mathbb{R}^+$, $U_m(\theta) = \frac{n}{2} |p_m(\theta)|^2 = \frac{n}{2} (e^{jm\theta})^* \mathbf{1} \mathbf{1}^T e^{jm\theta}$ il potenziale di ordine m . Si indichi con ψ_m l'angolo medio: $p_m(\theta) = |p_m(\theta)| e^{j\psi_m}$.

Nel caso $m = 1$ $p_1(\theta)$ è la velocità del centro di massa dell'insieme di unicicli e $U_1(\theta)$ è l'energia cinetica del centro di massa:

$$p_1(\theta) = \frac{1}{n} \mathbf{1}^T e^{j\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \dot{r}_i(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i(t) \right).$$

Lemma 3. *Per ogni intero $m \geq 0$ il minimo del potenziale U_m corrisponde al caso $p_m(\theta) = 0$. Il massimo di U_m corrisponde al caso in cui ogni uniciclo viaggia nella stessa direzione e quindi $m\theta_i = \psi_m$.*

Dimostrazione

$$\frac{\partial U_m}{\partial \theta_i} = \frac{n}{2} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \langle p_m(\theta), p_m(\theta) \rangle = n \langle p_m(\theta), \frac{\partial}{\partial \theta_i} p_m(\theta) \rangle = \quad (26)$$

$$= \langle p_m(\theta), j e^{jm\theta_i} \rangle = |p_m(\theta)| \langle e^{j\psi_m}, j e^{jm\theta_i} \rangle \quad (27)$$

per $i = 1, \dots, n$.

Si noti che, nel piano complesso, moltiplicare un vettore per l'unità immaginaria equivale a ruotarlo di 90 gradi.

Si ha quindi che la derivata del potenziale si annulla quando $p_m(\theta) = 0$ (che corrisponde ad un minimo in quanto $U_m(\theta) \geq 0$ e si annulla quando $p_m(\theta) = 0$). Nel caso $p_m(\theta) \neq 0$ la derivata si annulla quando alcuni unicicli sono tali per cui $m\theta_i = \psi_m$ oppure $m\theta_i = \psi_m + \pi$ da cui segue che la derivata si annulla se per ogni coppia di unicicli si ha $|\theta_i - \theta_k| = 0 \text{ mod } 2\pi/m$ con $i \neq k$.

E' necessario mostrare che tutti gli altri punti critici di $U_m(\theta)$ non sono nè massimi nè minimi. Supponiamo che $p_m(\theta) \neq 0$, si ha che la derivata del potenziale si annulla quando alcuni unicicli hanno direzione di moto parallela a ψ_m mentre altri hanno una direzione complementare. Inoltre si ha che $|\mathbf{1}^T e^{jm\theta}| > 1$ e quindi $|p_m(\theta)| > 1/(mn)$. La derivata seconda del potenziale è pari a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_m}{\partial \theta_i^2} &= \left\langle \frac{\partial}{\partial \theta_i} p_m(\theta), j e^{jm\theta_i} \right\rangle + \left\langle p_m(\theta), \frac{\partial}{\partial \theta_i} j e^{jm\theta_i} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{n} j e^{jm\theta_i}, j e^{jm\theta_i} \right\rangle + |p_m(\theta)| \langle e^{j\psi_m}, -m e^{jm\theta_i} \rangle = \end{aligned} \quad (28)$$

$$= \frac{1}{n} - m \langle p_m(\theta), j e^{jm\theta_i} \rangle = \frac{1}{n} - \cos(\psi_m - m\theta_i) m |p_m(\theta)| \quad (29)$$

Si ha quindi che nel caso $m\theta_i = \psi_m$ per ogni $i = 1, \dots, n$ la derivata seconda è negativa per ogni i in quanto

$\frac{1}{n} - \cos(\psi_m - m\theta_i) m |p_m(\theta)| = \frac{1}{n} - m |p_m(\theta)| = \frac{1}{n} - 1 < 0$ e pertanto la condizione in cui gli unicicli hanno la stessa direzione di moto fornisce un valore massimo del potenziale. Nel caso in cui alcuni veicoli hanno $m\theta_i = \psi_m$ oppure $m\theta_i = \psi_m + \pi$ si ha che la derivata seconda è negativa o positiva e quindi sono punti di sella.

Definizione 38. *Il vettore di fase θ è una **configurazione bilanciata** quando*

$$p_1(\theta) = 0 \text{ mod } 2\pi$$

*è una **configurazione sincronizzata** quando per qualche $\theta_0 \in [0, 2\pi]$, $\theta = \theta_0 \mathbf{1}$.*

Si noti che le configurazioni bilanciate e sincronizzate corrispondono alle configurazioni in cui il potenziale di primo ordine raggiunge rispettivamente minimo e massimo. E' quindi naturale considerare la legge di controllo di tipo gradiente della forma:

$$u_i(\theta) = -k \nabla_i U_1(\theta) = k \langle p_1(\theta), j e^{j\theta_i} \rangle = -\frac{k}{n} \sum_{j=1}^n \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Quando $k > 0$ la legge di controllo guida il gruppo di unicicli verso una configurazione bilanciata mentre se $k < 0$ guida il gruppo verso una configurazione sincronizzata.

In questo caso però la legge di controllo è centralizzata mentre siamo interessati a leggi di controllo basate su grafi non necessariamente completi. Si noti che nel caso di grafo completo K_n il Laplaciano risulta $L(K_n) = nI - \mathbf{1}\mathbf{1}^T$ e quindi il potenziale di grado m può essere scritto nella forma

$$U_m(\theta) = \frac{n^3}{2} - (e^{jm\theta})^* L(K_n) e^{jm\theta},$$

questo suggerisce di considerare i punti critici della funzione

$$W_m(\theta) = \langle e^{jm\theta}, L(G)e^{jm\theta} \rangle$$

per progettare leggi di controllo che si basano su generici grafi connessi.

Il minimo del potenziale W_m corrisponde al caso $e^{jm\theta} = e^{jm\theta_0} \mathbf{1}$ per un certo $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ in quanto L ha autovettore destro pari a $\mathbf{1}$.

Ha quindi senso prendere come legge di controllo la seguente

$$u_i(t) = -k \frac{\partial W_m(\theta)}{\partial \theta_i} = -k \sum_{j \in N(i)} \sin(\theta_j - \theta_i),$$

quando $k < 0$ questa legge guida il gruppo di unicicli in una configurazione sincronizzata. Purtroppo in generale non è vero che il massimo del potenziale W_m corrisponda alla configurazione bilanciata.

Robot mobili

Nel momento in cui si considerano robot mobili è quindi necessario affiancare un aspetto geometrico a quello puramente combinatorico.

Si considerino robot caratterizzati da una dinamica di tipo singolo integratore e si consideri il grafo di prossimità dato da una distanza Δ . Un arco tra il robot i e j esiste se $\|x_i - x_j\| \leq \Delta$.

Si consideri un grafo statico, una legge di controllo decentralizzata, tempo invariante è la seguente

$$u_i = \sum_{j \in N_\sigma(i)} f(x_i - x_j),$$

$N_\sigma(i) \subset N_i$ dove σ è una funzione indice tale che $\sigma(i, j) = \sigma(j, i) \in \{0, 1\}$ e determina se l'informazione che corre sull'arco (i, j) deve essere preso o meno in considerazione:

$$j \in N_\sigma(i) \Leftrightarrow (v_i, v_j) \in E \wedge \sigma(i, j) = 1$$

La legge di controllo viene assunta antisimmetrica:

$$f(x_i - x_j) = -f(x_j - x_i), \forall (v_i, v_j) \in E$$

L'ipotesi che f dipenda dal valore relativo degli stati è dovuta al fatto che spesso le informazioni raccolte dai sensori a bordo del robot sono informazioni relative. Inoltre questa ipotesi ci consente anche di concludere (sotto l'ipotesi di connettività del grafo) che il centroide dei robot è statico.

Il protocollo del consenso è ovviamente un caso particolare di queste leggi di controllo. Infatti, il protocollo del consenso si ottiene ponendo:

$$\begin{aligned} \sigma(i, j) &= 1 \\ f(x_i - x_j) &= -(x_i - x_j) \end{aligned}$$

Se vogliamo un protocollo di consenso che tenga in considerazione i vincoli geometrici è necessario introdurre una orientazione agli archi ed utilizzare grafi orientati.

Data la matrice di incidenza D del grafo orientato il Laplaciano risulta $L = DD^T$. Quando però gli agenti hanno stati a dimensione maggiore di uno è necessario operare componente per componente: dato $x_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,p})$ per

$i = 1, \dots, n$ si considera il vettore $x = (x_1^T, \dots, x_n^T)^T$ e l'operatore

$$c(x, j) = (x_{1,j}, \dots, x_{n,j})^T \in \mathbb{R}^n \text{ per } j = 1, \dots, p.$$

Con questo operatore il protocollo del consenso diventa

$$\frac{d}{dt}c(x, j) = -Lc(x, j) \text{ per } j = 1, \dots, p.$$

Se G è connesso il protocollo converge (per ogni componente) al vettore $\mathbf{1}$.