

# Appunti del Corso di Robotica

Tratti dal corso tenuto dal Prof. Antonio Bicchi

Versione Provvisoria del 15 Dicembre 2006



# Indice

<b>I</b>	<b>Cinematica</b>	<b>5</b>
<b>1</b>	<b>Moti rigidi</b>	<b>7</b>
1.1	Descrizione dei moti rigidi . . . . .	7
1.1.1	Traslazioni . . . . .	11
1.1.2	Rotazioni . . . . .	13
1.1.3	Rotazioni elementari . . . . .	16
1.1.4	Composizione di Rotazioni . . . . .	18
1.1.5	Trasformazioni Rigide Generali . . . . .	29
1.1.6	Trasformazioni Omogenee . . . . .	29
<b>2</b>	<b>Cinematica dei Bracci Articolati</b>	<b>35</b>
2.1	Cinematica diretta dei bracci seriali . . . . .	36
2.1.1	Convenzione di Denavit-Hartenberg . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Cinematica Differenziale</b>	<b>49</b>
3.1	Cinematica differenziale del corpo rigido . . . . .	49
3.2	Statica del corpo rigido . . . . .	52
3.2.1	Dualità Cineto-Statica . . . . .	54
3.3	Cinematica differenziale delle catene aperte . . . . .	55
3.3.1	Caratterizzazione analitica e matrici jacobiane . . . . .	55
3.3.2	Caratterizzazione cinematica . . . . .	55
3.3.3	Caratterizzazione geometrica . . . . .	56
3.3.4	Caratterizzazione statica . . . . .	57
<b>4</b>	<b>Manipolatori con catene cinematiche chiuse</b>	<b>59</b>
4.1	Geometria delle catene chiuse . . . . .	61
4.1.1	Cinematica diretta e inversa . . . . .	63
4.1.2	Esempio: Catena chiusa planare RPRRR . . . . .	64
4.2	Indici di Manipolabilità . . . . .	70

<b>5</b>	<b>Controllo di Manipolatori</b>	<b>75</b>
5.1	Controllo di Posizione di Manipolatori con dinamica certa . . .	75
5.1.1	Controllo a Coppia Calcolata nello spazio dei giunti . . .	75
5.1.2	Controllo a Coppia Calcolata nello spazio operativo . . .	76
5.1.3	Esempi . . . . .	78
5.2	Controllo di Manipolatori con incertezze sulla dinamica . . . .	78
5.2.1	Robustezza del controllo a coppia calcolata . . . . .	79
5.2.2	Controllo alla Arimoto o PD ai giunti con compen- sazione di gravità . . . . .	81
5.2.3	Controllo Robusto o a Struttura Variabile . . . . .	84
5.2.4	Controllo Adattivo alla Craig . . . . .	86
5.2.5	Controllo Adattivo alla Li-Slotine . . . . .	89
<b>6</b>	<b>Sistemi Nonlineari</b>	<b>93</b>
6.1	Scatola degli attrezzi matematici . . . . .	93
6.2	Distribuzioni e Codistribuzioni . . . . .	103
6.3	Raggiungibilità dei Sistemi Nonlineari . . . . .	111
6.4	Osservabilità . . . . .	120
<b>7</b>	<b>Controllo di Sistemi Nonlineari</b>	<b>127</b>
7.1	Introduzione . . . . .	127
7.2	Linearizzazione Input-Stati . . . . .	127
7.2.1	Procedura Operativa (Sistemi SISO) . . . . .	137
7.2.2	Linearizzazione Ingresso-Uscita . . . . .	139
7.3	Inseguimento di traiettorie . . . . .	146
7.4	Linearizzazione in retroazione MIMO . . . . .	148
7.5	Pendolo inverso . . . . .	153
7.5.1	Modello fisico . . . . .	153
7.5.2	Linearizzazione approssimata . . . . .	154
7.5.3	Linearizzazione esatta . . . . .	155
7.5.4	Confronto tra i due metodi di linearizzazione . . . . .	157
7.5.5	Linearizzazione in feedback . . . . .	158
7.5.6	Linearizzazione standard . . . . .	158
7.5.7	Controllo con $K=12.5$ e $K=100$ . . . . .	159
7.5.8	Conclusioni . . . . .	159
<b>A</b>	<b>Appendice: Richiami di Algebra Lineare</b>	<b>179</b>
A.0.9	Altre applicazioni della SVD . . . . .	183

Parte I  
Cinematica



# Capitolo 1

## Moti rigidi

### 1.1 Descrizione dei moti rigidi

Si consideri uno spazio vettoriale  $\mathbb{R}^3$ , sui cui elementi (che saranno indicati da lettere sottolineate come  $\underline{v}$ ,  $\underline{w}$  solo in contesti in cui possa nascere ambiguità) sono definite le operazioni di somma e prodotto sul campo dei reali con le note proprietà:

$$\begin{aligned}\underline{v} + \underline{w} &\in \mathbb{R}^3, & \underline{v}, \underline{w} &\in \mathbb{R}^3 \\ \alpha \underline{v} &\in \mathbb{R}^3, & \alpha &\in \mathbb{R} \\ \alpha(\underline{v} + \underline{w}) &= \alpha \underline{v} + \alpha \underline{w}, \\ (\alpha + \beta)\underline{v} &= \alpha \underline{v} + \beta \underline{v}, & \beta &\in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Si associa ai vettori di questo spazio la nozione geometrica di segmenti di retta di lunghezza e verso assegnati. Coppie di vettori individuano un angolo nel piano generato dai loro rispettivi segmenti.

Altre importanti operazioni definite sui vettori sono le seguenti

- Prodotto interno (o scalare):

$$\begin{aligned}\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle &: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle &= \|\underline{v}\| \|\underline{w}\| \cos(\widehat{\underline{v}, \underline{w}})\end{aligned}$$

- Prodotto vettoriale:

$$\underline{v} \wedge \underline{w} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

dove il vettore risultante dal prodotto ha modulo

$$\|\underline{v} \wedge \underline{w}\| = \|\underline{v}\| \|\underline{w}\| |\sin(\widehat{\underline{v}, \underline{w}})|,$$

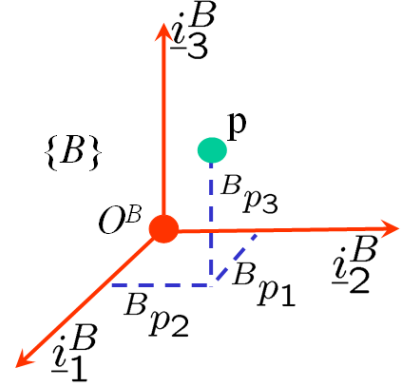
direzione perpendicolare al piano individuato da  $\underline{v}$  e  $\underline{w}$ , e verso determinato dalla regola della mano destra.

• Si fissi nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, individuata dalla posizione della sua origine  $O$  e dai versori dei suoi assi coordinati  $\underline{i}_1, \underline{i}_2, \underline{i}_3$ . Si indicherà perciò ad esempio una terna  $\{B\}$  esplicitamente con  $(O^B, \underline{i}_1^B, \underline{i}_2^B, \underline{i}_3^B)$  (in alternativa, si potranno incontrare le notazioni  $(O^B, \underline{i}^B, \underline{j}^B, \underline{k}^B)$  ovvero  $(O, x, y, z)^B$ ).

Un versore è un vettore di lunghezza unitaria, talchè si ha  $\langle \underline{i}_j, \underline{i}_j \rangle = 1$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

La ortogonalità delle terne cartesiane implica che  $\langle \underline{i}_j, \underline{i}_k \rangle = 0$ ,  $j \neq k$ .

Una terna cartesiana è detta *destrorsa* se  $\underline{i}_1 \wedge \underline{i}_2 = \underline{i}_3$ , *sinistrorsa* se  $\underline{i}_1 \wedge \underline{i}_2 = -\underline{i}_3$ .



• I vettori sono rappresentabili in coordinate da una terna di numeri reali, ad esempio  ${}^B \underline{v} = ({}^B v_1, {}^B v_2, {}^B v_3)^T$ . Al solito, la base delle coordinate sarà omessa quando non si crei ambiguità. Usando le rappresentazioni di vettori in coordinate si possono dare formule per il calcolo delle operazioni sopra definite:

- Prodotto per uno scalare:  $\alpha \underline{v} = (\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3)^T$ ;
- Somma:  $\underline{v} + \underline{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)^T$ ;
- Prodotto scalare:

$$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \underline{v}^T \underline{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

- Prodotto vettoriale:

$$\underline{v} \wedge \underline{w} = \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{bmatrix}.$$

Il prodotto vettoriale può essere anche scritto in forma matriciale:

$$\underline{v} \wedge \underline{w} = \hat{v} \underline{w}$$

dove  $\hat{v}$  è la matrice

$$\hat{v} = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$



Si osservi che  $\hat{v} = -\hat{v}^T$ , quindi la matrice  $\hat{v}$  è antisimmetrica. Talvolta al posto del simbolo  $\hat{v}$  si incontra  $S(v)$ .

- Consideriamo i corpi rigidi come insiemi di punti dello spazio fisico tridimensionale. Su questo spazio indichiamo con  $d(p, q)$  la distanza Euclidea tra due punti  $p$  e  $q$ . Indicheremo lo spazio Euclideo dei punti con  $E^3$ .

Fissato un sistema di coordinate su questo spazio, possiamo associare ad ogni punto una terna di numeri reali: per un punto  $p$  la posizione rispetto al sistema di coordinate  $\{B\}$  sarà indicata da  ${}^B p$ , ed è convenzionalmente scritta in colonna:

$${}^B p = \begin{bmatrix} {}^B p_1, \\ {}^B p_2, \\ {}^B p_3 \end{bmatrix}$$

- Si deve in generale distinguere il punto fisico  $p$  dalla terna di numeri  ${}^B p$  che lo rappresenta in  $\{B\}$ , anche se si ometterà talvolta di citare esplicitamente il sistema di coordinate quando esso sarà chiaro dal contesto. Dati due punti in coordinate (qualsiasi, purché comuni), e.g.  $p = (p_1, p_2, p_3)$  e  $q = (q_1, q_2, q_3)$ , la loro distanza euclidea è data da

$$d(p, q) = \|p - q\| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2}.$$

- N.B. Nonostante la notazione in forma di colonna sia simile per punti e vettori posizionali, i punti sono oggetti completamente differenti dai vettori. I “vettori” sono elementi di uno spazio vettoriale, che è uno spazio chiuso rispetto al prodotto per uno scalare e alla somma. Le semplici operazioni sopra definite non sono applicabili alle terne di numeri che rappresentano punti, senza alterare la nozione fisica dell’oggetto rappresentato (il punto): si pensi ad esempio ad una ipotetica “somma di punti”, cui non corrisponde alcun senso fisico.

È comunque possibile associare in modo del tutto naturale ad una coppia di punti  $q, p$  un vettore  ${}_q p$ , assegnando a questo una lunghezza pari alla distanza tra i punti, una direzione parallela al segmento che li unisce e un verso diretto dal primo al secondo dei punti.

In coordinate, il vettore  ${}_q p$  associato alla coppia di punti  $p, q$  ha una espressione particolarmente semplice:

$${}_q p = \begin{bmatrix} p_1 - q_1 \\ p_2 - q_2 \\ p_3 - q_3 \end{bmatrix},$$

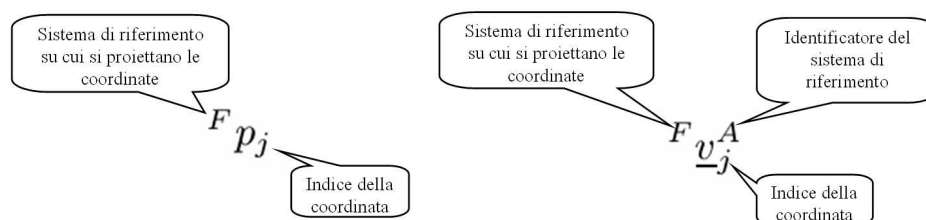
cioè è pari alla differenza delle espressioni in coordinate dei punti.

Si scrive talvolta  ${}_q p = p - q$ , anche se a questa “differenza tra punti” è da associarsi una interpretazione puramente geometrica e non algebrica:  $p - q$  è un vettore e non un punto, e a questa differenza non corrisponde alcuna operazione di “addizione tra punti”, come già osservato.

La notazione che useremo per i punti ed i vettori è la seguente:

- l’apice a destra è usato per individuare il corpo o la configurazione a cui ci si riferisce;
- l’apice a sinistra indica rispetto a quale sistema di riferimento si misurano le componenti della grandezza;
- il pedice a destra di uno scalare indica di quale componente si tratta (lungo gli assi  $x_1$ ,  $x_2$  o  $x_3$ , ovvero  $x$ ,  $y$ ,  $z$ );
- il pedice a destra di un versore indica l’asse da esso generato.

La notazione è illustrata nelle figure seguenti:



- Sui punti di  $E^3$  possono agire trasformazioni  $g : E^3 \mapsto E^3$  di natura diversa. Una trasformazione che sia continua, differenziabile con continuità un numero illimitato di volte, invertibile con inversa anch’essa  $C^\infty$  si dice un *diffeomorfismo*.

Una trasformazione  $g(\cdot)$  definita sui punti di  $E^3$  è associata ad una seconda trasformazione (*aggiunta*)  $g_*(\cdot)$  che agisce invece sui vettori dello spazio  $R^3$  associato, secondo la definizione

$$g_*({}_q p) = g_*(p - q) = g(p) - g(q).$$

Se una trasformazione lascia inalterato il prodotto scalare tra i vettori, cioè se

$$g_*(\underline{v})^T g_*(\underline{w}) = \underline{v}^T \underline{w} \quad \forall \underline{v}, \underline{w}$$

la trasformazione viene detta *isometrica*.

Una isometria mantiene invariate le lunghezze dei vettori e gli angoli tra i vettori: questo discende ovviamente dal fatto che

$$\begin{cases} \|\underline{v}\|^2 &= \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle \\ \cos(\widehat{\underline{v}\underline{w}}) &= \frac{\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle}{\|\underline{v}\|\|\underline{w}\|}. \end{cases}$$

Si definisce **trasformazione rigida** una  $g(\cdot)$  tale che

1. mantiene invariate le distanze tra i punti

$$\|g(p) - g(q)\| = \|p - q\| \quad \forall p, q$$

2. mantiene invariato il prodotto vettoriale

$$g_*(\underline{v} \wedge \underline{w}) = g_*(\underline{v}) \wedge g_*(\underline{w}) \quad (1.2)$$

Le trasformazioni rigide sono isometrie. Infatti,

$$\begin{cases} \underline{v}^T \underline{w} &= \frac{1}{4}(\|\underline{v} + \underline{w}\|^2 - \|\underline{v} - \underline{w}\|^2) \\ &= \frac{1}{4}(\|g_*(\underline{v}) + g_*(\underline{w})\|^2 - \|g_*(\underline{v}) - g_*(\underline{w})\|^2) \\ &= g_*(\underline{v})^T g_*(\underline{w}) \end{cases} .$$

Tra le isometrie la condizione (1.2) esclude quelle che potrebbero trasformare una terna destrorsa in una sinistrorsa.

### 1.1.1 Traslazioni

Consideriamo una regione di spazio (pensata come un corpo) in una certa configurazione iniziale, come descritta ad esempio rispetto ad una terna cartesiana  $\{0\}$  fissa. Si applichi a tutti i punti di questo corpo una trasformazione del tipo  $g(p) = p + \underline{m}$ . Il generico punto  $p^0$  risulta quindi trasformato in  $p^1 = p^0 + \underline{m}$  (vedi fig.1.1) In particolare, applicando la trasformazione alla origine  $O$  di un sistema di riferimento solidale al corpo, si ha che il vettore di traslazione può essere interpretato come il vettore che unisce la vecchia alla nuova posizione della origine:  $\underline{m} =_{O^0} O^1$

Verifichiamo che questa trasformazione rappresenta un moto rigido:

- $\|g(p) - g(q)\| = \|p + \underline{m} - q - \underline{m}\| = \|p - q\|$
- $g_*(\underline{v}) \wedge g_*(\underline{w}) = g_*(v_1 - v_0) \wedge g_*(w_1 - w_0) = (v_1 + \underline{m} - v_0 - \underline{m}) \wedge (w_1 + \underline{m} - w_0 - \underline{m}) = \underline{v} \wedge \underline{w} = g_*(\underline{v} \wedge \underline{w})$ .

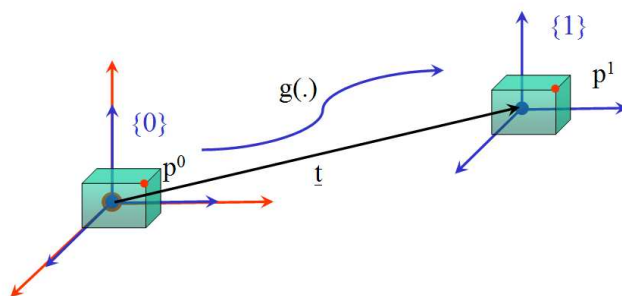


Figura 1.1: Un esempio di traslazione:  ${}^B p^0 = (1, 1, 1)^T$ ,  $\underline{m} = (0, 10, 5)^T \rightarrow {}^B p^1 = (1, 11, 6)^T$ .

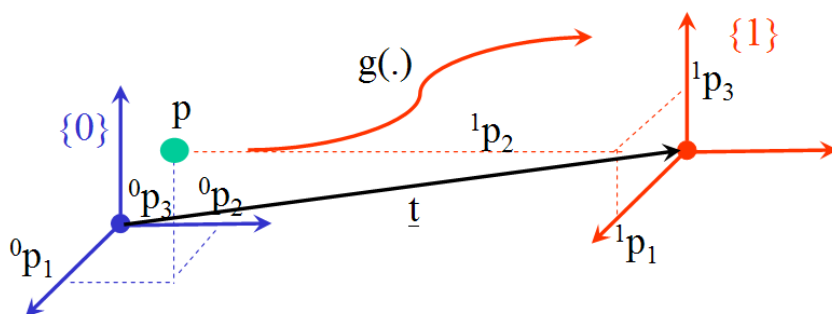


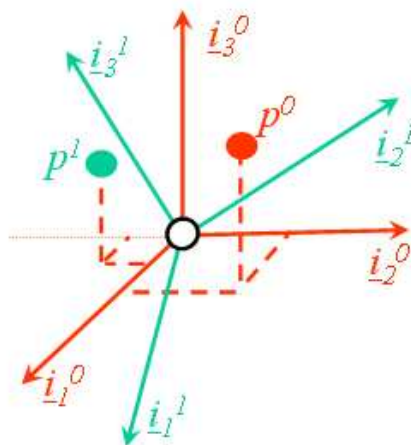
Figura 1.2: Esempio di traslazione di sistemi di riferimento:  ${}^1 p = (2, -9, 1)^T$ ,  $\underline{m} = (0, 10, 2)^T \rightarrow {}^0 p = (2, 1, 3)^T$ .

Si noti che, mentre  $g(p) = p + \underline{m}$ ,  $g_*(\underline{v}) = \underline{v}$ . Inoltre, la trasformazione di traslazione rigida esprime il punto  $p^1$  immagine (dopo la traslazione) del punto  $p^0$  come  $p^1 = p^0 + \underline{m}$ . Se applicata a tutti i punti di un corpo, esso è quindi soggetto ad una trasformazione rigida, che non ne deforma le lunghezze nè gli angoli. Le coordinate di  $p^0$  e di  $p^1$  sono sempre riferite allo stesso sistema di riferimento di base (ad esempio  $\{B\}$  in figura), che non è esplicitamente indicato.

La trasformazione di traslazione rigida esprime anche le coordinate di un punto immobile  $p$ , inizialmente espresso in coordinate rispetto al riferimento  $\{1\}$ , quando il riferimento stesso trasla in  $\{0\}$ :  ${}^0 p = g({}^1 p) = {}^1 p + \underline{m}$ . Si veda ad esempio la fig.1.2

## 1.1.2 Rotazioni

Consideriamo l'esecuzione di una rotazione rigida su un corpo, cui pensiamo solidale un riferimento cartesiano individuato inizialmente da  $(O^0, \underline{i}_1^0, \underline{i}_2^0, \underline{i}_3^0)$ . Supponiamo che la rotazione sia fatta attorno all'origine e porti il riferimento in  $(O^1, \underline{i}_1^1, \underline{i}_2^1, \underline{i}_3^1)$ , con  $O^1 = O^0$ .



In particolare, vogliamo descrivere l'azione della trasformazione sul generico punto, in posizione iniziale  $p^0$  e finale  $p^1$ : useremo a questo scopo le coordinate iniziali  $\{0\}$ .

Ricordando che le coordinate rispetto alla terna solidale restano costanti (il moto è rigido), possiamo scrivere<sup>1</sup>

$$\begin{cases} p^0 = p_1 \underline{i}_1^0 + p_2 \underline{i}_2^0 + p_3 \underline{i}_3^0 \\ p^1 = p_1 \underline{i}_1^1 + p_2 \underline{i}_2^1 + p_3 \underline{i}_3^1 \end{cases} .$$

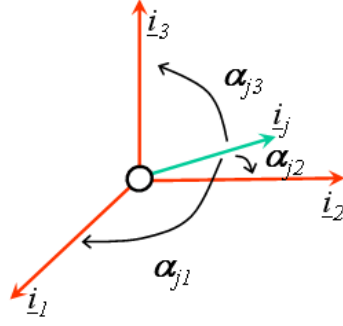
Nei rispettivi sistemi di riferimento, le coordinate dei versori base sono:

$${}^0\underline{i}_1^0 = {}^1\underline{i}_1^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^0\underline{i}_2^0 = {}^1\underline{i}_2^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^0\underline{i}_3^0 = {}^1\underline{i}_3^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

I versori di  $\{1\}$  espressi in terna  $\{0\}$  hanno invece coordinate date dai rispettivi *coseni direttori*

---

<sup>1</sup>in questa equazione, i sistemi di riferimento sono omissi, perché indifferenti purché coerenti. Inoltre, l'uguaglianza apparente di un punto con una somma di vettori deve essere interpretata come se nei membri destri delle equazioni fosse sommato il punto origine del sistema di riferimento, che si omette in quanto ha coordinate nulle.



$${}^0i_1^1 = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{11} \\ \cos \alpha_{12} \\ \cos \alpha_{13} \end{bmatrix}, \quad {}^0i_2^1 = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{21} \\ \cos \alpha_{22} \\ \cos \alpha_{23} \end{bmatrix}, \quad {}^0i_3^1 = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{31} \\ \cos \alpha_{32} \\ \cos \alpha_{33} \end{bmatrix}.$$

Il punto  $p^1$  in coordinate  $\{0\}$  è quindi espresso come:

$${}^0p^1 = p_1 {}^0i_1^1 + p_2 {}^0i_2^1 + p_3 {}^0i_3^1 = \begin{bmatrix} {}^0i_1^1 & | & {}^0i_2^1 & | & {}^0i_3^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = {}^0R^{(1 \leftarrow 0)} {}^0p^0.$$

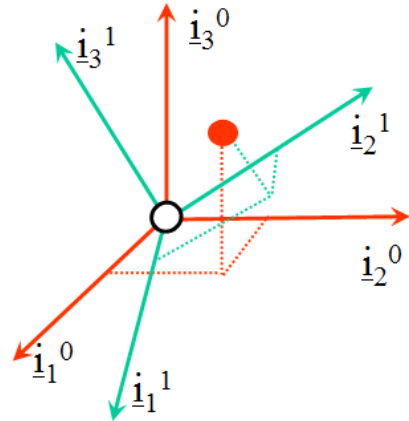
La matrice

$${}^0R^{(1 \leftarrow 0)} = \begin{bmatrix} {}^0i_1^1 & | & {}^0i_2^1 & | & {}^0i_3^1 \end{bmatrix}$$

è detta *matrice di rotazione* tra le configurazioni  $\{0\}$  e  $\{1\}$ . Una rotazione agisce dunque sui punti di un corpo mediante una trasformazione lineare:  $p^1 = R^{(1 \leftarrow 0)} p^0$ .

Consideriamo ora l'espressione in coordinate  $\{0\}$  di un punto  $p$  le cui coordinate in  $\{1\}$  sono  ${}^1p$ . Sussiste la seguente relazione tra le coordinate nei due sistemi:

$$\begin{aligned} {}^0p &= \begin{bmatrix} {}^0i_1^T ({}^1i_1^1 p_1 + {}^1i_2^1 p_2 + {}^1i_3^1 p_3) \\ {}^0i_2^T ({}^1i_1^1 p_1 + {}^1i_2^1 p_2 + {}^1i_3^1 p_3) \\ {}^0i_3^T ({}^1i_1^1 p_1 + {}^1i_2^1 p_2 + {}^1i_3^1 p_3) \end{bmatrix} \\ &= {}^0R_1 {}^1p = \begin{bmatrix} {}^0i_1^1 & {}^0i_2^1 & {}^0i_3^1 \end{bmatrix} {}^1p \end{aligned}$$



Quindi, il cambiamento delle coordinate da  $\{1\}$  a  $\{0\}$  è ottenuto mediante una applicazione lineare la cui matrice  ${}^0R_1$  coincide con la matrice di rotazione da  $\{0\}$  a  $\{1\}$ ,  ${}^0R_1 = {}^0R^{(1\leftarrow 0)}$ .

Ogni rotazione è associata ad una matrice  $3 \times 3$ , cioè a 9 parametri. Questi non sono però indipendenti tra loro, dovendo essere verificate tra le colonne le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \underline{i}_1^T \underline{i}_1 = \underline{i}_2^T \underline{i}_2 = \underline{i}_3^T \underline{i}_3 = 1 \\ \underline{i}_1^T \underline{i}_2 = \underline{i}_1^T \underline{i}_3 = \underline{i}_2^T \underline{i}_3 = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

che equivalgono a 6 relazioni indipendenti. Rimangono quindi solo 3 parametri indipendenti con i quali si può descrivere una rotazione.

Rappresentazioni di rotazioni che utilizzano solo 3 parametri sono dette rappresentazioni minime e saranno discusse in seguito.

Dalle 6 relazioni precedenti (1.3) segue direttamente che

$${}^0\underline{i}_1 \wedge {}^0\underline{i}_2 = \pm {}^0\underline{i}_3.$$

La scelta del segno positivo è obbligata dalla definizione di trasformazione rigida, in particolare dalla necessità di mantenere l'orientamento delle terne.

In termini matriciali, le 6 relazioni scalari possono essere scritte compatteamente

$$R^T R = I \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \underline{i}_1^T \\ \underline{i}_2^T \\ \underline{i}_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_1 & \underline{i}_2 & \underline{i}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice di rotazione risulta quindi ortogonale:

$$R^T = R^{-1}.$$

L'insieme delle matrici ortogonali di ordine  $n$  è detto  $O(n)$ ; quindi le matrici di rotazione in  $\mathbb{R}^3$  appartengono ad  $O(3)$ . Questo insieme, con la legge di composizione data dal prodotto matriciale, è un *gruppo*. Infatti valgono le seguenti proprietà:

- **chiusura**  $R_1 R_2 \in O(3)$ ,  $\forall R_1, R_2 \in O(3)$
- **identità**  $I \in O(3)$ ,  $RI = R$
- **esistenza della inversa**  $RX = I \Leftrightarrow X = R^T \in O(3)$
- **associatività**  $R_1(R_2 R_3) = (R_1 R_2)R_3$

Tale gruppo non è **abeliano**:  $R_1 R_2 \neq R_2 R_1$ .

Ovviamente vale inoltre  $(\det R)^2 = 1$ . La condizione  $\underline{i}_1 \wedge \underline{i}_2 = +\underline{i}_3$  equivale ad imporre  $\det R = 1$ . Anche il sottosinsieme di  $O(3)$  delle matrici ortogonali per le quali  $\det R = 1$  è un (*sotto*)gruppo, detto delle matrici *speciali ortogonali* di dimensione 3, indicato con  $SO(3)$ .

Una rotazione è una trasformazione rigida, infatti:

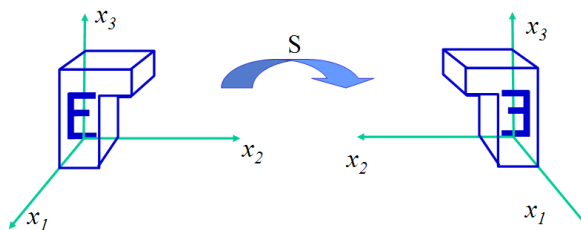
- $g_{R*}(v) = R p_1 - R p_0 = R(p_1 - p_0) = Rv$
- $\|g_{R*}(v)\| = \|Rv\| = (v^T R^T R v)^{\frac{1}{2}} = (v^T v)^{\frac{1}{2}} = \|v\|$
- $g_{R*}(v \wedge w) = R(v \wedge w) = Rv \wedge R w$

(le ultime due relazioni non valgono per matrici qualsiasi!)

Le matrici in  $O(3)$  con determinante negativo rappresentano altre isometrie, che sono dette trasformazioni di specularità. Si osservi ad esempio l'effetto della applicazione di una trasformazione  $g(p) = Sp$  con

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ad un corpo, come mostrato nella figura seguente:



### 1.1.3 Rotazioni elementari

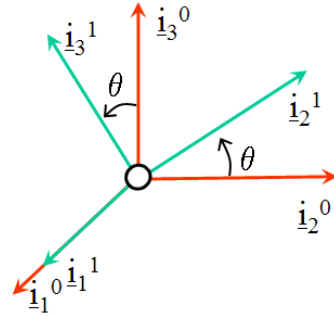
Si considerino tre esempi particolarmente semplici di rotazioni, effettuate attorno a ciascuno degli assi di riferimento. Nel caso di rotazione attorno a  $x_1$  di  $\theta$ , indicando con  $S_\theta$  e  $C_\theta$  rispettivamente  $\sin \theta$  e  $\cos \theta$ , si ha



$${}^0i_1^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}^0i_2^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ C_\theta \\ S_\theta \end{bmatrix}; \quad {}^0i_3^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -S_\theta \\ C_\theta \end{bmatrix};$$

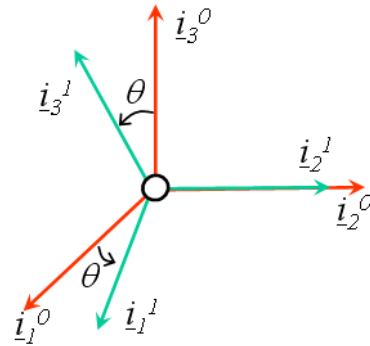
Quindi

$${}^0R_1 = Rot(x_1, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\theta & -S_\theta \\ 0 & S_\theta & C_\theta \end{bmatrix}$$

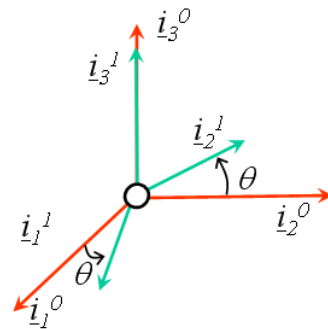


Per le altre rotazioni elementari si ottiene:

$$Rot(x_2, \theta) = \begin{bmatrix} C_\theta & 0 & S_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\theta & 0 & C_\theta \end{bmatrix},$$



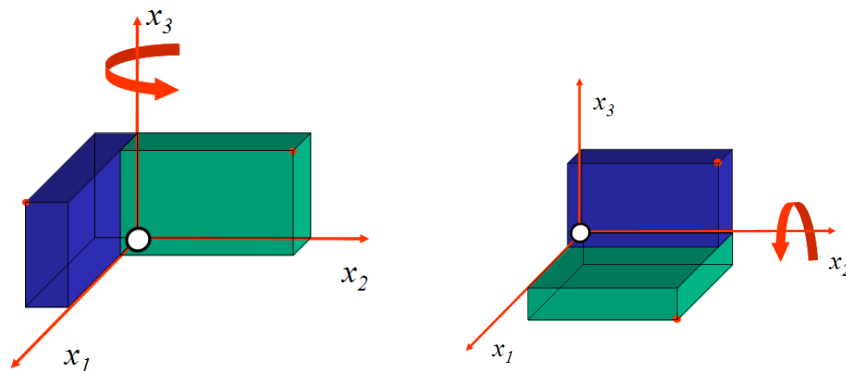
$$Rot(x_3, \theta) = \begin{bmatrix} C_\theta & -S_\theta & 0 \\ S_\theta & C_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



**Esempio.** Le rotazioni di  $\pi/2$  attorno all'asse  $x_3$  e  $x_2$  sono espresse rispettivamente dalle matrici

$$Rot(x_3, \pi/2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Rot(x_2, \pi/2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ed agiscono sui punti di un solido come in figura .



### 1.1.4 Composizione di Rotazioni

Si consideri un corpo rigido inizialmente orientato secondo una terna cartesiana  $\{\underline{i}_1^0, \underline{i}_2^0, \underline{i}_3^0\}$ .

Lo si ruoti sulla terna  $\{\underline{i}_1^1, \underline{i}_2^1, \underline{i}_3^1\}$  di modo che per un suo generico punto si abbia

$${}^0p^1 = {}^0R^{(1\leftarrow 0)} {}^0p^0$$

Lo si ruoti di nuovo sino a portarlo nella orientazione  $\{\underline{i}_1^2, \underline{i}_2^2, \underline{i}_3^2\}$ .

Si avrà:

$${}^0p^2 = {}^0R^{(2\leftarrow 1)} {}^0p^1$$

quindi

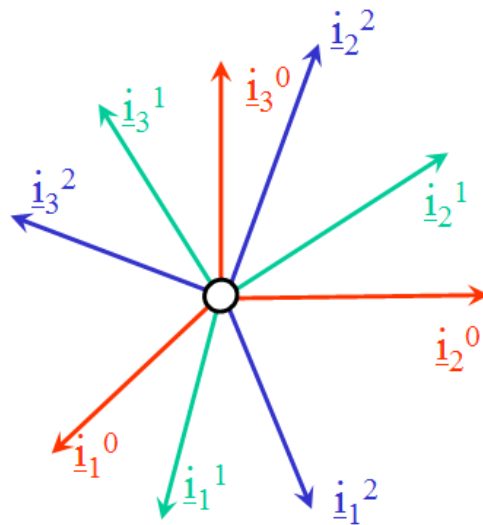
$${}^0p^2 = {}^0R^{(2\leftarrow 1)} {}^0R^{(1\leftarrow 0)} {}^0p^0.$$

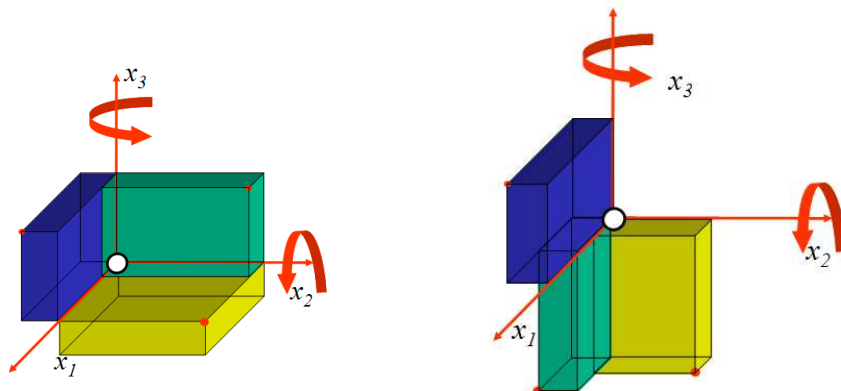
Dunque la rotazione per portare la configurazione  $\{0\}$  in  $\{2\}$  è data da:

$${}^0R^{(2\leftarrow 0)} = {}^0R^{(2\leftarrow 1)} {}^0R^{(1\leftarrow 0)}.$$

Pertanto:

*Le rotazioni rigide di un corpo si compongono per premoltiplicazione delle matrici di rotazione scritte in assi fissi, cioè in termini della terna iniziale.*





Ad esempio, per  $Rot(\underline{x}_1, \theta)$  si intende  $Rot(\underline{x}_1^0, \theta)$ .

**Esempio.** Applicando due rotazioni elementari in diversa sequenza, i risultati sono ovviamente diversi:

$$Rot(x_2, \pi/2)Rot(x_3, \pi/2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Rot(x_3, \pi/2)Rot(x_2, \pi/2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A volte è utile esprimere le singole rotazioni riferendosi non alla terna iniziale, ma alle terne via via incontrate lungo l'esecuzione del moto. Si dice in questo caso che le rotazioni sono espresse in termini di *terna corrente*.

Si ruoti il corpo dalla terna iniziale  $\{0\}$  alla terna  $\{1\}$  attraverso la rotazione  ${}^0R^{(1\leftarrow 0)}$ : ad esempio, per fissare le idee, si consideri  ${}^0R^{(1\leftarrow 0)} = Rot(x_1^0, \theta_0)$ . Si avrà quindi

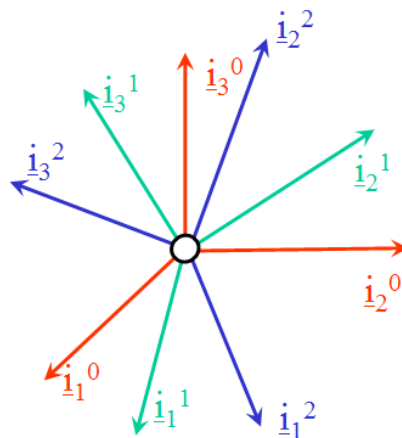
$${}^0p^1 = {}^0R^{(1\leftarrow 0)} {}^0p^0$$

Per ruotarla ora in  $\{2\}$  mediante  ${}^1R^{(2\leftarrow 1)}$  (ad esempio,  ${}^1R^{(2\leftarrow 1)} = Rot(x_1^1, \theta_1)$ ), si deve esprimere  $p^1$  in coordinate  $\{1\}$ .

Scriviamo quindi

$${}^0p^2 = {}^0R_1 {}^1R^{(2\leftarrow 1)} {}^1R_0 {}^0R^{(1\leftarrow 0)} {}^0p^0.$$

Tenendo conto della relazione sopra vista per cui la matrice di cambio di coordinate e quella di rotazione tra due riferimenti sono l'una inversa dell'altra,



si ha dunque

$${}^0p^2 = {}^0R^{(1\leftarrow 0)} {}^1R^{(2\leftarrow 1)} {}^0p^0 = {}^0R_1 {}^1R_2 {}^0p^0.$$

Di conseguenza, *le rotazioni rigide di un corpo espresse in terna corrente si compongono per postmoltiplicazione*

In base a quanto visto, le matrici di  $SO(3)$  corrispondono esattamente alle rotazioni rigide - nel senso che ad ogni matrice corrisponde una e una sola rotazione, e viceversa.

La rappresentazione matriciale d'altronde, che utilizza nove parametri non indipendenti, può presentare alcuni inconvenienti, tra i quali:

- non è molto intuitiva, dovendo ricorrere alle espressioni in coordinate dei versori degli assi delle terne;
- non è molto robusta numericamente (una procedura numerica che debba calcolare i valori di una matrice di rotazione può produrre lievi errori che fanno sì che il risultato non sia in effetti in  $SO(3)$ , introducendo quindi deformazioni dei corpi).

È quindi molto importante avere a disposizione altre rappresentazioni delle rotazioni, che possano ovviare ad alcuni di questi inconvenienti.

Si è osservato che la dimensione della varietà che rappresenta le matrici ortogonali speciali, cioè le rotazioni, è 3. Una rappresentazione dell'orientamento in termini di tre soli parametri indipendenti ne costituisce pertanto una *rappresentazione minima*.

Sono possibili alcune diverse rappresentazioni minime, tra cui le più frequentemente utilizzate sono quelle degli *angoli di Eulero* e degli *angoli di Roll-Pitch-Yaw*.

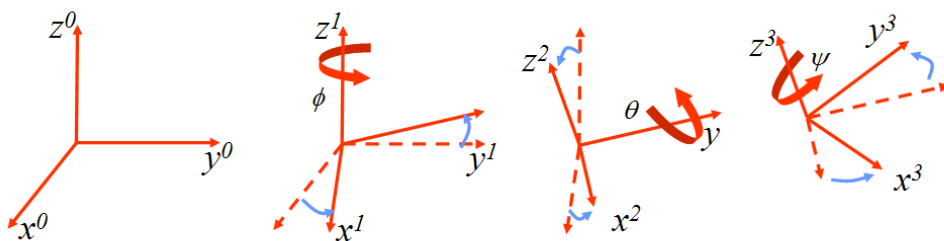
## Angoli di Eulero

Gli *angoli di Eulero* forniscono una rappresentazione minima dell'orientamento componendo tre rotazioni elementari espresse rispetto ad assi di terna corrente. La sequenza degli assi attorno a cui si ruota determina il particolare tipo di rappresentazione.

La più comune è la sequenza  $Z$ - $Y$ - $Z^2$ , composta da una rotazione di  $\varphi$  attorno all'asse  $z$ , seguita da una rotazione di  $\vartheta$  attorno all'asse  $y$  del sistema solidale al corpo in moto, seguita infine da una nuova rotazione di  $\psi$  attorno all'asse  $z$  dello stesso sistema mobile.

---

<sup>2</sup>Nel seguito, per aderire a convenzioni largamente usate, denoteremo gli assi dei riferimenti cartesiani con  $x, y, z$  invece che con  $x_1, x_2, x_3$ , ed i corrispondenti versori con  $i, j, k$  invece che con  $i_1, i_2, i_3$ .



Affinché una terna di angoli come quelli dati sia una perfetta rappresentazione delle rotazioni, si deve verificare che al variare dei tre parametri l'orientamento finale della terna possa effettivamente assumere valori arbitrari, e che ad ogni possibile orientazione corrisponda una e una sola terna di angoli. Per verificare queste condizioni, possiamo usare la rappresentazione delle rotazioni mediante il gruppo  $SO(3)$ .

La rotazione finale viene costruita nella costruzione di Eulero per composizione di tre rotazioni elementari:

- si ruota la terna  $\{0\}$  dell'angolo  $\varphi$  intorno all'asse  $z$ :  $Rot(z, \varphi)$ .
- si ruota la terna  $\{1\}$  dell'angolo  $\vartheta$  intorno all'asse  $y$  corrente:  $Rot(y, \vartheta)$ .
- si ruota la terna  $\{2\}$  dell'angolo  $\psi$  intorno all'asse  $z$  corrente:  $Rot(z, \psi)$ .

La matrice di rotazione complessiva è ottenuta quindi componendo per *postmultiplicazione* le matrici delle rotazioni elementari effettuate, e vale

$$\begin{aligned}
 R_{ZYZ}(\varphi, \vartheta, \psi) &= Rot(z, \varphi)Rot(y, \vartheta)Rot(z, \psi) \\
 &= \begin{bmatrix} C_\varphi C_\vartheta C_\psi - S_\varphi S_\psi & -C_\varphi C_\vartheta S_\psi - S_\varphi C_\psi & C_\varphi S_\vartheta \\ S_\varphi C_\vartheta C_\psi + C_\varphi S_\psi & -S_\varphi C_\vartheta S_\psi + C_\varphi C_\psi & S_\varphi S_\vartheta \\ -S_\vartheta C_\psi & S_\vartheta S_\psi & C_\vartheta \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Sia ora assegnata una data matrice di rotazione, nella forma

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \in SO(3)$$

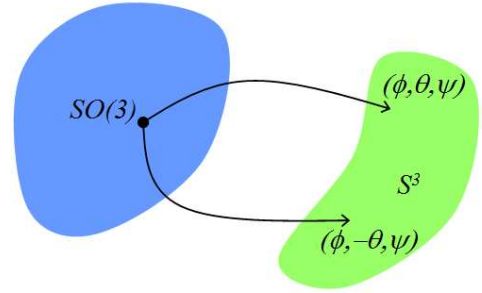
Vogliamo trovare (se possibile) valori per gli angoli di Eulero tali per cui  $R_{ZYZ}(\varphi, \vartheta, \psi) = R$ . Bisogna distinguere due casi:

- $r_{13}^2 + r_{23}^2 = \sin^2 \vartheta \neq 0$ . Si può avere quindi una soluzione con  $0 < \vartheta < \pi$  ( $\sin \vartheta > 0$ ),

$$\begin{cases} \varphi = \operatorname{atan2}(r_{23}, r_{13}) \\ \vartheta = \operatorname{atan2}(\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}) \\ \psi = \operatorname{atan2}(r_{32}, -r_{31}) \end{cases}$$

oppure con  $-\pi < \vartheta < 0$  ( $\sin \vartheta < 0$ ),

$$\begin{cases} \varphi = \operatorname{atan2}(-r_{23}, -r_{13}) \\ \vartheta = \operatorname{atan2}(-\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}) \\ \psi = \operatorname{atan2}(-r_{32}, r_{31}) \end{cases}$$



Si hanno quindi due terne possibili per ogni rotazione assegnata, ma ogni soluzione è isolata.

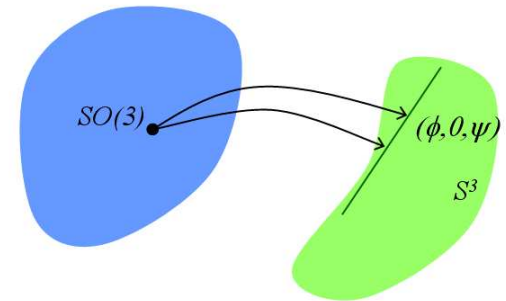
- $r_{13}^2 + r_{23}^2 = 0$ , quindi  $\vartheta = 0$  se  $r_{33} = 1$  o  $\vartheta = \pi$  se  $r_{33} = -1$ .

Per  $\vartheta = 0$  si ha  $\cos \vartheta = 1$  e

$$\begin{cases} \vartheta = 0 \\ \varphi + \psi = \operatorname{atan2}(r_{21}, r_{11}) \\ \quad = \operatorname{atan2}(-r_{12}, r_{11}) \end{cases}$$

Viceversa se  $\vartheta = \pi$ , si ottiene  $\cos \vartheta = -1$  e

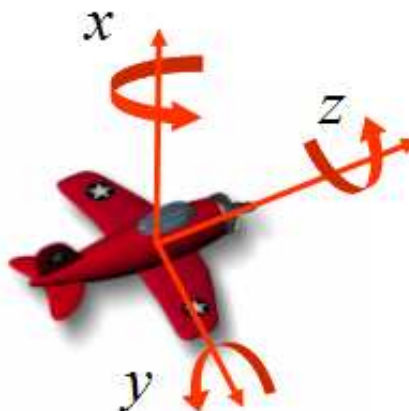
$$\begin{cases} \vartheta = \pi \\ \varphi - \psi = \operatorname{atan2}(-r_{21}, -r_{11}) \\ \quad = \operatorname{atan2}(-r_{12}, -r_{11}) \end{cases}$$



In entrambe i casi si hanno infinite soluzioni essendo definita solo la somma o la differenza di  $\varphi$  e  $\psi$  (le rotazioni di  $\varphi$  e  $\psi$  sono effettuate attorno ad assi paralleli tra loro). Per ogni soluzione ne esistono altre arbitrariamente vicine.

### Angoli RPY.

La rappresentazione  $RPY$ , che trae origine dalle applicazioni aero-navali, è basata sull'uso di tre angoli di rollio, beccheggio e imbardata (o virata) — *Roll, Pitch, Yaw* in inglese. Un pilota definisce angolo di rollio la rotazione attorno alla direzione corrente di prua (asse  $z$ ), angolo di beccheggio quello rispetto ad un'asse perpendicolare al precedente nel piano del veicolo (asse  $y$ ), ed angolo di virata quello rispetto alla perpendicolare al piano del veicolo (asse  $x$ ).



La rotazione complessiva corrisponde a una sequenza di tre rotazioni di rollio (di angolo  $\varphi$ ), beccheggio ( $\vartheta$ ) e imbardata ( $\psi$ ) eseguite in assi correnti.

Esplicitamente si ha

$$R_{RPY}(\varphi, \vartheta, \psi) = Rot(z, \varphi)Rot(y, \vartheta)Rot(x, \psi) \\ = \begin{bmatrix} C_\varphi C_\vartheta & C_\varphi S_\vartheta S_\psi - S_\varphi C_\psi & C_\varphi S_\vartheta C_\psi + S_\varphi S_\psi \\ S_\varphi C_\vartheta & S_\varphi S_\vartheta S_\psi + C_\varphi C_\psi & S_\varphi S_\vartheta C_\psi - C_\varphi S_\psi \\ -S_\vartheta & C_\vartheta S_\psi & C_\vartheta C_\psi \end{bmatrix}.$$

Ovviamente, è possibile leggere la stessa matrice come la successione di una imbardata, un beccheggio e un rollio in assi fissi. Assegnata una matrice di rotazione

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \in SO(3),$$

studiamo ancora per quali angoli di  $RPY$  si può ottenere  $R_{RPY}(\varphi, \vartheta, \psi) = R$ .

Distinguiamo anche qui due casi:

- $r_{11}^2 + r_{21}^2 \neq 0$ , quindi  $\cos\vartheta \neq 0$ .  
Si può avere una soluzione con  $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,

$$\begin{cases} \varphi = \operatorname{atan2}(r_{21}, r_{11}) \\ \vartheta = \operatorname{atan2}(-r_{31}, \sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}) \\ \psi = \operatorname{atan2}(r_{32}, r_{33}) \end{cases}$$

oppure con  $\vartheta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ ,

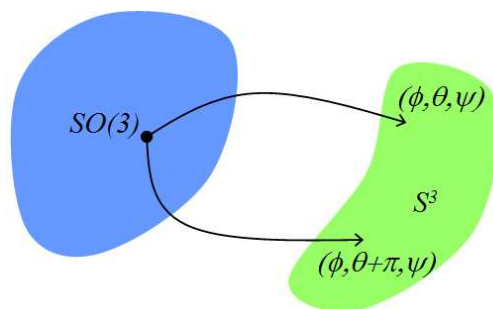
$$\begin{cases} \varphi = \operatorname{atan2}(-r_{21}, -r_{11}) \\ \vartheta = \operatorname{atan2}(-r_{31}, -\sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}) \\ \psi = \operatorname{atan2}(-r_{32}, -r_{33}) \end{cases}$$

- $r_{11}^2 + r_{21}^2 = 0$ , quindi  $\vartheta = \pm\frac{\pi}{2}$ . Nel primo caso si ha  $\sin\vartheta = 1$  quindi

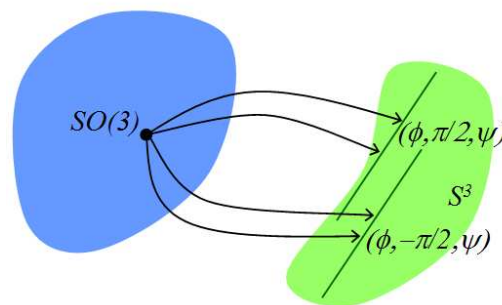
$$\begin{cases} \vartheta = \frac{\pi}{2} \\ \varphi + \psi = \operatorname{atan2}(r_{23}, r_{13}) \end{cases}$$

Nel secondo si ha  $\sin\vartheta = -1$  quindi

$$\begin{cases} \vartheta = -\frac{\pi}{2} \\ \varphi - \psi = \operatorname{atan2}(-r_{13}, -r_{23}) \end{cases}$$



Si hanno ancora due terne possibili per ogni rotazione assegnata, con soluzioni isolate.



Ancora una volta si ha una doppia infinità di soluzioni, essendo definita solo la somma di  $\varphi$  e  $\psi$  (le rotazioni di  $\varphi$  e  $\psi$  sono effettuate attorno ad assi paralleli tra loro). Per ogni soluzione ne esistono altre arbitrariamente vicine.

## Notazione Esponenziale

La notazione esponenziale per le rotazioni può essere vista come una generalizzazione al caso tridimensionale della notazione complessa usata per indicare rotazioni planari.

In quel caso si ha che una rotazione  $R \in SO(2)$  può essere espressa, identificando  $\mathbb{R}^2$  col piano complesso, secondo la notazione (talvolta detta *fasorica*)

$$g_R(p) = Rp = \begin{bmatrix} C_\theta & -S_\theta \\ S_\theta & C_\theta \end{bmatrix} p = e^{j\theta} p.$$

L'esponente usato è un numero immaginario puro, cioè un numero complesso



tale che il suo Hermitiano (il trasposto coniugato) è uguale al suo opposto:  $j\theta = -(j\theta)^H$ .

Questa notazione si generalizza ponendo  $R = e^{\hat{\Theta}}$ , con  $\hat{\Theta} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  antisimmetrica (quindi tale che  $\hat{\Theta}^H = -\hat{\Theta}$ ).

Secondo la definizione di esponenziale di matrice, si ha

$$e^{\hat{\Theta}} = I + \hat{\Theta} + \frac{\hat{\Theta}^2}{2!} + \frac{\hat{\Theta}^3}{3!} + \dots = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\hat{\Theta}^i}{i!}$$

La matrice antisimmetrica  $\hat{\Theta}$  è caratterizzata da tre soli parametri indipendenti, che possiamo estrarre in un vettore  $\Theta = \hat{\Theta}^\vee$ , introducendo l'operatore "V" che è l'inverso di quello introdotto per la notazione matriciale dei prodotti vettoriali. Ponendo  $\hat{\Theta} = \theta \hat{\omega}$ , con  $\theta$  uno scalare tale che  $\omega = \hat{\omega}^\vee$  abbia norma unitaria, si ha che

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\omega} = -\hat{\omega}^H = -\hat{\omega}^T \\ \hat{\omega}^2 = \omega \omega^T - I \\ \hat{\omega}^3 = -\hat{\omega} \\ \hat{\omega}^4 = -\hat{\omega}^2 \\ \hat{\omega}^5 = \hat{\omega} \\ \dots = \dots \\ \hat{\omega}^{2\ell} = (-1)^{\ell-1} \hat{\omega}^2, \ell = 1, 2, \dots \\ \hat{\omega}^{2\ell-1} = (-1)^{\ell-1} \hat{\omega} \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Applicando tali relazioni, la sommatoria che definisce l'esponenziale di matrice può essere valutata concisamente, e si ottiene

$$R(\omega, \theta) = e^{\theta \hat{\omega}} = I + \hat{\omega} \sin \theta + \hat{\omega}^2 (1 - \cos \theta)$$

E' facile verificare che  $e^{\theta \hat{\omega}} \in SO(3)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} (e^{\theta \hat{\omega}})^T = e^{\theta \hat{\omega}^T} = e^{-\theta \hat{\omega}} = (e^{\theta \hat{\omega}})^{-1} \\ \det(e^{\theta \hat{\omega}}) = 1 \text{ per } \theta = 0 \implies \text{quindi, per continuità } \det(e^{\theta \hat{\omega}}) = 1 \forall \theta \end{array} \right.$$

Svolgendo i calcoli, si ottiene (ponendo  $V_\theta = 1 - \cos \theta$  oltre che  $C_\theta = \cos \theta$ ;  $S_\theta = \sin \theta$ )

$$e^{\theta \hat{\omega}} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 V_\theta + C_\theta & \omega_1 \omega_2 V_\theta - \omega_3 S_\theta & \omega_1 \omega_3 V_\theta + \omega_2 S_\theta \\ \omega_1 \omega_2 V_\theta + \omega_3 S_\theta & \omega_2^2 V_\theta + C_\theta & \omega_2 \omega_3 V_\theta - \omega_1 S_\theta \\ \omega_1 \omega_3 V_\theta - \omega_2 S_\theta & \omega_2 \omega_3 V_\theta + \omega_1 S_\theta & \omega_3^2 V_\theta + C_\theta \end{bmatrix}$$

Ancora una volta, data una generica  $R \in SO(3)$ , si cercano i valori di  $\omega$  e  $\theta$ . Vale

$$\text{trace}(R) = \text{trace}(e^{\theta \hat{\omega}}) \implies C_\theta = \frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}$$

da cui  $\theta$  è definito a meno del segno. Se  $R \neq I$ ,  $\theta \neq 0$  e sviluppando la equazione  $R - R^T = e^{\hat{\omega}\theta} - e^{\hat{\omega}^T\theta}$ , si ha:

$$\omega = \frac{1}{2\sin(\theta)} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$$

Il vettore  $\theta\omega$  è detto delle *coordinate esponenziali* di  $R$ .

- Le coordinate esponenziali sono da considerarsi minime, anche se si utilizzano quattro parametri, perché è immediato eliminare il quarto parametro (tornando quindi all'uso del vettore  $\Theta$ );

- In quanto essenzialmente ancora una rappresentazione minima, la notazione esponenziale soffre ancora di singolarità. La indeterminazione di segno di  $\theta$  fa sì che ad una stessa rotazione corrispondano due distinte soluzioni,  $(\omega, \theta)$  e  $(-\omega, -\theta)$ . Inoltre, se  $R$  è l'identità,  $\theta$  risulta nullo, e  $\omega$  è indefinito (può assumere qualsiasi valore). Il problema è praticamente rilevante per  $\theta$  piccoli, che portano a malcondizionamenti numerici nel calcolo di  $\omega$ .

- Utilizzando la notazione esponenziale, è possibile esprimere in modo molto compatto la rotazione che porta una terna  $(\underline{i}^0, \underline{j}^0, \underline{k}^0)$  in  $(\underline{i}^1, \underline{j}^1, \underline{k}^1)$ : infatti vale il cosiddetto *lemma dei versori*, cioè

$$\begin{aligned} \langle \underline{i}^1 \underline{i}^0 \rangle + \langle \underline{j}^1 \underline{j}^0 \rangle + \langle \underline{k}^1 \underline{k}^0 \rangle &= 1 + 2 \cos \theta \\ \underline{i}^1 \wedge \underline{i}^0 + \underline{j}^1 \wedge \underline{j}^0 + \underline{k}^1 \wedge \underline{k}^0 &= 2\omega \sin \theta \end{aligned}$$

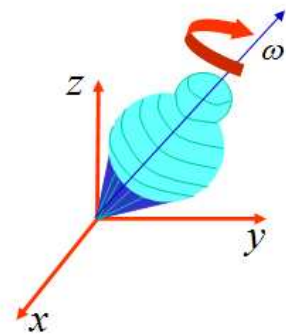
Una interessante interpretazione della notazione esponenziale introdotta può venir data usando la nozione di velocità angolare di un corpo, che sarà ripresa in seguito, ma per la quale si fa appello qui alle conoscenze di meccanica elementare.

Consideriamo un corpo rigido che ruota attorno all'origine con velocità angolare costante  $\omega \in \mathbb{R}^3$ . La velocità di un suo generico punto è data da

$$\dot{p}(t) = \omega \wedge p(t) = \hat{\omega}p$$

cioè da una equazione differenziale ordinaria lineare in  $p(t)$  la cui soluzione è

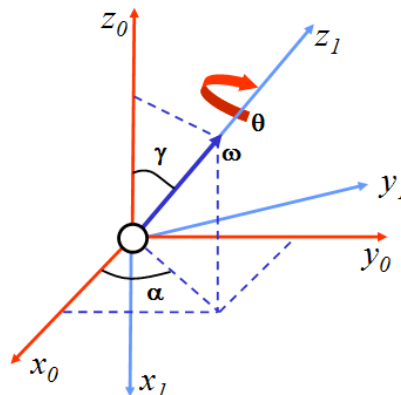
$$p(t) = e^{\hat{\omega}(t-t_0)}p(t_0)$$



*Teorema di Eulero: Ogni rotazione rigida è equivalente ad una rotazione attorno ad un asse fisso.*

## Rappresentazione Asse-Angolo.

La rappresentazione della generica rotazione rigida come rotazione attorno ad un asse fisso, oltre che come conseguenza della notazione esponenziale, può essere introdotta direttamente. In questo caso, basterà pensare al vettore unitario  $\omega$  come al versore dell'asse attorno cui si ruota, e a  $\theta$  come all'angolo di cui si ruota. La matrice di rotazione attorno ad un asse fisso può essere anche ottenuta per combinazione di rotazioni elementari. Si può procedere come segue:



- allineare l'asse  $z$  del riferimento con  $\omega$ ;
- ruotare di  $\theta$  attorno allo  $z$  corrente;
- ripristinare  $z$  nella posizione originale.

Se indichiamo con  $(\alpha, \beta, \gamma)$  gli angoli formati da  $\omega$  con gli assi principali, possiamo scrivere

$$Rot(\omega, \theta) = Rot(z, \alpha)Rot(y, \gamma)Rot(z, \theta)Rot(y, -\gamma)Rot(z, -\alpha)$$

ottenendo la stessa matrice ottenuta mediante la notazione esponenziale (si osservi che  $S_\alpha = \frac{\omega_2}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}$ ,  $C_\alpha = \frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}$ ,  $S_\gamma = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$  e  $C_\gamma = r_3$ ).

## Rappresentazione con Quaternione Unitario

Abbiamo visto che le rappresentazioni minime sinora considerate introducono una singolarità di rappresentazione, nella quale si perde la biunivocità della rappresentazione. Questo accade anche per altre possibili rappresentazioni (come ad esempio gli angoli  $YZX$  di Helmholtz). In effetti, il problema è intrinseco alla topologia della varietà  $SO(3)$ , che non è rappresentabile con una unica mappa globale su  $\mathbb{R}^3$ : problema analogo a quanto avviene per la rappresentazione di una sfera sul piano, ad esempio.

Le singolarità di rappresentazione sono indesiderabili soprattutto perché algoritmi numerici applicati nei dintorni di una singolarità danno spesso luogo a malcondizionamenti ed errori numerici.

Abbiamo anche osservato come una rappresentazione a quattro parametri, legata alla notazione esponenziale, non sia essa stessa immune da singolarità.

È però possibile ottenere una rappresentazione globale di  $SO(3)$  con quattro parametri, usando i *quaternioni unitari* (o parametri di Eulero).

Un quaternione può essere considerato la generalizzazione di un numero complesso, ed è definito come

$$Q = q_0 + q_1 \underline{i}_1 + q_2 \underline{i}_2 + q_3 \underline{i}_3 = (q_0, \underline{q})$$

con  $q_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, \dots, 3$ . Il quaternione ha dunque una parte scalare ( $q_0$ ) ed una parte vettoriale ( $\underline{q}$ ). Il coniugato di un quaternione  $Q = (q_0, \underline{q})$  è dato da  $Q^* = (q_0, -\underline{q})$ .

Il prodotto tra quaternioni  $Q = (q_0, \underline{q})$  e  $P = (p_0, \underline{p})$  è dato da

$$Q \cdot P = (q_0 p_0 - \langle \underline{q}, \underline{p} \rangle, q_0 \underline{p} + p_0 \underline{q} + \underline{q} \wedge \underline{p})$$

I quaternioni formano un gruppo con questa operazione di moltiplicazione.

La norma di un quaternione è la radice quadrata della parte scalare del prodotto tra  $Q$  e il suo coniugato:

$$Q \cdot Q^* = (q_0^2 + \langle \underline{q}, \underline{q} \rangle, \underline{0})$$

$$\|Q\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

Un quaternione unitario è un quaternione per cui  $\|Q\| = 1$ . I quaternioni unitari formano anch'essi un sottogruppo. Si può dimostrare che esiste una relazione biunivoca tra i quaternioni e le matrici di  $SO(3)$ . Data una matrice in notazione esponenziale  $R = e^{\widehat{\omega}\theta}$ , possiamo associargli un quaternione unitario definito da

$$Q_R = (\cos(\theta/2), \omega \sin(\theta/2)).$$

Si noti che una rotazione di  $-\theta$  attorno a  $-\omega$  fornisce lo stesso quaternione unitario che la rotazione di  $\theta$  attorno a  $\omega$ , risolvendo così la singolarità di rappresentazione della notazione asse-angolo.

Viceversa, dato un quaternione unitario  $Q = (q_0, \underline{q})$ , gli associamo una rotazione  $R = e^{\widehat{\omega}\theta}$  ponendo

$$\theta = 2 \arccos q_0, \quad \omega = \begin{cases} \frac{1}{\sin(\theta/2)} \underline{q} & \text{if } \theta \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Si può verificare che, date due matrici di rotazione  $R^1$  e  $R^2$ , e i quaternioni associati  $Q_{R^1}$ ,  $Q_{R^2}$ , si ha

$$Q_{R^1} \cdot Q_{R^2} = Q_{R^1 R^2}$$

cioè che il prodotto tra quaternioni corrisponde esattamente al prodotto tra matrici in  $SO(3)$ .

### 1.1.5 Trasformazioni Rigide Generali

Abbiamo visto che, mentre le rotazioni tra due sistemi di riferimento sono esprimibili in forma matriciale,

$$p^1 = {}^0R_1 p^0,$$

altrettanto non è possibile per le traslazioni, che non sono trasformazioni lineari, bensì affini:

$$p^1 = \underline{v} + p^0,$$

Consideriamo una trasformazione formata dalla successione di una rotazione seguita da una traslazione, espresse in assi fissi:

$$g_T(g_R(p)) = \underline{v} + Rp \quad , \quad \underline{v} \in \mathbb{R}^3 \quad , \quad R \in SO(3)$$

Si noti che le due operazioni non commutano, essendo

$$g_R(g_T(p)) = R\underline{v} + Rp \quad , \quad \underline{v} \in \mathbb{R}^3 \quad , \quad R \in SO(3) .$$

La struttura della trasformazione comunque non cambia, potendosi in entrambe i casi scrivere la trasformazione nella forma  $g(p) = Rp + \underline{m}$ , con il vettore  $\underline{m}$  di traslazione opportunamente definito. Questa generale trasformazione rappresenta ovviamente ancora un moto rigido. È anzi possibile dimostrare che *qualsiasi* moto rigido può essere scritto in questa forma, cioè come roto-traslazione.

Le roto-traslazioni, cioè le coppie

$$(R, \underline{m}) \in SO(3) \times \mathbb{R}^3$$

si compongono tra loro secondo una operazione prodotto definita (con le usuali interpretazioni in assi fissi o assi correnti) da

$$(R_2, t_2) \circ (R_1, t_1) = (R_2 R_1, t_2 + R_2 t_1)$$

L'insieme delle rototraslazioni, assieme a questa legge, forma un gruppo detto *speciale euclideo*, o  $SE(3)$ .

### 1.1.6 Trasformazioni Omogenee

Vista la grande praticità della notazione matriciale, e la facilità con la quale si presta al calcolo automatico, è molto utile introdurre una nuova rappresentazione che permetta di scrivere ogni trasformazione rigida in forma matriciale.

Ciò si ottiene immergendo lo spazio  $\mathbb{R}^3$  nello spazio omogeneo, un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^4$ , fissando la seguente relazione:

$$a \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \bar{a} \in \mathbb{R}^4, \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \bar{a}_3 \\ s \end{bmatrix}$$

Rimane la possibilità di scegliere il valore di  $s$ , il che può essere fatto secondo convenienza. Nel caso delle rappresentazioni di configurazioni di oggetti rigidi, scegliamo di porre  $s = 1$  se la grandezza rappresentata è un punto, e  $s = 0$  se un vettore.

Così facendo si esplicita la differenza fisica tra queste grandezze, e la definizione di un vettore come differenze di punti: se infatti è  $p - q = \underline{v}$ , in notazione omogenea si ha

$$\bar{p} - \bar{q} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 - q_1 \\ p_2 - q_2 \\ p_3 - q_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{\underline{v}}.$$

Si osserva anche direttamente come la somma di un punto con un vettore sia un punto, la somma di due vettori sia un vettore, mentre la somma di due punti non ha senso in questo contesto.

Usando le coordinate omogenee, è possibile scrivere la generica trasformazione rigida in forma matriciale semplicemente ponendo

$$\begin{aligned} g_{(R,\underline{m})}(p) &= \underline{m} + Rp \\ &\downarrow \\ \bar{g}_{(R,\underline{m})}(\bar{p}) &= \left[ \begin{array}{ccc|c} R & & & \underline{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} = T_{(R,\underline{m})}\bar{p} \end{aligned}$$

L'azione della trasformazione rigida sul vettore  $\underline{v} = p - q$  è espressa dallo stesso operatore:

$$\begin{aligned} g_{(R,\underline{m})^*}(\underline{v}) &= g_{(R,\underline{m})}(p) - g_{(R,\underline{m})}(q) = R\underline{v} \\ &\downarrow \\ \bar{g}_{(R,\underline{m})^*}(\bar{\underline{v}}) &= \left[ \begin{array}{ccc|c} R & & & \underline{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \underline{v} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\underline{v} \\ 0 \end{bmatrix} = T_{(R,\underline{m})}\bar{\underline{v}} \end{aligned}$$

Nella rappresentazione omogenea, gli elementi di  $SE(3)$  si identificano dunque con matrici  $4 \times 4$  della particolare forma

$$(R, \underline{m}) = \left[ \begin{array}{ccc|c} R & & & \underline{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

dette matrici di trasformazione omogenea, mentre la legge di composizione è ora semplicemente il convenzionale prodotto tra matrici. Si ha dunque

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} R_2 & & & \underline{m}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc|c} R_1 & & & \underline{m}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|c} R_2 R_1 & & & \underline{m}_2 + R_2 \underline{m}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Per il gruppo  $SE(3)$ , l'elemento identità è dato da  $Id = I_4$ , mentre l'inverso di un elemento è dato da

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} R & & & \underline{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]^{-1} = \left[ \begin{array}{ccc|c} R^T & & & -R^T \underline{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

• È interessante notare che, in analogia alla notazione esponenziale per le matrici di rotazione, è possibile descrivere anche le matrici omogenee come esponenziali, ponendo  $T = e^{\hat{\xi}\theta}$ , con  $\theta \in \mathbb{R}$  e

$$\hat{\xi} = \left[ \begin{array}{ccc|c} \hat{\omega} & & & v \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

• L'espressione esplicita dell'esponenziale è data da

$$e^{\hat{\xi}\theta} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\hat{\xi}^i}{i!} = \left[ \begin{array}{ccc|c} e^{\hat{\omega}\theta} & & & (I - e^{\hat{\omega}\theta})\hat{\omega}v + \theta\omega\omega^T v \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Eguagliando questa espressione a quella della matrice omogenea associata ad un elemento  $(R, \underline{m}) \in SE(3)$ , si ricava il valore di  $\theta\omega$  (con il metodo visto in precedenza) e quindi di  $v$ :

$$v = \left( (I - e^{\hat{\omega}\theta})\hat{\omega} + \theta\omega\omega^T \right)^{-1} \underline{m}$$

• La matrice  $\hat{\xi}$  è caratterizzata da 6 soli parametri, che ne possono essere estratti mediante l'operatore  $\vee$ , definito in questo caso da

$$\hat{\xi}^\vee = \left[ \begin{array}{ccc|c} \hat{\omega} & & & v \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]^\vee = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \xi.$$

A questa grandezza, che impila due vettori cui, come si vedrà, potremo associare rispettivamente il significato di velocità lineare e velocità angolare, si dà il nome di velocità generalizzata, o *twist*.

**Rotazioni e traslazioni elementari** Le trasformazioni omogenee elementari, corrispondenti a rotazioni di un angolo  $\theta$  attorno agli assi x,y,z e a una traslazione di un vettore  $\underline{m}$  sono

$$Rot(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C(\theta) & -S(\theta) & 0 \\ 0 & S(\theta) & C(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Rot(y, \theta) = \begin{bmatrix} C(\theta) & 0 & S(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S(\theta) & 0 & C(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Rot(z, \theta) = \begin{bmatrix} C(\theta) & -S(\theta) & 0 & 0 \\ S(\theta) & C(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Trasl(v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per completezza, si osserva che la piú generale delle trasformazioni omogenee può essere scritta nella forma

$$T = \left[ \begin{array}{c|c} D_{3 \times 3} & p_{3 \times 1} \\ \hline f_{1 \times 3} & s \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} Deformazione & Traslazione \\ \hline Prospettiva & scala \end{array} \right].$$

Questa matrice rappresenta un moto rigido se e solo se  $D \in SO(3)$ ,  $f = [0, 0, 0]$ , e  $s = 1$ . Scelte diverse di questi elementi sono utilizzate tipicamente in visione artificiale o computer graphics per ottenere rispettivamente deformazioni, distorsioni prospettiche di immagini e cambiamenti di scala.

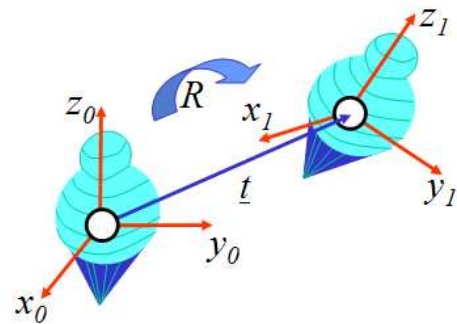
**Interpretazione delle matrici di trasformazione omogenea** Come per le matrici di rotazione, anche per le matrici di trasformazione omogenea si possono dare diverse interpretazioni. In particolare, una matrice  $T$

$$T = \left[ \begin{array}{c|c} R & t \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right]$$

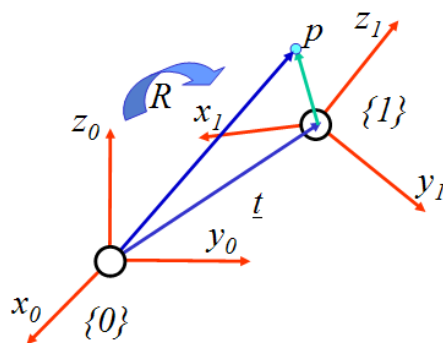
può rappresentare rispettivamente:



- $T = {}^0T^{(1 \leftarrow 0)}$ : l'operatore che porta punti e vettori di un corpo da una configurazione  $\{0\}$  in una nuova configurazione  $\{1\}$  ruotata di  $R$  e traslata di  $t$  (con coordinate espresse nel sistema di partenza);

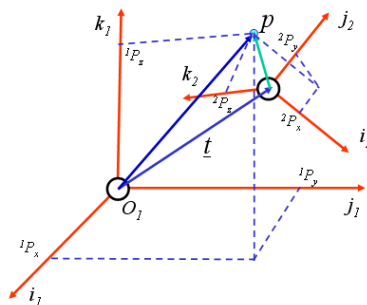
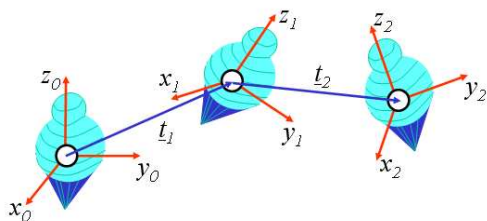


- $T = {}^0T_1$ : l'operatore che trasforma le coordinate di un punto inizialmente descritto da un osservatore posto in  $\{1\}$  in quelle descritte da un osservatore posto in un riferimento  $\{0\}$ , rispetto al quale il sistema  $\{1\}$  ha origine in  $t$  e versori dati dalle colonne di  $R$ .



**Composizione di trasformazioni omogenee** La composizione di matrici di trasformazione omogenee si effettua utilizzando il prodotto matriciale secondo le stesse leggi viste per la composizione di rotazioni, cioè:

- per premoltiplicazione di matrici espresse rispetto a una terna fissa;
- per postmoltiplicazione di matrici espresse rispetto alla terna corrente.





# Capitolo 2

## Cinematica dei Bracci Articolati

La struttura meccanica di un robot è costituita da un insieme di corpi (detti *membri* o *links*), che possiamo supporre rigidi, connessi fra loro da articolazioni (*giunti* o *joints*), o da più generali coppie cinematiche quali quelle tra una ruota ed il terreno.

I robot sono azionati mediante *attuatori*, che sono tipicamente posti in corrispondenza di alcuni dei giunti, determinandone la configurazione (ad esempio, l'angolo per i giunti rotoidali, o la elongazione per i giunti prismatici). La conoscenza delle configurazioni di alcuni dei giunti è data da *sensori* di posizione (angolare, o di elongazione, nei casi suddetti). Nel caso generale, quindi, sarà necessario distinguere tra giunti *attuati* e *non attuati*, *sensorizzati* e *non sensorizzati*. È peraltro quasi sempre dato il caso in cui un giunto attuato è anche sensorizzato: si dirà in questo caso che il giunto è *attivo*, mentre un giunto non attuato né sensorizzato sarà detto *passivo*.

Il modello cinematico di un robot è una descrizione analitica delle relazioni che intercorrono tra le posizioni dei giunti e la configurazione (posizione e orientazione, o *postura*) di un particolare membro della struttura del robot. Quest'ultimo è solitamente il corpo che reca l'organo terminale, ad esempio un utensile o un dispositivo per la presa. Nei bracci manipolatori, l'organo terminale (o *end-effector*) è solitamente posto all'estremità della catena di corpi e giunti che formano il braccio; l'altra estremità, la *base*, è invece solitamente fissata rigidamente all'ambiente. La postura dell'organo terminale è spesso descritta rispetto ad un sistema di coordinate cartesiane fissate nell'ambiente di lavoro.

Il cosiddetto *problema cinematico diretto* riguarda la determinazione della postura dell'organo terminale (senza pregiudicare la libertà di considerare tale qualunque membro possa essere utile), quando siano note le configu-

razioni dei giunti sensorizzati. Matematicamente, si tratta quindi di ottenere una espressione esplicita della *mappa cinematica diretta*,

$$\begin{aligned} \Lambda : Q_S &\rightarrow SE(3) \\ q &\mapsto \Lambda(q) = x \in SE(3) \end{aligned} \quad (2.1)$$

dove  $Q_S$  è l'insieme dei valori che possono assumere le configurazioni dei giunti sensorizzati.

Il *problema cinematico inverso* consiste invece nella determinazione delle configurazioni da far assumere ai giunti attuati, per fare in modo che la postura dell'organo terminale sia una assegnata, ovvero

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda} : SE(3) &\rightarrow Q_A \\ x &\mapsto \bar{\Lambda}(x) = q \in Q_A \end{aligned} \quad (2.2)$$

con  $Q_A$  l'insieme dei valori che possono assumere le configurazioni dei giunti attuati. Qualora giunti attuati e sensorizzati coincidano, si potrà esplicitamente usare la notazione per le funzioni inverse  $\bar{\Lambda} = \Lambda^{-1}$ .

## 2.1 Cinematica diretta dei bracci seriali

Inizieremo la trattazione del problema cinematico diretto dal caso di bracci manipolatori seriali, costituiti da catene cinematiche aperte. In questo caso, importante di per sé ma anche strumentale alla soluzione di altri casi, si può assumere che sia  $Q_A = Q_S = Q$ .

Le trasformazioni omogenee tra configurazioni di corpi rigidi sono uno strumento molto utile per approssciare il problema cinematico diretto dei bracci manipolatori seriali. La regola di composizione delle trasformazioni rigide si applica direttamente in questo caso. Si può procedere infatti a descrivere la configurazione di ogni membro, cui si associa una terna di riferimento solidale, descrivendola relativamente al precedente, a partire dal membro fisso, o *base*.

Il procedimento è concettualmente molto semplice. Nell'esempio di fig.2.1, si sono fissate (in modo piuttosto arbitrario) quattro terne solidali ai membri della catena cinematica aperta, tra i quali le matrici di trasformazione omogenea sono scritte in modo piuttosto semplice:

$$\begin{aligned} {}^0T_1 &= Rot(z, q_1)Trasl(z, L_1); \\ {}^1T_2 &= Trasl(x, L_2)Rot(y, q_2); \\ {}^2T_3 &= Trasl(z, L_3); \end{aligned}$$

da cui direttamente per postmultiplicazione si ottiene la descrizione della postura della terna  $\{3\}$  in funzione delle variabili angolari  $q_1, q_2$  e delle lunghezze

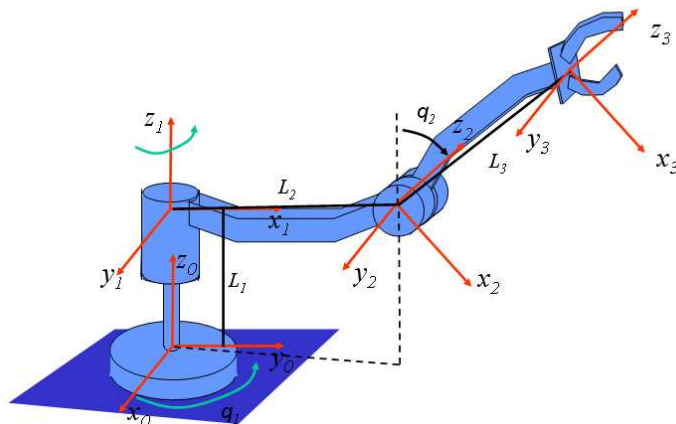


Figura 2.1: Sistemi di riferimento solidali ai membri di un braccio seriale.

$L_1, L_2, L_3$ :

$${}^0T_3 = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 = \begin{bmatrix} C_1 C_2 & -S_1 & C_1 S_2 & L_3 S_2 C_1 + L_2 C_1 \\ S_1 C_2 & C_1 & S_1 S_2 & L_3 S_2 S_1 + L_2 S_1 \\ -S_2 & 0 & C_2 & L_3 C_2 + L_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 2.1.1 Convenzione di Denavit-Hartenberg

In casi più complessi, può essere utile procedere in modo sistematico alla scelta di sistemi di riferimento che permettano di scrivere le catene di trasformate omogenee in modo più semplice possibile.

Fisseremo pertanto le seguenti convenzioni (dette di *Denavit-Hartenberg*):

- *Numerazione dei membri e dei giunti*: ogni membro viene numerato da 0 a  $n$  a partire dalla base e arrivando all'organo terminale, e designato dai simboli  $L_0, L_1, \dots, L_n$ . Un braccio seriale con  $n$  membri ha  $n - 1$  giunti, designati  $J_1, J_2, \dots, J_n$ . Il giunto  $J_i$  collega i membri  $L_{i-1}$  ed  $L_i$  (vedi fig.2.2).

- *Assegnazione degli assi  $z$  dei sistemi di riferimento*. Al membro  $i$ -esimo ( $0 \leq i < n$ ) si associa un sistema di riferimento solidale  $\{O^i, x^i, y^i, z^i\}$  il cui asse  $z^i$  coincide con l'asse del giunto  $J_{i+1}$ , cioè del giunto *a valle* del membro nella catena cinematica (vedi fig.2.3). Si noti che, mentre per un giunto

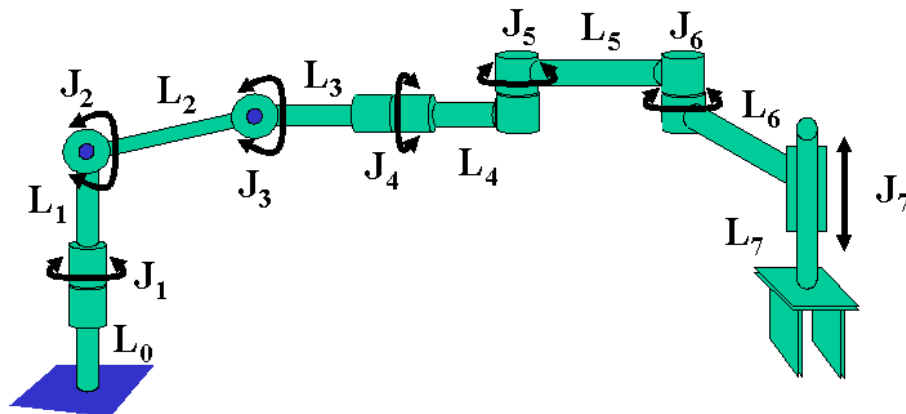


Figura 2.2: Numerazione convenzionale di articolazioni e membri di un braccio seriale.

rotoidale, l'asse del giunto è univocamente definito, per i giunti prismatici l'asse definisce solo una direzione: in altre parole, qualsiasi retta parallela alla direzione di moto del giunto prismatico può essere presa come asse  $z$ .

Non fissiamo per il momento alcun criterio specifico per scegliere l'origine  $O^i$  e gli assi  $x^i, y^i$ , salvo ovviamente imporre che si tratti di una terna ortonormale destrorsa. Vedremo in seguito che si possono fare scelte particolarmente comode per queste grandezze.

Si consideri la espressione della generica trasformazione  ${}^i T_{i-1}$  che lega il sistema di riferimento solidale al membro  $i - 1$ -esimo al membro  $i$ -esimo. Questa può essere espressa mediante una successione di trasformazioni elementari espresse in assi correnti. Si consideri innanzitutto la normale comune agli assi dei giunti  $J_i$  e  $J_{i+1}$ , e siano  $p^{i-1}$  e  $p^i$ , rispettivamente, i suoi punti di intersezione con gli assi stessi (vedi fig.2.4). Si ricordi che date due rette nello spazio, è sempre possibile trovare una retta incidente e normale ad entrambe. Con riferimento alla fig.2.5, siano rispettivamente:

$d_i$	la distanza tra $O^{i-1}$ e $p^{i-1}$ ;
$\theta_i$	l'angolo tra l'asse $x^{i-1}$ e la normale comune;
$a_i$	la lunghezza del segmento interno della normale comune;
$\alpha_i$	l'angolo tra $z^{i-1}$ (cioè l'asse del giunto $J^i$ ) e $z^i$ (cioè $J^{i+1}$ );
$b_i$	la distanza tra $O^i$ e $p^i$ ;
$\beta_i$	l'angolo tra la normale comune e l'asse $x^i$ .

La espressione di  ${}^i T_{i-1}$  può dunque essere ottenuta come segue:

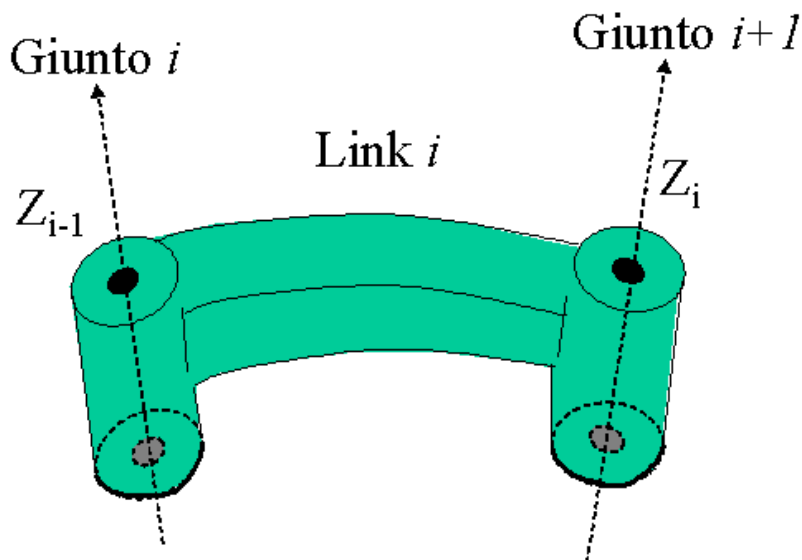


Figura 2.3: Assi  $z$  dei sistemi di riferimento dei membri

1. si trasli la terna  $\{i-1\}$  di  $d_i$  lungo l'asse  $z^{i-1}$ , portando così l'origine in  $p^{i-1}$ ;
2. si ruoti attorno all'asse  $z$  corrente di un angolo  $\theta_i$ , così da allineare l'asse  $x$  con la normale comune;
3. si trasli lungo l'asse  $x$  corrente di  $a_i$ , portando l'origine della terna corrente a coincidere con  $p^i$ ;
4. si ruoti attorno all'asse  $x$  corrente di  $\alpha_i$ , portando l'asse  $z$  a coincidere con l'asse del giunto  $J_{i+1}$ ;
5. si trasli lungo l'asse  $z$  corrente di  $b_i$ , portando l'origine a coincidere con  $O^i$ ;
6. si ruoti attorno all'asse  $z$  corrente di  $\beta_i$ , portando l'asse  $x$  a coincidere con l'asse  $x^i$ .

Si ottiene dunque

$${}^{i-1}T_i = \text{Trasl}(z, d_i)\text{Rot}(z, \theta_i)\text{Trasl}(x, a_i)\text{Rot}(x, \alpha_i)\text{Trasl}(z, b_i)\text{Rot}(z, \beta_i).$$

La generica trasformazione tra la terna a monte e a valle del giunto  $i$ -esimo è dunque espressa da una matrice omogenea funzione di sei parametri geometrici, di cui cinque fissi ed uno relativo alla configurazione variabile del giunto stesso, che è uso comune indicare con  $q_i$ . In particolare, si ha che

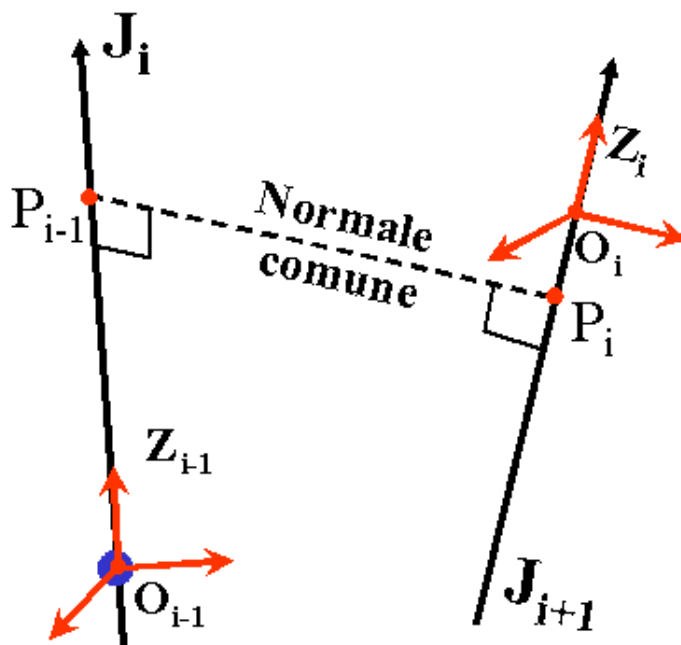


Figura 2.4: Costruzione della trasformazione intermedia tra i riferimenti di due membri consecutivi.

- per giunti rotoidali, la variabile di giunto è  $q_i = \theta_i$ ;
- per giunti prismatici, la variabile di giunto è  $q_i = d_i$ .

Una oculata scelta della origine e dell'asse  $x$  (che comporta quella dell'asse  $y$ ) del sistema di riferimento solidale al membro  $i$ -esimo può semplificare ulteriormente la descrizione della trasformazione. Scegliamo infatti:

- *Assegnazione dei sistemi di riferimento dei membri intermedi.* Per il membro  $i$ -esimo, con  $0 < i < n$ , si pone  $x^i$  lungo la normale comune agli assi  $J_i$  e  $J_{i+1}$ , e  $O^i = p^i$ . Il verso di  $x^i$  è concorde al vettore  $p_i - p_{i-1}$ , se  $J_i$  e  $J_{i+1}$  non sono incidenti, oppure è scelto arbitrariamente. Se  $J_i$  e  $J_{i+1}$  sono paralleli, si sceglie arbitrariamente una delle normali comuni.

Con questa scelta, si ottiene direttamente che le grandezze  $b_i$  e  $\beta_i$  sono identicamente nulle per ogni membro interno. Queste ultime convenzioni non si applicano al membro  $L_0$  di base né al membro terminale  $L_n$ .

Per il primo, la scelta della origine  $O^0$  e dell'asse  $x^0$  può essere fatta arbitrariamente: questa scelta non modifica direttamente la scrittura di  ${}^i T_{i-1}$ , ma è talvolta possibile con scelte opportune semplificare la descrizione dei parametri geometrici dei membri successivi.



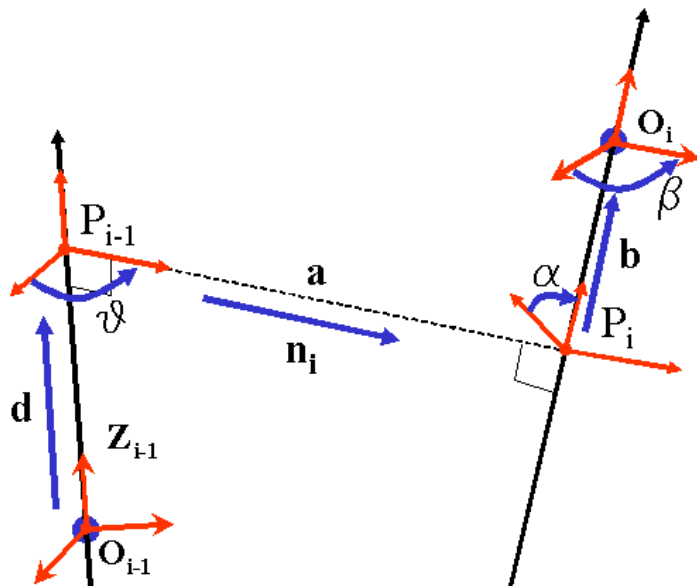


Figura 2.5: Parametri geometrici nella trasformazione intermedia  ${}^i T_{i-1}$ .

L'ultimo membro  $L_n$  della catena seriale ha sovente il ruolo particolare di organo terminale del braccio. In questo caso può essere importante descrivere esplicitamente un particolare asse solidale all'organo terminale, che diremo *asse di approccio*, e che è individuato dalla direzione  $\underline{a}^E$  e da un punto sull'asse  $\xi^E$ . Altre volte, è invece utile descrivere esplicitamente la posizione di un particolare punto dell'organo terminale, che diremo *centro dell'end-effector* e indicheremo con  $c^E$ . Nei due casi, possiamo fissare convenzioni quali le seguenti:

- *Riferimento sull'asse di approccio dell'organo terminale.* Si pone  $z^n$  sull'asse di approccio (la retta per  $\xi^E$  diretta come  $\underline{a}^E$ ). Si procede alla scelta di  $O^E$  e  $x^E$  come per i link intermedi.
- *Riferimento al centro dell'organo terminale.* Si pone  $O^n$  nel centro  $c^E$ ,  $x^n$  giacente sulla retta per  $c^E$  perpendicolare all'asse del giunto  $J_n$ , e  $z^n$  arbitrariamente nel piano perpendicolare.

In entrambe i casi, la matrice di trasformazione omogenea  ${}^{n-1}T_n$  risulta funzione di soli quattro parametri  $d_n, \theta_n, a_n, \alpha_n$ , di cui uno coincide con la variabile di giunto  $q_n$ .

## Tabelle e Matrici di Denavit Hartenberg

È utile riassumere i quattro parametri che, nelle convenzioni adottate, definiscono univocamente ogni membro, in una tabella della forma seguente:

<i>Membro</i>	<i>d</i>	$\theta$	<i>a</i>	$\alpha$
...	...	...	...	...
<i>i</i>	*	*	*	*
...	...	...	...	...

Per il membro *i*-esimo, i valori della riga corrispondente prendono denominazioni dipendenti dalla natura del giunto *i*-esimo, posto a monte. Se il giunto è rotoideale, si ha

<i>Membro</i>	<i>d</i>	$\theta$	<i>a</i>	$\alpha$
...	...	...	...	...
<i>i</i>	<i>d<sub>i</sub></i> (offset)	<i>q<sub>i</sub></i> (variabile di giunto)	<i>a<sub>i</sub></i> (lunghezza)	$\alpha_i$ (torsione)
...	...	...	...	...

Se il giunto è prismatico, si ha invece

<i>Membro</i>	<i>d</i>	$\theta$	<i>a</i>	$\alpha$
...	...	...	...	...
<i>i</i>	<i>q<sub>i</sub></i> (variabile di giunto)	$\theta_i$ (offset angolare)	<i>a<sub>i</sub></i> (lunghezza)	$\alpha_i$ (torsione)
...	...	...	...	...

Con le convenzioni adottate, si ha quindi che ciascuna matrice di trasformazione omogenea  ${}^{i-1}T_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  che appare nella catena  ${}^0T_n$  è scritta come

$$\begin{aligned}
 {}^{i-1}T_i &= \text{Trasl}(z, d_i) \text{Rot}(z, \theta_i) \text{Trasl}(x, a_i) \text{Rot}(x, \alpha_i) \\
 &= \begin{bmatrix} C_{\theta_i} & -S_{\theta_i}C_{\alpha_i} & S_{\theta_i}S_{\alpha_i} & a_iC_{\theta_i} \\ S_{\theta_i} & C_{\theta_i}C_{\alpha_i} & -C_{\theta_i}S_{\alpha_i} & a_iS_{\theta_i} \\ 0 & S_{\alpha_i} & C_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

La costruzione della matrice di trasformazione omogenea  ${}^0T_n$  a partire dalla tabella di Denavit–Hartenberg è completamente automatizzabile.

### Esempio: Braccio planare RRR

Il moto di ogni membro di un braccio con tre giunti rotoideali consecutivi ad assi paralleli è ovviamente planare. Lo schema cinematico e la scelta delle

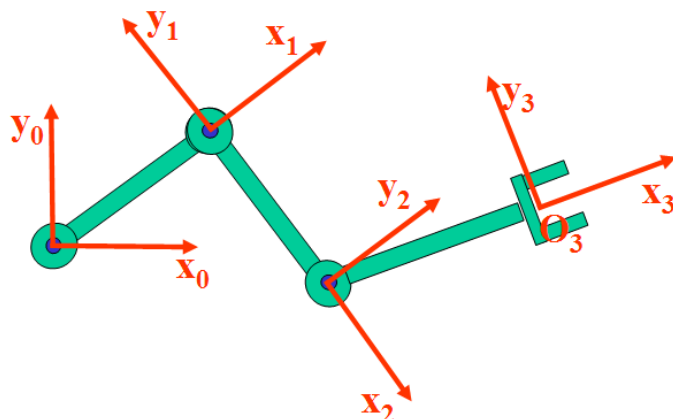


Figura 2.6: Manipolatore planare RRR

terne di riferimento è riportato in fig.2.6. Gli assi  $J_i$  dei giunti sono tutti perpendicolari al piano di figura, e determinano i corrispondenti assi  $z_{i-1}$  delle terne di membro. Poiché gli assi dei giunti sono tutti paralleli, la scelta della posizione delle origini dei sistemi di riferimento è arbitraria: è naturale centrare tutte le terne nello stesso piano, parallelo a quello di figura. La direzione di  $x^0$  non è specificata dalle convenzioni di Denavit–Hartenberg, e fissa lo zero dell’angolo del primo giunto. Poniamo  $x^0$  orizzontale e diretta verso destra nel nostro caso. Per l’end-effector, scegliamo un centro  $O_3$  come descritto in figura.

I parametri della convenzione di Denavit-Hartenberg risultano pertanto specificati nella seguente tabella:

Membro	$d_i$	$\theta_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	0	$q_1$	$l_1$	0
2	0	$q_2$	$l_2$	0
3	0	$q_3$	$l_3$	0

La matrice di trasformazione omogenea (definita precedentemente) ha la stessa struttura per tutti i membri:

$${}^{i-1}T_i(\vartheta_i) = \begin{bmatrix} C_i & -S_i & 0 & l_i C_i \\ S_i & C_i & 0 & l_i S_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad i = 1, 2, 3$$

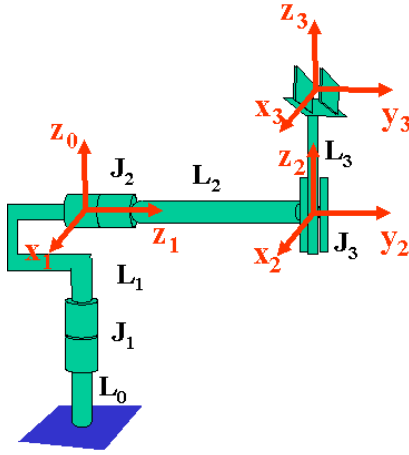
Il calcolo della funzione cinematica diretta fornisce dunque:

$${}^0T_3(q) = {}^0T_1{}^1T_2{}^2T_3 = \begin{bmatrix} C_{123} & -S_{123} & 0 & \ell_1 C_1 + \ell_2 C_{12} + \ell_3 C_{123} \\ S_{123} & C_{123} & 0 & \ell_1 S_1 + \ell_2 S_{12} + \ell_3 S_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La interpretazione del risultato è immediata: si noti ad esempio che  $p_z$  è nulla per qualsiasi  $q$ , così come il versore  ${}^0z_3 = {}^0T_3{}^3z_3$  resta invariato, in virtù del fatto che gli assi di rotazione sono tutti paralleli all'asse  $z_0$ .

### Determinazione del modello cinematico diretto per il manipolatore sferico

Si consideri il manipolatore sferico il cui schema cinematico è rappresentato nella figura seguente, dove sono evidenziate le terne solidali ai bracci.



Si noti che la terna del link zero è stata scelta con origine in corrispondenza dell'intersezione dell'asse  $J_1$  e  $J_2$ , in modo da ottenere  $d_1 = 0$ . I parametri della convenzione di Denavit-Hartenberg risultano specificati nella seguente tabella:

Braccio	$d_i$	$\vartheta_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	0	$q_1$	0	$-\frac{\pi}{2}$
2	$\ell_2$	$q_2$	0	$\frac{\pi}{2}$
3	$q_3$	0	0	0

Le matrici di trasformazione omogenea relative ai singoli giunti, risultano pari a:

$${}^0T_1(q_1) = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

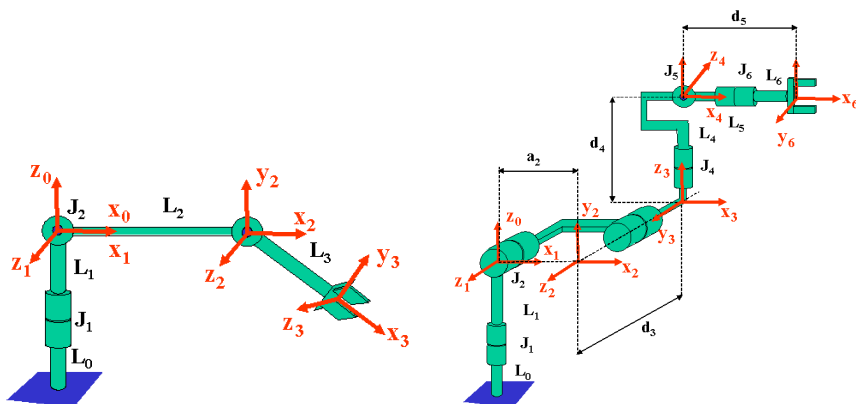


Figura 2.7: A sinistra, schema cinematico di manipolatore antropomorfo. A destra, un manipolatore PUMA 260 della Unimation.

$${}^1T_2(q_2) = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ell_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2T_3(q_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il calcolo della funzione cinematica diretta fornisce la matrice:

$${}^0T_3(q) = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 = \begin{bmatrix} C_1 C_2 & -S_1 & C_1 S_2 & C_1 S_2 q_3 - S_1 \ell_2 \\ S_1 C_2 & C_1 & S_1 S_2 & S_1 S_2 q_3 + C_1 \ell_2 \\ -S_1 & 0 & C_2 & C_2 q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Osserviamo come il terzo giunto non abbia alcuna influenza sulla matrice di rotazione. Inoltre, l'orientamento del versore  ${}^0\underline{y}_3$  è unicamente determinato dal primo giunto, poichè l'asse di rotazione del secondo giunto  ${}^0\underline{z}_1$  è sempre parallelo all'asse  ${}^0\underline{y}_3$ .

### Determinazione del modello cinematico diretto per il manipolatore antropomorfo

Si consideri il manipolatore antropomorfo il cui schema cinematico è rappresentato in figura seguente, dove sono evidenziate le terne solidali ai bracci.

Come per la struttura precedente, la terna del membro 0 è scelta con origine all'intersezione di  $J_1$  e  $J_2$ , avendo così  $d_1 = 0$ ; inoltre essendo  $J_2$  e  $J_3$

paralleli, la scelta delle origini dei riferimenti è fatta in modo da avere anche  $d_2$  e  $d_3$  nulli. Si noti che in alcune implementazioni di bracci antropomorfi, quali ad esempio il PUMA 260 della Unimation (fig. 2.7), i membri 2 e 3 e l'end effector giacciono in un piano diverso da quello di  $J_1$ , motivo per cui si introduce un offset.

I parametri della convenzione di Denavit-Hartenberg risultano specificati nella seguente tabella

<i>Braccio</i>	$d_i$	$\vartheta_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	0	$q_1$	0	$\pi/2$
2	0	$q_2$	$\ell_2$	0
3	0	$q_3$	$\ell_3$	0

Le matrici di trasformazione omogenea risultano per i singoli giunti:

$${}^0T_1(q_1) = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{i-1}T_i(q_i) = \begin{bmatrix} C_i & -S_i & 0 & \ell_i C_i \\ S_i & C_i & 0 & \ell_i S_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad i = 2, 3$$

Il calcolo della funzione cinematica diretta secondo la (2.45) fornisce:

$${}^0T_3(q) = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 = \begin{bmatrix} C_1 C_{23} & -C_1 S_{23} & S_1 & C_1(\ell_2 C_2 + \ell_3 C_{23}) \\ S_1 C_{23} & -S_1 S_{23} & -C_1 & S_1(\ell_2 C_2 + \ell_3 C_{23}) \\ S_{23} & C_{23} & 0 & \ell_2 S_2 + \ell_3 S_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

### Determinazione del modello cinematico diretto per il polso sferico

Si consideri un tipo di struttura cinematica particolarmente importante e diffusa, costituente i cosiddetti “polsi sferici”



Il calcolo della funzione cinematica diretta fornisce

$${}^3T_6(q) = {}^3T_4{}^4T_5{}^5T_6 = \begin{bmatrix} C_4C_5C_6 - S_4S_6 & -C_4C_5S_6 - S_4C_6 & C_4S_5 & C_4S_5l_6 \\ S_4C_5C_6 + C_4S_6 & -S_4C_5S_6 + C_4C_6 & S_4S_5 & S_4S_5l_6 \\ -S_5C_6 & S_5C_6 & C_5 & C_5l_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si noti che, a seguito della scelta fatta per le terne di coordinate, la matrice  ${}^3R_6$  che si può estrarre dalla  ${}^3T_6$  coincide con la matrice di rotazione degli angoli di Eulero (2.18) precedentemente ricavata, ovvero  $q_4, q_5, q_6$  costituiscono l'insieme di angoli di Eulero ZYZ rispetto alla terna di riferimento  $(O_3, {}^0x_3, {}^0y_3, {}^0z_3)$ . Inoltre i versori della terna 6 rappresentano versori di una possibile terna utensile secondo la Figura precedente.



# Capitolo 3

## Cinematica Differenziale

### 3.1 Cinematica differenziale del corpo rigido

Pensiamo adesso ad un corpo rigido in moto nello spazio. Siano  $m(t)$  e  $R(t)$  la posizione della origine e la orientazione di un sistema di riferimento solidale al corpo al tempo  $t$ , e si suppongano queste funzioni differenziabili con continuità. La posizione di un punto  $p$  appartenente al corpo è descritta istante per istante da

$$p(t) = g_{(R,m)}(p) = m(t) + R(t)p_0.$$

Differenziando rispetto al tempo si ottiene

$$\frac{d}{dt}p(t) = v_p = v_m + \dot{R}(t)p_0,$$

dove  $v_m = \dot{m}(t)$ . Si osserva in questa espressione che la derivata della posizione del punto  $p(t)$  è un vettore<sup>1</sup>.

• La derivata di una matrice di rotazione  $R(t) \in SO(3)$ , che ovviamente non è un elemento dello stesso gruppo, rappresenta un oggetto nuovo. Per caratterizzarlo, si consideri la relazione  $R(t)R^T(t) \equiv I$  e la si derivi rispetto al tempo:

$$\dot{R}(t)R^T(t) + R(t)\dot{R}^T(t) \equiv 0.$$

Si osserva dunque che la matrice  $\dot{R}R^T$  è antisimmetrica.

• Si può porre pertanto

$$\dot{R}(t)R^T(t) = -\left(\dot{R}(t)R^T(t)\right)^T = \hat{\omega}(t)$$

---

<sup>1</sup>Per convincersene è sufficiente guardare alla derivata come al limite del rapporto incrementale  $v_p = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{p(t+\delta t) - p(t)}{\delta t}$  dove appare una differenza tra punti, cioè un vettore.

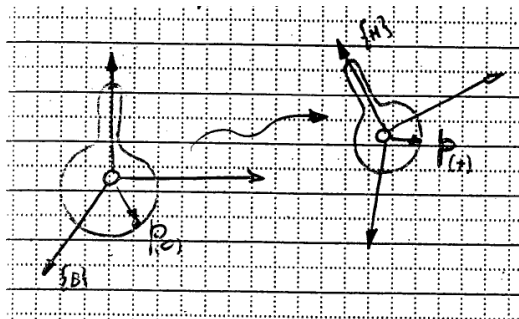


Figura 3.1: Moto di un corpo rigido descritto dalla posizione di un suo punto  $m(t)$  e dalla sua orientazione  $R(t)$

Il vettore  $\omega(t)$  che può essere ottenuto da questa matrice antisimmetrica verrà detto *velocità angolare* del corpo rigido.

• **Esempio.** Si consideri un moto di rotazione attorno all'asse  $z$  a velocità costante pari ad  $\alpha$ , descritto da

$$R(t) = Rot(z, \alpha t) = \begin{bmatrix} C_\alpha & -S_\alpha & 0 \\ S_\alpha & C_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \dot{R}(t) = \alpha \begin{bmatrix} -S_\alpha & -C_\alpha & 0 \\ C_\alpha & -S_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si osserva facilmente che

$$\dot{R}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\alpha & -S_\alpha & 0 \\ S_\alpha & C_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \hat{\omega} R(t)$$

da cui la velocità angolare

$$\omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

• La velocità del punto  $p(t)$  diviene quindi

$$v_p(t) = v_m + \hat{\omega} R(t) p_0 = v_m + \hat{\omega} (p(t) - m(t)) = v_m + \hat{\omega} {}_m p(t) \quad (3.1)$$

dove  ${}_m p(t)$  indica il vettore che unisce l'origine del riferimento mobile al punto  $p(t)$ .

• Si deve notare che la velocità angolare non è stata definita come derivata di una grandezza angolare - anche se nel caso particolare dell'esempio visto di rotazione attorno ad un asse fisso essa veniva a coincidere con la derivata dell'angolo descritto nel tempo. Nel caso generale, comunque, non esiste

alcuna grandezza fisicamente significativa legata all'integrale della velocità angolare.

Per illustrare questo fatto, basterà considerare gli effetti su un corpo rigido di due azioni così descritte:

1. Si ponga il corpo in rotazione con velocità di  $\pi/2$  radianti secondo attorno all'asse  $x$  per  $0 < t \leq 1$ . Si applichi poi una velocità angolare della stessa intensità attorno all'asse  $y$  per  $1 < t \leq 2$ .
2. Si applichino al corpo le stesse velocità angolari per le stesse durate temporali, ma in ordine invertito

Nonostante che l'integrale delle velocità angolari sia identico nei due casi ( $\int_0^2 \omega dt = [\pi/2, \pi/2, 0]^T$ ), il risultato fisico delle due operazioni è radicalmente diverso.

• Si consideri di nuovo il moto del corpo rigido di fig. 3.1. Come si è visto, per descrivere completamente la velocità di un qualsiasi punto del corpo, è sufficiente dare la velocità di uno dei suoi punti e la sua velocità angolare. È naturale pertanto introdurre una scrittura che raccoglie queste informazioni in una unica variabile, che sarà detta *velocità generalizzata* e che indicheremo con

$$\xi_m = \begin{bmatrix} v_m \\ \omega \end{bmatrix}$$

• La velocità generalizzata è caratteristica di un particolare punto del corpo. Nota che sia la velocità generalizzata di un punto, è facile esprimere la velocità generalizzata di un qualsiasi altro punto:

$$\xi_p = \begin{bmatrix} v_p \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & -m\hat{p} \\ 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_m \\ \omega \end{bmatrix} = M_{p,m}\xi_m. \quad (3.2)$$

La relazione tra velocità generalizzate in punti diversi dello stesso corpo rigido in moto è dunque lineare.

• Si osservi che la velocità generalizzata è una grandezza vettoriale formata da componenti fisicamente disomogenee (velocità lineari e angolari). Questo comporta che non abbia senso fisico definire un “prodotto interno” tra velocità generalizzate (lo scalare  $\xi_a^T \xi_b$  sarebbe infatti la somma di grandezza disomogenee). Di conseguenza, non sono definiti né il concetto di angolo né di ortogonalità tra velocità generalizzate, e neppure ha senso parlare di una norma per queste grandezze. Vedremo più avanti come si possono definire concetti analoghi a questi ma con un preciso senso fisico.

• Il generale atto di moto di un corpo rigido è quindi rappresentabile con la velocità generalizzata di un suo qualsiasi punto. Al variare del punto

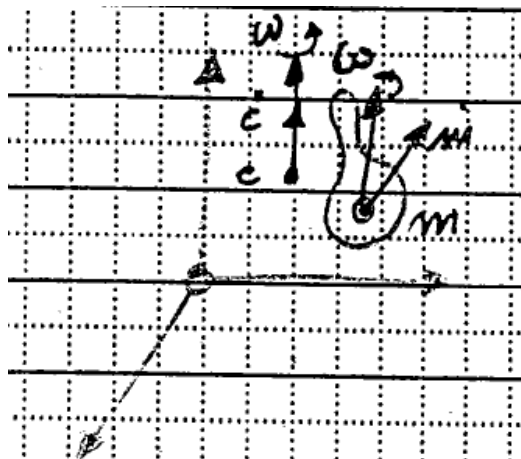


Figura 3.2: L'atto di moto generale di un corpo rigido equivale ad una roto-traslazione attorno all'asse del Mozzi

considerato, ci chiediamo se esiste un punto  $c$  tale che la velocità generalizzata abbia velocità di traslazione  $\dot{c}$  allineata alla velocità angolare  $\omega$ , cioè tale che  $\dot{c} = \alpha\omega$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

• Per trovare un tale punto dobbiamo risolvere in  $c$  la equazione che si ottiene dalla (3.1)

$$\dot{c} - v_m = \alpha\omega - v_m = \omega \wedge {}_m c$$

Ponendo  ${}_m c = {}_m c_{\perp} + {}_m c_{\parallel}$ , dove  ${}_m c_{\perp}$  è perpendicolare ad  $\omega$  e  ${}_m c_{\parallel}$  è parallelo a  $\omega$ , moltiplicando entrambe i termini della equazione per  $\hat{\omega}$  e tenendo conto delle regole del prodotto vettoriale, si ha

$${}_m c_{\perp} = \frac{v_m \wedge \omega}{\|\omega\|^2}$$

mentre  ${}_m c_{\parallel}$  rimane indeterminato. Quindi, tutti i punti della retta parallela ad  $\omega$  e passante per

$$c = m + \frac{v_m \wedge \omega}{\|\omega\|^2}$$

sono soluzioni del problema posto, cioè tali per cui la velocità di traslazione è allineata all'asse istantaneo di rotazione. L'atto di moto istantaneo è quindi elicoidale attorno a quell'asse, con passo dell'elica pari ad  $\alpha$ .

### 3.2 Statica del corpo rigido

Si consideri un corpo rigido ed un insieme di forze  $F_i$  applicate a punti  $p_i$  del corpo stesso. La forza risultante  $F$  ed il momento risultante  $M_o$  rispetto ad

un punto  $o$  per un sistema di forze sono definiti da

$$\begin{aligned}\sum_i F_i &= F \\ \sum_i {}_o p_i \wedge F_i &= M_o.\end{aligned}$$

Il corpo è detto in equilibrio se il sistema di tutte le forze applicate ai suoi punti ha le proprietà

$$\begin{aligned}\sum_i F_i \stackrel{def}{=} F &= 0 \\ \sum_i {}_o p_i \wedge F_i \stackrel{def}{=} M_o &= 0,\end{aligned}\tag{3.3}$$

cioè se la risultante  $F$  ed il momento risultante  $M_o$  (rispetto ad un punto  $o$ ) del sistema sono entrambe nulli.

• Si noti che se le equazioni di equilibrio (3.3) valgono rispetto ad un punto  $o$ , esse valgono anche rispetto qualsiasi altro punto  $o'$ : infatti si ha

$$M_{o'} = \sum_i {}_{o'} p_i \wedge F_i = \sum_i {}_{o'} o \wedge F_i + \sum_i {}_o p_i \wedge F_i = {}_{o'} o \wedge \left( \sum_i F_i \right) + M_o = 0.$$

• Due sistemi di forze si dicono equivalenti se hanno la stessa risultante e lo stesso momento risultante rispetto ad un punto. Se due sistemi sono equivalenti rispetto ad un punto, lo sono anche rispetto a qualsiasi altro punto.

• È conveniente introdurre una scrittura che raccoglie le informazioni su forze e momenti risultanti in una unica variabile, che sarà detta *forza generalizzata* e che indicheremo con

$$w_o = \begin{bmatrix} F \\ M_o \end{bmatrix}$$

• Nota la forza generalizzata equivalente ad sistema di forze  $(F_i, p_i)$  rispetto ad un punto  $p$ , la stessa grandezza può essere espressa con facilità rispetto ad un qualsiasi altro punto  $m$ . Si ha infatti che la risultante è invariante col punto, mentre per il momento vale

$$M_m = \sum_i {}_m p_i \wedge F_i = \sum_i {}_m p \wedge F_i + \sum_i {}_p p_i \wedge F_i = {}_m p \wedge \left( \sum_i F_i \right) + M_p = {}_m p \wedge F + M_p$$

Si può quindi scrivere

$$w_m = \begin{bmatrix} F \\ M_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ {}_m \hat{p} & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ M_p \end{bmatrix} = W_{m,p} w_p.\tag{3.4}$$

La relazione tra forze generalizzate in punti diversi dello stesso corpo rigido in moto è dunque lineare.

Analogamente a quanto visto per le velocità generalizzate, dato un sistema di forze su un corpo rigido equivalente ad una forza  $F$  applicata in un punto  $m$  ed un momento  $M_m$ , è sempre possibile individuare un sistema equivalente costituito da una forza applicata in un punto tale che il momento sia parallelo a  $F$ . Il luogo di tali punti è descritto da una retta parallela ad  $F$  e passante per il punto

$$c = m + \frac{M_m \wedge F}{\|F\|^2}.$$

- Anche le forze generalizzate, come le velocità generalizzate, sono formate da componenti fisicamente disomogenee (forze e momenti), e non sono definiti i prodotti interni tra forze generalizzate.

- Sono però ben definiti i prodotti tra forze e velocità generalizzate. Infatti il prodotto

$$\langle w_m, \xi_m \rangle = w_m^T \xi_m = \xi_m^T w_m = F^T v_m + M_m^T \omega$$

è fisicamente ben posto, ed il risultato ha significato di potenza meccanica svolta dalla forza  $w_m$  in corrispondenza alla velocità  $\xi_m$ . Quando tale potenza è nulla,  $\langle w_m, \xi_m \rangle = 0$ , la forza  $w_m$  e la velocità  $\xi_m$  si dicono *complementari*.

### 3.2.1 Dualità Cineto-Statica

Nelle relazioni trovate nella cinematica e nella statica del corpo rigido, qui riassunte

$$\begin{aligned} \xi_p &= M_{p,m} \xi_m, \\ w_m &= W_{m,p} w_p, \end{aligned}$$

si osserva che

$$M_{p,m} = \begin{bmatrix} I_3 & -{}_m\hat{p} \\ 0 & I_3 \end{bmatrix} = W_{p,m}^T = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ {}_m\hat{p} & I_3 \end{bmatrix}^T.$$

- Ne segue che

$$\langle w_m, \xi_m \rangle = w_p^T W_{m,p}^T \xi_m = \xi_m^T M_{p,m} w_p = \langle w_p, \xi_p \rangle.$$

In altri termini, la potenza espressa da forze generalizzate equivalenti applicate a punti diversi di un corpo rigido in corrispondenza delle relative velocità generalizzate, è la stessa.

### 3.3 Cinematica differenziale delle catene aperte

La cinematica differenziale delle catene aperte studia la relazione tra le velocità delle variabili di giunto della catena e quelle dell'organo terminale - ovvero tra le velocità nello spazio delle configurazioni e quelle dello spazio operativo.

Sia  $T(q)$  la trasformata omogenea che descrive la postura dell'organo terminale, come calcolata con le tecniche viste per la descrizione della cinematica diretta delle catene aperte

$${}^0T_E(q) = \begin{bmatrix} R(q) & p(q) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#### 3.3.1 Caratterizzazione analitica e matrici jacobiane

La velocità di traslazione dell'organo terminale in funzione delle velocità dei giunti può essere ottenuta direttamente nella forma

$$\frac{d}{dt}p(q) = \frac{\partial p(q)}{\partial q} \dot{q},$$

che riscriviamo, introducendo il simbolo  $J_p(q) = \frac{\partial p(q)}{\partial q}$  per la matrice Jacobiana della funzione posizione, nella forma

$$v_p = J_p(q) \dot{q}$$

Una espressione analitica analoga per la parte di orientazione può essere ottenuta solo se per la orientazione si utilizza una rappresentazione minima  $\Phi(q)$  (ricavandola ad esempio dalla  $R(q)$  mediante le formule di inversione relative alla parametrizzazione scelta). In questo modo si introduce una matrice Jacobiana di orientazione  $J_{A,O}(q) = \frac{\partial \Phi(q)}{\partial q}$  che verrà detta *analitica*:

$$\dot{\Phi}(q) = J_{A,O}(q) \dot{q}.$$

#### 3.3.2 Caratterizzazione cinematica

- Le derivate delle variabili di rappresentazioni minime non sono peraltro di interpretazione intuitiva e hanno limitata utilità. È utile trovare una espressione che permetta piuttosto di esprimere la velocità angolare dell'organo terminale in termini delle velocità dei giunti.

Dalla relazione  $\dot{R}(q) = \hat{\omega}R(q)$  si ha facilmente

$$\hat{\omega} = \dot{R}(q)R(q) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial R(q)}{\partial q_k} R(q) \dot{q}_k$$

Definiamo  $\widehat{J}_{\omega,k} = \frac{\partial R}{\partial q_k} R$ , ed estraiamo  $J_{\omega,k} = \left(\frac{\partial R}{\partial q_k} R\right)^\vee$ . Possiamo scrivere

$$\omega = \sum_{k=1}^n J_{\omega,k} \dot{q}_k = \left[ J_{\omega,1} \mid J_{\omega,2} \mid \cdots \mid J_{\omega,n} \right] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \stackrel{def}{=} J_\omega \dot{q}.$$

- Se ne deduce che la relazione cercata tra le velocità di giunto e le velocità angolari del membro di riferimento nella catena è lineare:  $\omega = J_\omega(q)\dot{q}$ . La matrice  $J_\omega(q)$  è detta anch'essa (per estensione) Jacobiana.

### 3.3.3 Caratterizzazione geometrica

Dalla caratterizzazione cinematica sappiamo che la funzione che lega  $\omega$  a  $\dot{q}$  è lineare, e che quindi vale per essa la sovrapposizione degli effetti. Altrettanto è vero, ovviamente, per le velocità di traslazione.

Possiamo quindi procedere a calcolare l'effetto che la velocità di ciascun giunto ha su quelle del membro di riferimento separatamente, supponendo fermi gli altri. Considerando ad esempio il giunto  $i$ -esimo (vedi fig. 3.3), poniamo  $\dot{q}_j = 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $j \neq i$ . La catena si riduce ad un solo corpo rigido, che ruota o trasla (a seconda che il giunto  $i$  sia rotoidale o prismatico) lungo l'asse del giunto - che, nella notazione di Denavit Hartenberg, coincide con l'asse  $z_{i-1}$  del sistema solidale al link precedente. Per calcolare la velocità generalizzata del corpo rigido a valle del giunto nel punto  $p$  dell'organo di riferimento, applichiamo la (3.2) alla espressione della velocità generalizzata di un punto  $m$  che appartiene all'asse del giunto stesso. Essendo

$$\xi_m = \begin{bmatrix} v_m \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_i, & \text{giunto } i \text{ prismatico,} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ z_{i-1} \end{bmatrix} \dot{q}_i, & \text{giunto } i \text{ rotoidale,} \end{cases}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \xi_p = \begin{bmatrix} v_p \\ \omega \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_3 & -{}_m\widehat{P} \\ 0 & I_3 \end{bmatrix} \xi_m \\ &= \begin{cases} \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_i & \text{giunto } i \text{ prismatico,} \\ \begin{bmatrix} -{}_m\widehat{P} z_{i-1} \\ z_{i-1} \end{bmatrix} \dot{q}_i, & \text{giunto } i \text{ rotoidale,} \end{cases} \end{aligned}$$



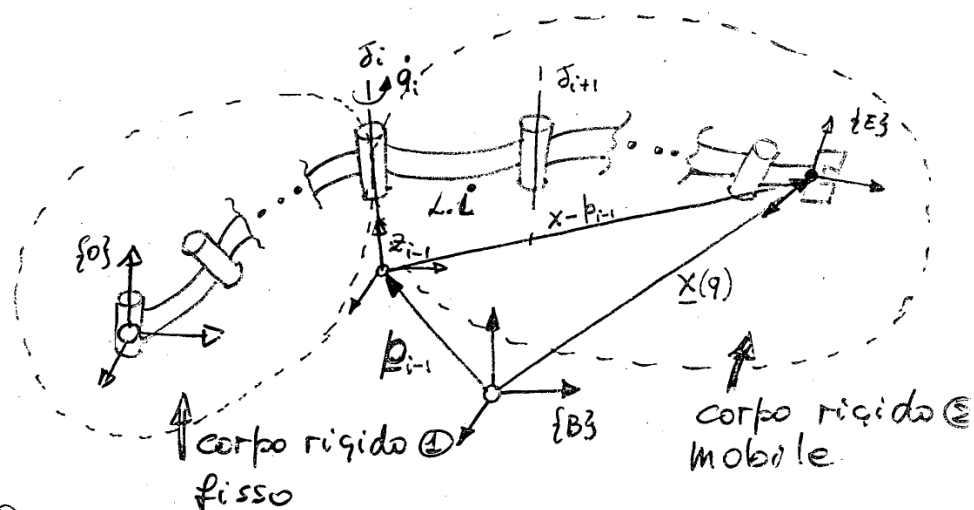


Figura 3.3: Caratterizzazione geometrica del Jacobiano di una catena seriale

Tutti i dati necessari a calcolare le colonne delle matrici Jacobiane ricavate da queste espressioni possono essere facilmente ricavate dalle espressioni della cinematica diretta della catena. Infatti, si noti che l'espressione in coordinate di base del versore di  $z_{i-1}$  si ottiene facilmente dalla terza colonna della matrice di rotazione nella trasformata omogenea

$${}^0T_{i-1}(q) = {}^0T_1(q_1) {}^1T_2(q_2) \cdots {}^{i-2}T_{i-1}(q_{i-1}).$$

Inoltre, scegliendo il punto  $m$  nell'origine  $p_{i-1}$  del sistema solidale al membro, il vettore  ${}_{p_{i-1}}p = p - p_{i-1}$  è ottenuto sottraendo i termini posizionali della  ${}^0T_E(q)$  e della  ${}^0T_{i-1}(q)$ . Si ha in conclusione

$$J_{p,i} = \begin{cases} z_{i-1}, & \text{giunto } i \text{ prismatico,} \\ \hat{z}_{i-1} {}_{p_{i-1}}p, & \text{giunto } i \text{ rotoidale} \end{cases}$$

e

$$J_{\omega,i} = \begin{cases} 0 & \text{giunto } i \text{ prismatico,} \\ z_{i-1}, & \text{giunto } i \text{ rotoidale,} \end{cases}$$

### 3.3.4 Caratterizzazione statica

Si pensi adesso ad una catena aperta sottoposta ad una forza generalizzata  $w_p$  applicata al punto  $p$  del membro di riferimento. Si desidera conoscere quali forze e coppie debbano esercitare gli attuatori dei giunti per equilibrare il sistema.

Utilizzando la (3.4) è immediato calcolare la forza generalizzata equivalente a  $w_p$  applicata nel punto  $p_{i-1}$  del generico giunto

$$w_{p_{i-1}} = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ p_{i-1}\hat{p} & I_3 \end{bmatrix} w_p.$$

- Se il giunto  $i$  è prismatico, il suo attuatore dovrà sopportare una forza  $\tau_i$  pari alla componente allineata con l'asse  $z_{i-1}$  del giunto stesso. Se invece è rotoidale, la coppia  $\tau_i$  da resistere sarà pari alla componente lungo  $z_{i-1}$  del momento risultante. Si avrà quindi

$$\tau_i = \begin{cases} \begin{bmatrix} z_{i-1}^T & 0 \end{bmatrix} w_{p_{i-1}} & \text{giunto } i \text{ prismatico,} \\ \begin{bmatrix} 0 & z_{i-1}^T \end{bmatrix} w_{p_{i-1}} & \text{giunto } i \text{ rotoidale} \end{cases}$$

- In condizione di equilibrio statico, si può quindi scrivere una relazione lineare tra le forze generalizzate applicate dall'esterno sul membro di riferimento e le azioni degli attuatori ai giunti:

$$\tau = Aw_p$$

dove la riga  $i$ -esima della matrice  $A$  vale

$$A_i = \begin{cases} \begin{bmatrix} z_{i-1}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ p_{i-1}\hat{p} & I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{i-1}^T & 0 \end{bmatrix} & \text{giunto } i \text{ prismatico,} \\ \begin{bmatrix} 0 & z_{i-1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ p_{i-1}\hat{p} & I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{i-1}^T p_{i-1}\hat{p} & z_{i-1}^T \end{bmatrix} & \text{giunto } i \text{ rotoidale} \end{cases}$$

- È immediato osservare che per la matrice così ottenuta vale  $A = J^T$ . Tanto si poteva anticipare anche sulla base della dualità cineto-statica vista in precedenza, e fornisce una caratterizzazione statica della matrice Jacobiana di una catena seriale:

$$\tau = J^T w_p$$

Si osservi che in questa relazione le forze/coppie ai giunti  $\tau$  sono da intendersi come applicate dai membri della catena sugli attuatori, mentre le forze generalizzate  $w_p$  sono esercitate dall'esterno sul membro di riferimento della catena.

# Capitolo 4

## Manipolatori con catene cinematiche chiuse

Molti sistemi robotici di natura sia industriale che di servizio utilizzano catene cinematiche chiuse, cioè costituite da una o più catene seriali di membri e giunti, vincolate tra loro e/o al telaio fisso.

Alcuni esempi (vedi fig. 4.1:

- Manipolatori paralleli, quali le piattaforme di Gough-Stewart o Delta;
- Manipolatori con struttura ibrida, seriale-parallela (quali le strutture spesso incontrate ad esempio nei bracci sollevatori idraulici);
- Bracci seriali cooperanti nell'afferraggio e manipolazione di un oggetto comune;
- Mani per robot, con più dita in presa sullo stesso oggetto;
- Veicoli su gambe, con più gambe in appoggio al suolo;
- Bracci con sostegno, come nel caso del braccio Canadarm per applicazioni spaziali;

I meccanismi in catena chiusa hanno due caratteristiche specifiche:

- le configurazioni dei giunti non sono indipendenti le une dalle altre, ma devono soddisfare relazioni tra i loro valori che esprimono i vincoli di chiusura della catena;
- tipicamente, non tutti i giunti sono attuati, né tutti sono dotati di sensori.

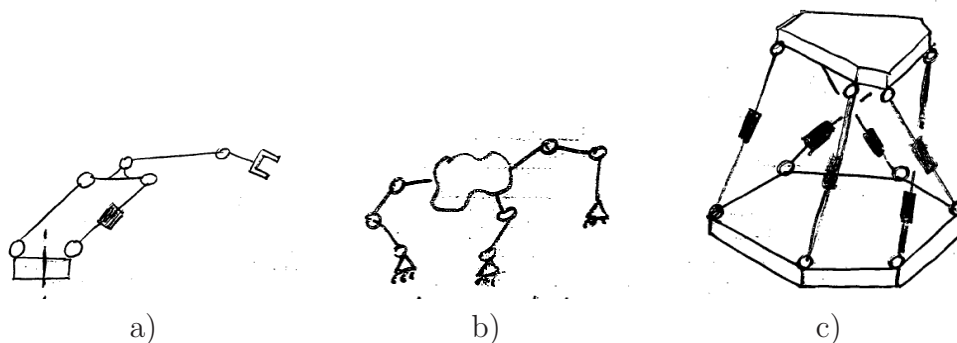


Figura 4.1: Tre esempi di catene cinematiche chiuse: a) braccio ibrido, b) mano robotica, c) manipolatore parallelo.

Diremo *variabile di configurazione*, o brevemente *configurazione* di un sistema meccanico di corpi rigidi una  $n$ -upla  $q$  di grandezze sufficienti ad individuare univocamente la posizione e orientazione di tutti i corpi che lo compongono – e quindi a determinare la posizione di qualsiasi punto materiale del meccanismo.

Una configurazione si dice *minima* se non esiste alcun insieme composto da un numero inferiore di grandezze scalari che sia una configurazione. Il numero  $m$  di variabili strettamente necessario a determinare le posizioni del sistema si dice numero di configurazioni indipendenti. L'insieme dei valori ammissibili per le variabili di configurazione è dunque un sottoinsieme di uno spazio delle configurazioni  $m$ -dimensionale

Detto  $b$  il numero di corpi rigidi nel sistema,  $r$  il numero di giunti rotoidali,  $p$  il numero di giunti prismatici, e  $s$  il numero di giunti sferici nel sistema, il valore di  $m$  in un meccanismo può essere facilmente valutato con le formule (di Grübler)

$$\begin{cases} m \geq 3b - 2(p + r), & \text{ sistemi in 2D} \\ m \geq 6b - 5(p + r) - 3s, & \text{ sistemi in 3D.} \end{cases}$$

Queste relazioni valgono con il segno di uguaglianza in configurazioni generiche, cioè *per quasi tutte* le possibili configurazioni di un sistema, ove si eccettuano configurazioni appartenenti a sottoinsiemi a misura nulla nello spazio delle configurazioni.

- Nella maggioranza dei casi, per motivi di economia, i meccanismi hanno un numero di giunti attuati  $n_a$  e un numero di giunti sensorizzati  $n_s$  entrambe pari a  $m$ . Quando si abbia  $n_a > m$  si ha ridondanza di attuazione; se  $n_a < m$  il sistema si dice sotto-attuato (analoghe definizioni valgono per i sensori).

## 4.1 Geometria delle catene chiuse

• Per semplicità, supporremo nel seguito che la catena chiusa sia semplice, nel senso che, rimuovendo un solo corpo rigido dalla struttura, il sistema possa essere ridotto ad un insieme di  $N$  catene cinematiche seriali aperte, talvolta indicate come “gambe” o anche “dita” del manipolatore. Individuiamo questo particolare membro come organo terminale, o *piattaforma*, del quale indichiamo con  $x \in SE(3)$  la postura.

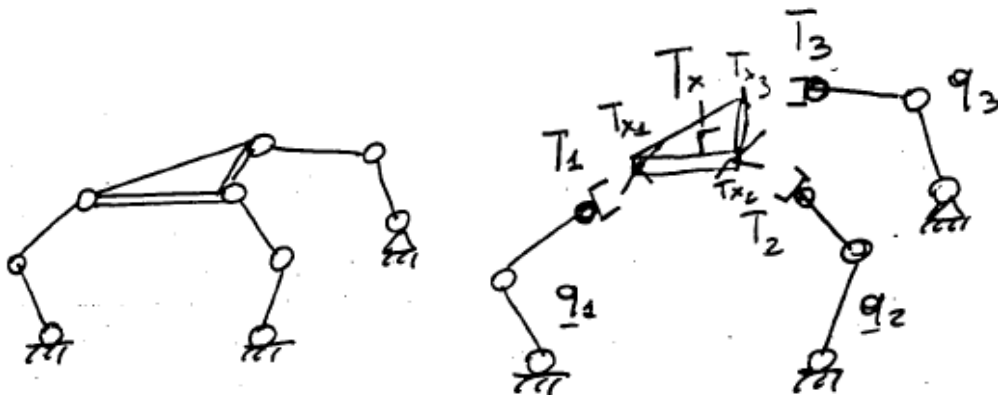


Figura 4.2: Un manipolatore in catena chiusa semplice (a sinistra) in cui si immaginano rimossi i vincoli della piattaforma (a destra).

• Scegliamo invece come rappresentazione delle configurazioni del sistema la  $n$ -upla  $q \in Q$  di valori delle coordinate di giunto (angoli per giunti R e allungamenti per giunti P, rispettivamente).

• Supponiamo dunque di aprire la catena chiusa effettuando “tagli” che rimuovono i vincoli tra le gambe e la piattaforma (vedi fig. 4.2). Associamo a ciascuna gamba divenuta così una catena aperta una relazione cinematica diretta tra le variabili di giunto ed un sistema di riferimento sul membro estremo della catena stessa, descritta ad esempio per la  $i$ -esima gamba dalla trasformata (rispetto ad un opportuno sistema di riferimento)

$$T_i(q) = \left[ \begin{array}{c|c} R_i(q) & p_i(q) \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right].$$

• Associamo inoltre alla postura  $x \in SE(3)$  dell’organo terminale la trasformata che la descrive nello stesso riferimento, ovvero

$$T_E(x) = \left[ \begin{array}{c|c} R_E(x) & p_E(x) \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right].$$

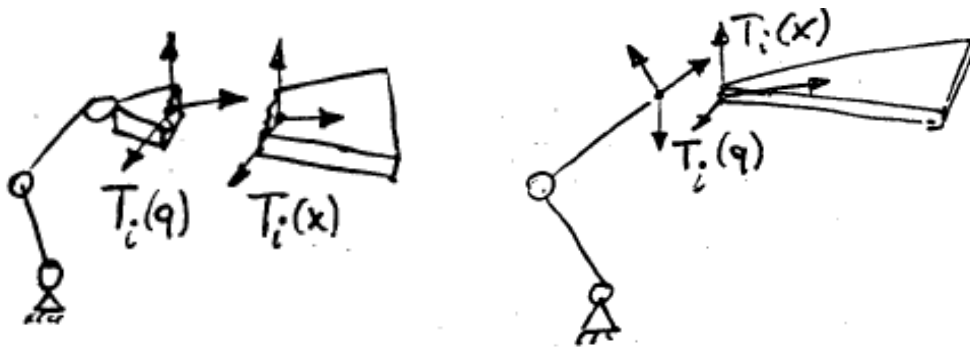


Figura 4.3: Diversi modi di tagliare le catene chiuse

Sulla piattaforma, siano  $T_i^E$ ,  $i = 1, \dots, N$  le trasformate costanti che esprimono la trasformazione rigida tra la terna di riferimento della piattaforma e le terne poste sulla piattaforma nelle posizioni e con le orientazioni corrispondenti a quelle degli organi terminali delle  $N$  gambe. Abbiamo dunque che  $T_i(x) = T_E(x)T_i^E$  descrive la terna sul taglio, come appartenente alla piattaforma.

- I vincoli che sono stati rimossi col taglio vengono reintrodotti uguagliando le opportune componenti di  $T_i(q)$  e  $T_i(x)$ . Ad esempio, nel caso in cui il taglio abbia rimosso un vincolo di solidarietà tra due parti dello stesso corpo rigido, questo viene ripristinato imponendo

$$T_i(q) = T_i(x),$$

ovvero almeno 6 relazioni indipendenti estratte da questa equazione matriciale.

- Se invece il taglio è stato operato in corrispondenza di un giunto, si opererà come segue:

- su un giunto sferico, si dovrà imporre il solo vincolo  $p_i(q) = p_i(x)$  (tre equazioni scalari);
- su un giunto rotoidale, si imporrà oltre alla eguaglianza tra le posizioni dei centri dei giunti anche la eguaglianza degli assi del giunto, ad esempio imponendo  $z_i(q) = z_i(x)$  (due equazioni scalari indipendenti);
- su un giunto prismatico, si imporrà l'uguaglianza delle orientazioni  $R_i(q) = R_i(x)$  (tre equazioni scalari indipendenti) e l'uguaglianza della proiezione del centro delle terne nel piano ortogonale all'asse del giunto  $((p_i(q) - p_i(x))^T x_i = (p_i(q) - p_i(x))^T y_i = 0)$ .

### 4.1.1 Cinematica diretta e inversa

- Il problema geometrico diretto per i sistemi in catena chiusa ha la formulazione vista in precedenza ((2.1))

$$\begin{aligned}\Lambda : Q_S &\rightarrow SE(3) \\ q_S &\mapsto \Lambda(q) = x \in SE(3)\end{aligned}$$

dove  $Q_S$  è l'insieme dei valori che possono assumere le configurazioni dei giunti sensorizzati.

- Nel caso in cui fosse  $Q_S = Q$ , cioè se si disponesse di sensori in ogni giunto, o anche nel caso in cui una delle gambe avesse tutti i suoi giunti sensorizzati, il problema cinematico diretto si esaurirebbe nello scrivere la cinematica diretta  $T_i(q)$  della gamba per poi ricavare  $T_E(q_S) = T_i(q)T_1^{E-1}$ .

- Nel caso praticamente frequente in cui nessuna delle gambe del sistema sia completamente sensorizzata, il problema cinematico diretto è invece in generale assai difficile. Per trovare la postura incognita della piattaforma è infatti necessario determinare i valori dei giunti non sensorizzati, il che può essere fatto a partire dalle misure disponibili e dalle equazioni di vincolo che le legano. Questo significa risolvere un sistema di equazioni che (per il caso di tagli di vincoli di solidarietà) si scrive

$$T_i(q_S, q_{\bar{S}}) - T_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.1)$$

- Il sistema (4.1) rappresenta un sistema di  $6N$  equazioni nonlineari indipendenti nelle  $6 + n - n_S$  incognite della postura della piattaforma  $x$  e delle variabili non misurabili  $q_{\bar{S}}$ . La natura di queste equazioni è trigonometrica, similmente a quelle incontrate nella soluzione della cinematica inversa dei manipolatori seriali. Come per quelle, non esistono metodi di soluzione generali, né sfortunatamente in questo caso sono disponibili semplificazioni geometriche di applicabilità così vasta come quelle del metodo di Pieper.

- Il problema cinematico inverso

$$\begin{aligned}\bar{\Lambda} : SE(3) &\rightarrow Q_A \\ x &\mapsto \bar{\Lambda}(x) = q \in Q_A\end{aligned}$$

per un manipolatore in catena chiusa è equivalente a  $N$  problemi cinematici inversi per le  $N$  gambe: data la postura dell'end-effector  $T_E(x)$ , è determinata anche quella del sistema di riferimento terminale di ogni gamba  $T_i(x) = T_i(q_A, q_{\bar{A}})$ , dalla quale è possibile ricavare i valori di tutti i giunti se si conosce la soluzione della cinematica inversa delle gambe. Poiché tipicamente le gambe sono meccanismi seriali semplici, la cinematica inversa di un manipolatore parallelo è tipicamente di facile soluzione.

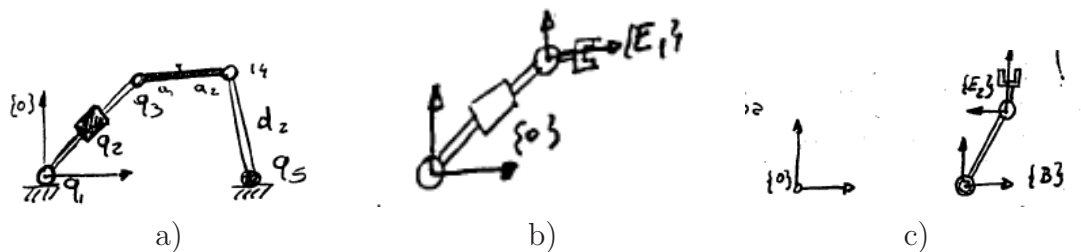


Figura 4.4: Esempio di catena chiusa planare (a) e sottosistemi aperti (b, c) ottenuti con i tagli.

#### 4.1.2 Esempio: Catena chiusa planare RPRRR

Si consideri il meccanismo piano in catena chiusa di figura, costituito da 4 membri rigidi, quattro giunti rotoidali e un prismatico in configurazione RPRRR. Si sceglie di rappresentare tutte le grandezze in un riferimento di base con asse  $z$  perpendicolare al foglio,  $x$  orizzontale e origine coincidente col centro del primo giunto.

- La formula di Grübler risulta  $m \geq 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 2$ . Si pensano sia sensorizzati che attuati il giunto prismatico e l'ultimo giunto rotoidale,  $q_S = (q_2, q_5)$ .
- Consideriamo come piattaforma il terzo membro, ed immaginiamo di tagliare la catena in corrispondenza degli estremi della piattaforma.
- La prima delle due catene rimaste aperte è costituita da una serie RPR, la cui cinematica diretta è semplicemente ottenuta (usando per compattezza le trasformate omogenee in 2D)

$$\begin{aligned}
 T_1(q) &= Rot(z, q_1) Trasl(x, q_2) Rot(z, q_3) \\
 &= \left[ \begin{array}{cc|c} C_{13} & -S_{13} & q_2 C_1 \\ S_{13} & C_{13} & q_2 S_1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

- La seconda gamba è costituita da due soli giunti rotoidali, di cui quello corrispondente a  $q_5$  è fissato sul telaio a distanza  $D$  dalla origine del sistema di riferimento di base. Si ha quindi

$$\begin{aligned}
 T_2(q) &= Trasl(x, D) Rot(z, q_5) Trasl(x, \ell_2) Rot(z, q_4) \\
 &= \left[ \begin{array}{cc|c} C_{45} & -S_{45} & D + \ell_2 C_5 \\ S_{45} & C_{45} & \ell_2 S_5 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

- Detta  $x = (x_E, y_E, \theta_E)$  la postura (2D) della piattaforma, si ha imme-



diatamente

$$T_E(x) = \left[ \begin{array}{cc|c} C_\theta & -S_\theta & x_E \\ S_\theta & S_\theta & y_E \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (4.4)$$

da cui, tenendo conto delle dimensioni della piattaforma e delle orientazioni delle terne, si trova

$$T_1(x) = T_E(x)T_1^E = T^E(x)Trasl(-a_1, x) = \left[ \begin{array}{cc|c} C_\theta & -S_\theta & x_E - a_1C_\theta \\ S_\theta & C_\theta & y_E - a_1S_\theta \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

e

$$T_2(x) = T_E(x)T_2^E = T^E(x)Trasl(a_2, x)Rot(\pi) = \left[ \begin{array}{cc|c} -C_\theta & S_\theta & x_E + a_2C_\theta \\ -S_\theta & -C_\theta & y_E + a_2S_\theta \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

- Uguagliando  $T_1(x) = T_1(q)$  si ha immediatamente

$$\begin{aligned} \theta &= q_1 + q_3 \\ x_E - a_1C_\theta &= q_2C_1 \\ y_E - a_1S_\theta &= q_2S_1, \end{aligned} \quad (4.5)$$

mentre dalla uguaglianza  $T_2(x) = T_2(q)$  si ha

$$\begin{aligned} \theta &= q_4 + q_5 + \pi \\ x_E + a_2C_\theta &= D + \ell_2C_5 \\ y_E + a_2S_\theta &= \ell_2S_5. \end{aligned} \quad (4.6)$$

• Come previsto, ottenere la cinematica inversa del manipolatore è semplice. Dalle (4.5) si ha infatti, quadrando e sommando la seconda e terza equazione,

$$\begin{aligned} q_2 &= \sqrt{(x_E - a_1C_\theta)^2 + (y_E - a_1S_\theta)^2}, \\ q_1 &= \text{atan2}(y_E - a_1S_\theta, x_E - a_1C_\theta), \\ q_3 &= \theta - q_1. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Dalle (4.6) si ha invece

$$\begin{aligned} q_5 &= \text{atan2}(y_E + a_2S_\theta, x_E + a_2C_\theta - D), \\ q_4 &= \theta - q_5 - \pi. \end{aligned} \quad (4.8)$$

• Più complesso invece è il problema cinematico diretto, che consiste in questo caso nell'esprimere  $(x_E, y_E, \theta_E)$  in funzione di  $q_S = (q_2, q_5)$ . Supposte infatti note le variabili dei giunti sensorizzati  $q_S$  e le grandezze geometriche

$D, a_1, a_2, \ell_2$ , le equazioni (4.5) e (4.6) rappresentano sei equazioni algebriche non-lineari nelle sei incognite  $x = (x_E, y_E, \theta)$  e  $q_5 = (q_1, q_3, q_4)$ .

• Per la soluzione di questo esempio, si può procedere con alcune manipolazioni di carattere algebrico. Osservando che  $S_{13} = -S_{45} = S_\theta$  e  $C_{13} = -C_{45} = C_\theta$ , ponendo  $a = a_1 + a_2$ , ed uguagliando le espressioni di  $x_E$  e  $y_E$  ottenute in (4.5) e (4.6), rispettivamente, si ha

$$\begin{aligned} q_2 C_1 + a C_\theta &= D + \ell_2 C_5 \\ q_2 S_1 + a S_\theta &= \ell_2 S_5 \end{aligned} \quad (4.9)$$

che, quadrate e sommate, danno (ricordando che  $C_\theta C_1 + S_\theta S_1 = C_{13} C_1 + S_{13} S_1 = C_3$ )

$$q_2^2 + a^2 + 2a q_2 C_3 = D^2 + \ell^2 + 2D \ell_2 C_5,$$

da cui, escludendo il caso  $q_2 = 0$ , si hanno due possibili soluzioni:

$$q_3 = \pm \arccos \left( \frac{D^2 + \ell_2^2 - a^2 - q_2^2 + 2D \ell_2 C_5}{2a q_2} \right).$$

Da ogni soluzione è immediato estrarre una postura dell'organo terminale, usando la espressione (4.2) della cinematica diretta della prima gamba e la relazione  $T_E = T_1(q) T_E^1$ .

• Si noti che, se la catena chiusa fosse stata aperta tagliando i vincoli corrispondenti ai giunti 3 e 4 (invece che la piattaforma immediatamente a valle degli stessi giunti, come fatto poc'anzi), avremmo scritto

$$\begin{aligned} T_1'(q) &= Rot(z, q_1) Trasl(x, q_2) = \left[ \begin{array}{cc|c} C_1 & -S_1 & q_2 C_1 \\ S_1 & C_1 & q_2 S_1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \\ T_2'(q) &= Trasl(x, D) Rot(z, q_5) Trasl(x, \ell_2) = \left[ \begin{array}{cc|c} C_5 & -S_5 & D + \ell_2 C_5 \\ S_5 & C_5 & \ell_2 S_5 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \end{aligned}$$

da cui, imponendo la uguaglianza delle sole posizioni con quelle in  $T_1(x)$  e  $T_2(x)$ , si ottengono direttamente le quattro equazioni (già ottenute in precedenza)

$$\begin{aligned} x_E - a_1 C_\theta &= q_2 C_1 \\ y_E - a_1 S_\theta &= q_2 S_1 \\ x_E + a_2 C_\theta &= D + \ell_2 C_5 \\ y_E + a_2 S_\theta &= \ell_2 S_5. \end{aligned} \quad (4.10)$$

La riduzione del numero di equazioni e di variabili nel sistema ottenuto per tale strada può essere utile in alcuni casi, anche se questo non è sempre vero.

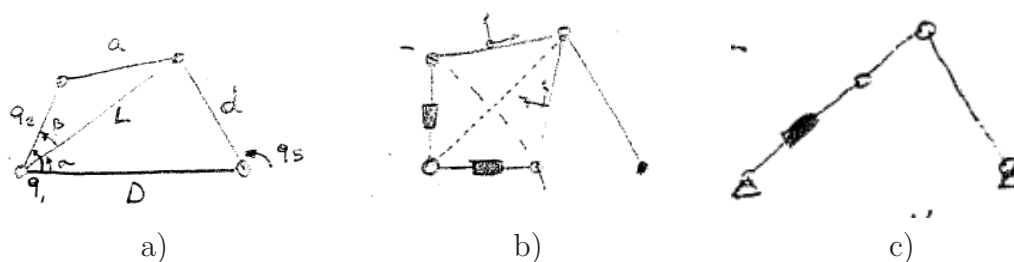


Figura 4.5: Illustrazione geometrica delle soluzioni del l'esempio di catena chiusa RPRRR.

Per ottenere la cinematica diretta in questo manipolatore, ad esempio, la soluzione delle quattro equazioni (4.10) nelle quattro variabili  $(x_E, y_E, \theta, q_1)$  è di complessità non inferiore a quella ottenuta in precedenza per sei equazioni in sei incognite.

- La soluzione della cinematica diretta sopra ottenuta può essere illustrata geometricamente come in fig. 4.5. La lunghezza del segmento  $L$  è nota dalla applicazione del teorema di Carnot al triangolo di lati  $L, D, l_2$  ( $L^2 = D^2 + l_2^2 + 2Dl_2C_5$ ). Uguagliandola alla lunghezza ottenuta dal triangolo di lati  $L, a, q_2$  ( $l^2 = q_2^2 + a^2 + 2aq_2C_3$ , si ha la soluzione già vista. È adesso evidente quali siano le due possibili soluzioni individuate algebricamente, e illustrate in fig. 4.5 b). Le due distinte soluzioni vengono a coincidere per configurazioni in cui  $q_3 = 0$  (fig. 4.5 c) e  $q_3 + \pi$ , che diremo *singolari*.

- È importante notare che, al di fuori delle configurazioni singolari, per quanto esistano due soluzioni possibili, esse sono distinte tra loro: in altri termini, se conosco la effettiva posizione della piattaforma per un qualche valore di  $q_5$ , la soluzione per un valore poco modificato rispetto a questo sarà a quella vicina e quindi dello stesso tipo. Questa osservazione è utile in pratica quando in un robot parallelo si conosca la configurazione iniziale della piattaforma (ad esempio per riferimento meccanico nella fase di inizializzazione della macchina) e si proceda ad aggiornarla per continuità, scegliendo tra tutte le possibili soluzioni della cinematica diretta quella piu' prossima alla ultima ottenuta. Il metodo cade però in difetto se il manipolatore raggiunge una singolarità: in questo caso, esso può rimanere su una soluzione dello stesso tipo di quello con cui è giunto in singolarità, o può, attraversando la singolarità, cambiare tipo.

- La discussione delle singolarità della catena chiusa può essere vista in maggior dettaglio guardando alle equazioni di vincolo sopra scritte per il

manipolatore (4.9), che riscriviamo nella forma

$$V(q_S, q_{\bar{S}}) = \begin{bmatrix} q_2 C_1 + a C_{13} - D - \ell_2 C_5 \\ q_2 S_1 + a S_{13} - \ell_2 S_5 \end{bmatrix} = 0$$

Con questa scrittura si intende evidenziare che si tratta di due equazioni che vincolano implicitamente le variabili note  $q_S = (q_2, q_5)$  e incognite  $q_{\bar{S}} = (q_1, q_3)$ .

Supponiamo che sia nota una soluzione  $\tilde{q}_S, \tilde{q}_{\bar{S}}$  tale che  $V(\tilde{q}_S, \tilde{q}_{\bar{S}}) = 0$ . Ci si chiede se, per valori vicini a  $\tilde{q}_S$ , sia possibile scrivere univocamente una soluzione per  $q_{\bar{S}}$ , anch'essa vicina a  $\tilde{q}_{\bar{S}}$ . Applicando il teorema della funzione implicita, o del Dini, si ha che questo è possibile se il Jacobiano del vincolo

$$J_V(q_S, q_{\bar{S}}) = \frac{\partial V(q_S, q_{\bar{S}})}{\partial q_{\bar{S}}}$$

è invertibile nella soluzione in questione, cioè se  $\det(J_V(\tilde{q}_S, \tilde{q}_{\bar{S}})) \neq 0$ . Dalla

$$\frac{\partial V(q_S, q_{\bar{S}})}{\partial q_S} + J_V(q_S, q_{\bar{S}}) \frac{\partial q_{\bar{S}}}{\partial q_S} = 0,$$

si può inoltre ottenere in questa ipotesi

$$\frac{\partial q_{\bar{S}}}{\partial q_S} = -J_V^{-1}(q_S, q_{\bar{S}}) \frac{\partial V(q_S, q_{\bar{S}})}{\partial q_S}$$

Nell'esempio di manipolatore planare chiuso RPRRR, si ha

$$J_V(q_S, q_{\bar{S}}) = \begin{bmatrix} -q_2 S_1 - a S_{13} & -a S_{13} \\ q_2 C_1 + a C_{13} & a C_{13} \end{bmatrix}$$

e quindi  $\det \frac{\partial V(q_S, q_{\bar{S}})}{\partial q_{\bar{S}}} = a q_2 (C_1 S_{13} - S_1 C_{13}) = a q_2 S_3$ , per cui il Jacobiano del vincolo è singolare (oltreché in  $q_2 = 0$ ) in  $q_3 = 0$  e  $q_3 = \pi$ : in queste configurazioni la funzione implicita non è garantita esistere (nell'esempio in questione esiste una relazione a due valori, non una funzione).

• Per studiare la cinematica differenziale del manipolatore parallelo RPRRR considerato ad esempio, si faccia riferimento alla rimozione dei vincoli mediante taglio ai giunti 3 e 4.

I Jacobiani delle gambe sono dati da

$$J_1 = \begin{bmatrix} -q_2 S_1 & C_1 \\ q_2 C_1 & S_1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad J_2 = \begin{bmatrix} -\ell_2 S_5 \\ \ell_2 C_5 \\ 1 \end{bmatrix},$$

mentre si ha

$$G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_1 S_\theta & -a_1 C_\theta & 1 \end{bmatrix}; \quad G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a_2 S_\theta & a_2 C_\theta & 1 \end{bmatrix}.$$

Per entrambe i tagli si ha  $F_1 = F_2 = [0 \ 0 \ 1]^T$ , da cui

$$H_1 = H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

L'equazione dei vincoli differenziali è dunque scritta nella forma

$$\begin{aligned} A(q, x) \begin{bmatrix} \dot{q} \\ t_E \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \middle| - \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1^T \\ G_2^T \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \dot{q} \\ t_E \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -q_2 S_1 & C_1 & 0 & | & 1 & 0 & a_1 S_\theta \\ q_2 C_1 & S_1 & 0 & | & 0 & 1 & -a_1 C_\theta \\ 0 & 0 & \ell S_5 & | & 1 & 0 & -a_2 S_\theta \\ 0 & 0 & \ell C_5 & | & 0 & 1 & a_2 C_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = 0. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Tutte le velocità compatibili con i vincoli possono quindi essere descritte in una base del kernel della matrice dei vincoli:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(a_1 + a_2) \cos(q_1 - \theta)}{q_2} & \frac{\ell \cos(-q_5 + q_1)}{q_2} \\ (a_1 + a_2) \sin(q_1 - \theta) & \ell \sin(q_1 - q_5) \\ 0 & 1 \\ a_2 \sin(\theta) & \ell \sin(q_5) \\ -a_2 \cos(\theta) & -\ell \cos(q_5) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix}$$

La base del kernel può essere riscritta per evidenziare le velocità del sis-

tema corrispondenti a velocità attuate sui giunti attivi:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L \cos(-q_5 + q_1)}{q_2} - \frac{\cos(q_1 - \theta) L \sin(-q_5 + q_1)}{\sin(q_1 - \theta) q_2} & \frac{\cos(q_1 - \theta)}{\sin(q_1 - \theta) q_2} \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ L \sin(q_5) - \frac{a_2 \sin(\theta) L \sin(-q_5 + q_1)}{\sin(q_1 - \theta)(a_2 + a_1)} & \frac{\sin(\theta) a_2}{\sin(q_1 - \theta)(a_2 + a_1)} \\ -L \cos(q_5) + \frac{a_2 \cos(\theta) L \sin(-q_5 + q_1)}{\sin(q_1 - \theta)(a_2 + a_1)} & -\frac{a_2 \cos(\theta)}{\sin(q_1 - \theta)(a_2 + a_1)} \\ -\frac{L \sin(-q_5 + q_1)}{\sin(q_1 - \theta)(a_2 + a_1)} & \frac{1}{\sin(q_1 - \theta)(a_2 + a_1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Essendo  $\mathcal{N}(A^T(q, x)) = 0$ , il sistema è staticamente determinato. Una base delle forze interne è

$$\mathcal{N}(GH^T) = \text{span} \begin{bmatrix} C_\theta \\ S_\theta \\ -C_\theta \\ -S_\theta \end{bmatrix}.$$

Nessuna delle forze interne è compatibile con la condizione di avere coppia nulla sul giunto non attuato  $q_1$ . Infatti

$$\mathcal{N} \left( \begin{bmatrix} -q_2 \sin(q_1) & q_2 \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ a_1 \sin(\theta) & -a_1 \cos(\theta) & -\sin(\theta) a_2 & a_2 \cos(\theta) \end{bmatrix} \right) = 0$$

ad eccezione che nelle configurazioni in cui questa matrice perde rango. Questo avviene per  $(a_1 + a_2)q_2 \sin(q_1 - \theta) = 0$ , ovvero nelle singolarità del manipolatore già incontrate (si ricordi che i vincoli impongono  $q_3 = \theta - q_1$ ). Nelle configurazioni in cui  $q_1 = \theta$  o  $q_1 = \theta + \pi/2$  le forze interne sono allineate all'asse del giunto passivo 1, e sono quindi attuabili.

## 4.2 Indici di Manipolabilità

Come si è visto, nelle configurazioni singolari di un manipolatore le caratteristiche geometriche degli spazi fondamentali sono qualitativamente alterate. Le configurazioni singolari sono d'altronde estremamente specifiche: è importante chiedersi cosa avvenga in configurazioni prossime a quelle singolari.

A tal fine, è molto utile una analisi di manipolabilità del braccio.

- Sia

$$\xi = J(q)\dot{q}, \quad \xi \in \mathbb{R}^m, \quad \dot{q} \in \mathbb{R}^n$$

la relazione che esprime le velocità nello spazio operativo di un manipolatore in funzione di quelle dei suoi giunti. Sia inoltre

$$J(q) = U(q)\Sigma(q)V^T(q),$$

la decomposizione ai valori singolari del Jacobiano.

In questa decomposizione,  $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ha elementi nulli fuori dalla diagonale principale ( $\Sigma_{i,j} = 0, i \neq j$ ) mentre gli elementi diagonali  $\Sigma_{i,i} = \sigma_i$  sono i valori singolari di  $J(q)$  ( $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(J(q)J^T(q))}$ ) ordinati in modo decrescente:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_\ell \geq 0, \ell = \min\{m, n\}$ . Le matrici  $U(q) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , e  $V(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sono costruite con i corrispondenti autovettori delle matrici  $JJ^T$  e  $J^TJ$ , rispettivamente.

- Introducendo nuove coordinate nello spazio operativo e nello spazio dei giunti con le definizioni  $\bar{\xi} = U^T \xi$  e  $\bar{q} = V^T \dot{q}$ , si ha immediatamente

$$\bar{\xi} = \Sigma \bar{q}.$$

Questa relazione può essere letta come segue. Un moto nello spazio operativo in direzione di

$$\bar{\xi} = e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

(corrispondente nelle coordinate originali a una velocità  $\xi = U_1$  allineata col primo autovettore di  $JJ^T$ ) è ottenuto applicando una velocità ai giunti allineata col primo autovettore  $V_1$  di  $J^TJ$  e pari a

$$\bar{q} = \frac{1}{\sigma_1} e_1 = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Analoghe relazioni valgono per ogni altra componente di velocità. Valori inferiori del valore singolare  $\sigma_i$  significano che per ottenere velocità nello spazio operativo di pari intensità ma dirette come l'autovettore  $i$ -esimo di  $JJ^T$ , è necessario attuare velocità ai giunti che sono di intensità maggiore, e inversamente proporzionale a  $\sigma_i$ .

Il valore singolare  $\sigma_i$  può quindi essere visto come un “coefficiente di amplificazione” meccanica tra le velocità nello spazio dei giunti e quello nello spazio operativo.

Le diverse direzioni in cui l’end-effector può muoversi con maggiore o minore velocità a parità di velocità dei giunti possono essere illustrate da una semplice costruzione geometrica, detta *ellissoide di manipolabilità*. Si consideri il rapporto

$$R_\xi = \frac{\|\xi\|}{\|\dot{q}\|}$$

tra una norma della velocità nello spazio operativo ed il quadrato e una norma della velocità dei giunti. Si pensi inizialmente per semplicità alle sole velocità di traslazione per un manipolatore i cui giunti siano tutti dello stesso tipo (rotoidale o prismatico), e si adotti la norma euclidea: si può porre in questo caso semplicemente

$$R_\xi^2 = \frac{\xi^T v}{\dot{q}^T \dot{q}} = \frac{\dot{q}^T J^T J \dot{q}}{\dot{q}^T \dot{q}}$$

- Geometricamente, pensiamo di fissare il valore del numeratore ad 1: stiamo considerando un ellissoide nelle coordinate di giunto, ed il valore del rapporto è massimizzato da quei punti dell’ellissoide che minimizzano il denominatore, cioè la distanza dalla origine.

- Algebricamente, è conveniente passare nelle coordinate sopra definite, dove si può scrivere facilmente

$$R_\xi^2 = \frac{\bar{\xi}^T \bar{\xi}}{\bar{q}^T \bar{q}} = \frac{\bar{q}^T \Sigma^T \Sigma \bar{q}}{\bar{q}^T \bar{q}} = \frac{\sigma_1^2 \bar{q}_1^2 + \dots + \sigma_\ell^2 \bar{q}_\ell^2}{\bar{q}_1^2 + \dots + \bar{q}_\ell^2}$$

- Il rapporto (detto di Rayleigh) ha chiaramente un valore massimo in corrispondenza a  $\bar{q}_1 = 1, \bar{q}_i = 0, i = 2, \dots, \ell$ , cioè  $\bar{q} = e_1$ , in corrispondenza alla quale si ha, in coordinate originali,  $\dot{q} = V_1$  e  $t = U_1$ . Il valore minimo del rapporto di Rayleigh si ha invece per  $\bar{q} = e_\ell$ , quindi per  $\dot{q} = V_\ell$  e  $t = U_\ell$ . In corrispondenza a  $\bar{q} = e_i, 1 < i < \ell$ , il rapporto di Rayleigh assume valori estremi locali.

- È consuetudine rappresentare graficamente i valori del rapporto  $R_\xi$  nello spazio operativo del manipolatore, associando ad ogni direzione di  $\xi$  il valore del rapporto stesso in quella direzione. Si ottiene pertanto un ellissoide, detto di manipolabilità in velocità, con assi principali allineati con  $U_i$  e semi-assi di lunghezza  $\sigma_i$ .

- La direzione corrispondente al massimo allungamento dell’ellissoide coincide con quella in cui, a pari velocità dei giunti, è possibile ottenere la



massima velocità dell'end-effector (nelle norme considerate). Questa è anche la direzione in cui piccoli errori nel controllo dei giunti si riflettono maggiormente in errori nello spazio operativo. Viceversa vale per la direzione di minimo allungamento dell'ellissoide.



# Capitolo 5

## Controllo di Manipolatori

### 5.1 Controllo di Posizione di Manipolatori con dinamica certa

In questa sezione studieremo approcci al controllo di posizione di un manipolatore la cui dinamica

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\pi = \tau \quad (5.1)$$

risulti conosciuta con precisione assoluta. In particolare, oltre alla matrice regressore  $Y(q, \dot{q}, \ddot{q})$ , si supporrà conosciuto il vettore  $\pi$  dei parametri dinamici del manipolatore, situazione non sempre garantita. Si consideri quale esempio un manipolatore il cui compito sia di palettizzare con elevata precisione di posizionamento carichi variabili casualmente: in questo caso è facile convincersi che il vettore  $\pi$  risulta variabile nel tempo in funzione dei carichi a cui il manipolatore è sottoposto, e quindi risulti pressochè sconosciuto durante il moto. Al contrario, un esempio di compito a  $\pi$  costante può essere il compito di vernicitura spray di una carenatura di automobile.

Infine, supporremo che il manipolatore non interagisca con l'ambiente esterno (wrench esterni  $F_e = (f_e, \tau_e)^T = 0$ ), rimandando l'esposizione di tecniche di controllo adottabili in questo caso, dette tecniche di *controllo dell'interazione*, alla sezione relativa.

#### 5.1.1 Controllo a Coppia Calcolata nello spazio dei giunti

Si consideri il problema di controllare le posizioni di giunto  $q = \langle q_i \rangle_{i=1\dots N}^T$  del manipolatore retto dalla dinamica (5.1) affinché inseguano riferimenti  $q_d = \langle q_{d-i} \rangle_{i=1\dots N}^T$  di posizione.

Tale problema può essere risolto scegliendo un vettore  $\tau$  di controllo nella forma

$$\tau = B(q) \left( \ddot{q}_d + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q} \right) + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) \quad (5.2)$$

dove  $q_d$  rappresenta il vettore delle posizioni di riferimento per i giunti,  $K_v$  e  $K_p$  sono matrici diagonali  $> 0$ , e  $\tilde{q} \stackrel{def}{=} q_d - q$ . Infatti, sostituendo la (5.2) nella (5.1)

$$B(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) = B(q) \left( \ddot{q}_d + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q} \right) + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q)$$

e compiendo i passaggi

$$\begin{aligned} B(q) \ddot{q} &= B(q) \left( \ddot{q}_d + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q} \right) \rightarrow \\ B(q) \left( \ddot{\tilde{q}} + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q} \right) &= 0 \end{aligned}$$

si ottiene, data l'invertibilità della matrice dinamica  $B(q)$ ,

$$\ddot{\tilde{q}} + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q} = 0$$

che rappresenta la dinamica dell'errore di posizionamento. Tale dinamica può essere resa stabile asintoticamente scegliendo in sede di progetto le matrici dei guadagni  $K_v$ ,  $K_p$  affinché i polinomi  $Is^2 + K_v s + K_p$ , con  $I = eye(N)$ , risultino di Hurwitz.

In definitiva, il controllo proposto, del quale riportiamo lo schema di principio in fig.5.1, mostra come la perfetta conoscenza del modello dinamico di un manipolatore ne consenta la linearizzazione perfetta garantendo l'allocazione precisa dei poli del sistema a ciclo chiuso. È quindi garantita la possibilità di ottenere inseguimenti di posizione di giunto con esiguo tempo di assestamento e errore a regime nullo.

## 5.1.2 Controllo a Coppia Calcolata nello spazio operativo

Si vuole determinare la coppia di controllo  $\tau$  che garantisca l'inseguimento asintotico di una posizione cartesiana e angolare  $X_d$  da parte della posizione  $X$  dell'end-effector di un manipolatore. A tal fine è necessario determinare preliminarmente l'equazione della dinamica del manipolatore nello spazio operativo.

- **Dinamica di un Manipolatore nello Spazio Operativo**

Si consideri per semplicità il caso in cui il manipolatore in questione sia *quadrato* (i.e.  $J(q) \in R^{N \times N}$ ), e che durante il moto il manipolatore

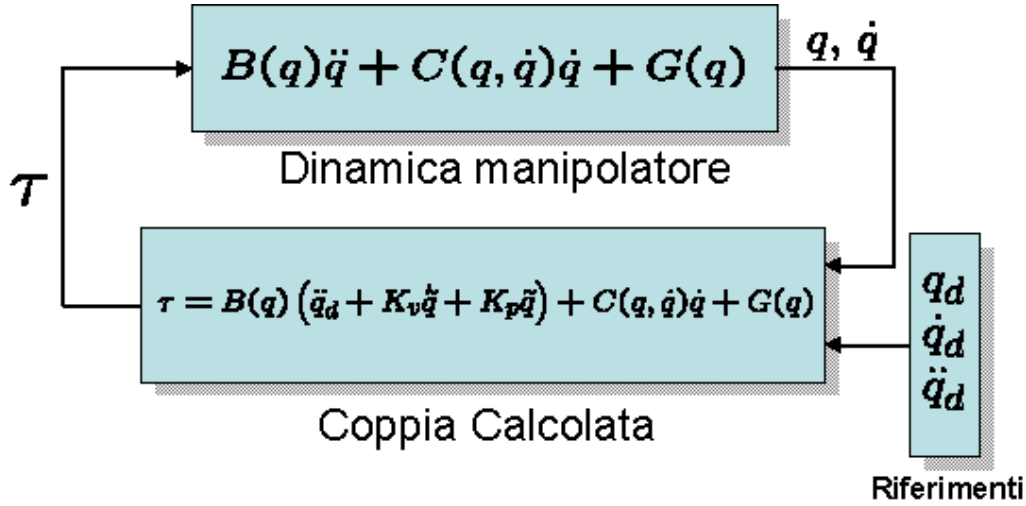


Figura 5.1: Sistema di controllo a coppia calcolata.

non si trovi in una configurazione singolare (i.e. esiste  $J^{-1}(q)$ ,  $\forall q$ ). In tal modo partendo dall'espressione della cinematica differenziale

$$\dot{X} = J(q)\dot{q}$$

si giunge, dopo derivazione e inversione dello Jacobiano, all'espressione della accelerazione di giunto

$$\ddot{q} = J^{-1}(q) (\ddot{X} - \dot{J}(q)\dot{q}) \quad (5.3)$$

funzione della accelerazione  $\ddot{X}$  dell'end-effector. Sostituendo la (5.3) nella (5.1) si ottiene

$$B(q)J^{-1}(q) (\ddot{X} - \dot{J}(q)\dot{q}) + h(q, \dot{q}) = \tau \quad (5.4)$$

dove  $h(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)$ .

A questo punto, al fine di ottenere l'espressione della dinamica nello spazio operativo è opportuno utilizzare il legame (in questo caso invertibile) tra le forze generalizzate  $F_{e-e}$  che agiscono sull'end-effector e le relative coppie  $\tau_g$  ai giunti

$$\tau_g = J^T(q)F_{e-e},$$

basti notare infatti che le coppie di controllo  $\tau$  ai giunti generano una forza all'end-effector  $F$  esprimibile con la

$$F = J^{-T}(q)\tau.$$

Quindi, premoltiplicando i termini della eq. (5.4) per  $J^{-T}(q)$ , si ottiene l'equazione della dinamica del manipolatore nello spazio operativo

$$\begin{aligned} J^{-T}(q)B(q)J^{-1}(q)\left(\ddot{X} - \dot{J}(q)\dot{q}\right) + J^{-T}(q)h(q, \dot{q}) &= J^{-T}(q)\tau \rightarrow \\ \Omega^{-1}(q)\ddot{X} + h(X, \dot{X}) &= F \end{aligned} \tag{5.5}$$

dove  $\Omega(q) = J(q)B^{-1}(q)J^T(q)$  viene detto *tensore di mobilità* del manipolatore, e  $h(X, \dot{X}) = J^{-T}(q)h(q, \dot{q}) - \Omega^{-1}(q)\dot{J}(q)\dot{q}$ .

Alla stregua di quanto esposto in precedenza, scegliamo la forza  $F$  linearizzante nella forma

$$F = \Omega^{-1}(q)\left(\ddot{X}_d + K_v\dot{\tilde{X}} + K_p\tilde{X}\right) + h(X, \dot{X})$$

che sostituita nella (5.5) porta alla dinamica dell'errore di posizione  $\tilde{X} = X_d - X$  nello spazio operativo

$$\ddot{\tilde{X}} + K_v\dot{\tilde{X}} + K_p\tilde{X} = 0,$$

che può essere resa asintoticamente stabile mediante una scelta opportuna delle matrici  $K_v, K_p$ .

Infine, la coppia di controllo ai giunti risulta

$$\tau = J^T(q)F = J^T(q)\left(\Omega^{-1}(q)\left(\ddot{X}_d + K_v\dot{\tilde{X}} + K_p\tilde{X}\right) + h(X, \dot{X})\right).$$

### 5.1.3 Esempi

## 5.2 Controllo di Manipolatori con incertezze sulla dinamica

In questa sezione si esamina il problema di controllare in posizione un manipolatore nel caso in cui siano presenti incertezze nel vettore dei parametri dinamici  $\pi$ . In particolare, verranno esposti approcci al controllo sia di tipo *robusto*, che cioè eliminano l'influenza degli errori di modellazione sull'errore a regime mediante una opportuna scelta delle coppie di controllo  $\tau$ , sia di tipo *adattivo*, questi ultimi consentendo di eliminare gli errori di posizione a regime dovuti alle incertezze di modellazione grazie a opportune scelte per le evoluzioni temporali delle stime dei parametri dinamici.

### 5.2.1 Robustezza del controllo a coppia calcolata

Abbiamo mostrato in 5.1.1 che la perfetta conoscenza del modello dinamico di un manipolatore ne consente la linearizzazione esatta in retroazione, e quindi la scelta diretta di un opportuno controllo (5.2) che garantisce l'inseguimento asintotico di un riferimento di posizione ai giunti. Scopo della trattazione che ci accingiamo ad esporre è quello di evidenziare i disturbi che nascono da errori sulla stima dei parametri dinamici di un manipolatore e che affliggono la dinamica dell'errore di posizione, e di mostrare nel paragrafo successivo una variante robusta della coppia calcolata che permette di eliminare tali disturbi.

Scegliamo come coppia di controllo la

$$\tau = \bar{B}(q) (\ddot{q}_d + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q}) + \bar{C}(q, \dot{q}) \dot{q} + \bar{G}(q) \quad (5.6)$$

dove  $\bar{B}(q)$ ,  $\bar{C}(q, \dot{q})$  e  $\bar{G}(q)$  rappresentano le stime delle matrici dinamica, di Coriolis e del vettore delle coppie gravitazionali del manipolatore. Sostituendo la (5.6) nella (5.1), e compiendo gli stessi passaggi riportati in 5.1.1 si ottiene

$$\ddot{\tilde{q}} + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q} = \bar{B}(q)^{-1} (\tilde{B}(q) \ddot{q} + \tilde{C}(q, \dot{q}) \dot{q} + \tilde{G}(q)) \quad (5.7)$$

dove

$$\begin{cases} \tilde{B}(q) = B(q) - \bar{B}(q), \\ \tilde{C}(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q}) - \bar{C}(q, \dot{q}), \\ \tilde{G}(q) = G(q) - \bar{G}(q) \end{cases}$$

rappresentano le matrici errore di stima. Si nota che la dinamica dell'errore nella (5.7) risulta eccitata da un disturbo  $\eta(t) = \bar{B}(q)^{-1} (\tilde{B}(q) \ddot{q} + \tilde{C}(q, \dot{q}) \dot{q} + \tilde{G}(q))$  funzione a sua volta dello stesso errore. Quest'ultima osservazione implica dunque che non si può dire nulla riguardo la stabilità del sistema se non si entra nel dettaglio delle particolari stime  $\tilde{B}(q)$ ,  $\tilde{C}(q, \dot{q})$ ,  $\tilde{G}(q)$  utilizzate. In presenza di errori di modello dobbiamo quindi porci i problemi seguenti

- **Stabilità Robusta:** Quali sono i margini di errore sulle stime che consentono di affermare la stabilità del sistema?
- **Prestazione Robusta:** Quali sono le prestazioni in presenza di tali errori? Ovvero, dato un livello massimo di degrado delle prestazioni, entro quali margini di errore riesco a garantirlo?
- **Sintesi Robusta:** È possibile realizzare un controllore più robusto?

Nel nostro specifico caso il sistema (5.7) può essere considerato nella forma che presenta due sistemi dinamici che si “eccitano” a vicenda essendo l’uno l’ingresso di disturbo dell’altro: la dinamica dell’errore di posizione, e il vettore  $\eta(t)$

$$\begin{cases} \ddot{\tilde{q}} + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q} = \eta(t) \\ \eta(t) = \bar{B}(q)^{-1}(\bar{B}(q)\ddot{q} + \tilde{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \tilde{G}(q)). \end{cases} \quad (5.8)$$

Ci interesseremo del verificare che il sistema (5.8) sia stabile secondo la seguente definizione di stabilità

- **Stabilità Ingresso/Uscita:**

Un sistema si dice I/O (Ingresso/Uscita) stabile se ad ogni funzione di ingresso limitata in una opportuna norma

$$\|u(t)\|_p = \left( \int_0^\infty |u(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p \leq \infty \quad (5.9)$$

corrisponde una uscita limitata nella stessa norma.

Considereremo in particolare  $p = \infty$ , che impone  $\|u(t)\|_\infty = \sup_t |u(t)|$ .

Dalla prima definizione della (5.8), se le matrici  $K_v$ ,  $K_p$  risultano positive definite, si giunge alle disequaglianze

$$\begin{cases} \|\tilde{q}\|_\infty \leq \beta_1 \|u\|_\infty, \\ \|\dot{\tilde{q}}\|_\infty \leq \beta_2 \|u\|_\infty, \end{cases}$$

mentre la seconda espressione

$$f(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \bar{B}(q)^{-1}(\bar{B}(q)\ddot{q} + \tilde{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \tilde{G}(q)) = \eta(t)$$

impone la disequaglianza

$$\|u\|_\infty \leq \alpha_1 + \alpha_2 \|\tilde{q}\|_\infty + \alpha_3 \|\dot{\tilde{q}}\|_\infty + \alpha_4 \|\dot{\tilde{q}}\|_\infty^2$$

con  $\alpha_i = \alpha_i(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) = \alpha_i(q_d, \bar{B}(q), \tilde{C}(q, \dot{q}), \tilde{G}(q))$ .

Da queste relazioni, si ottiene

$$\begin{cases} \|\tilde{q}\|_\infty \leq \beta_1 \alpha_1 + \beta_1 \alpha_2 \|\tilde{q}\|_\infty + \beta_1 \alpha_3 \|\dot{\tilde{q}}\|_\infty + \beta_1 \alpha_4 \|\dot{\tilde{q}}\|_\infty^2, \\ \|\dot{\tilde{q}}\|_\infty \leq \beta_2 \alpha_1 + \beta_2 \alpha_2 \|\tilde{q}\|_\infty + \beta_2 \alpha_3 \|\dot{\tilde{q}}\|_\infty + \beta_2 \alpha_4 \|\dot{\tilde{q}}\|_\infty^2. \end{cases} \quad (5.10)$$

A seconda dei valori numerici che è possibile ottenere per le limitazioni  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  (a loro volta dipendenti dalla bontà delle stime) le (5.10) rappresentano due luoghi nel piano  $(\|\tilde{q}\|_\infty, \|\dot{\tilde{q}}\|_\infty)$  del tipo riportato in fig.5.2.



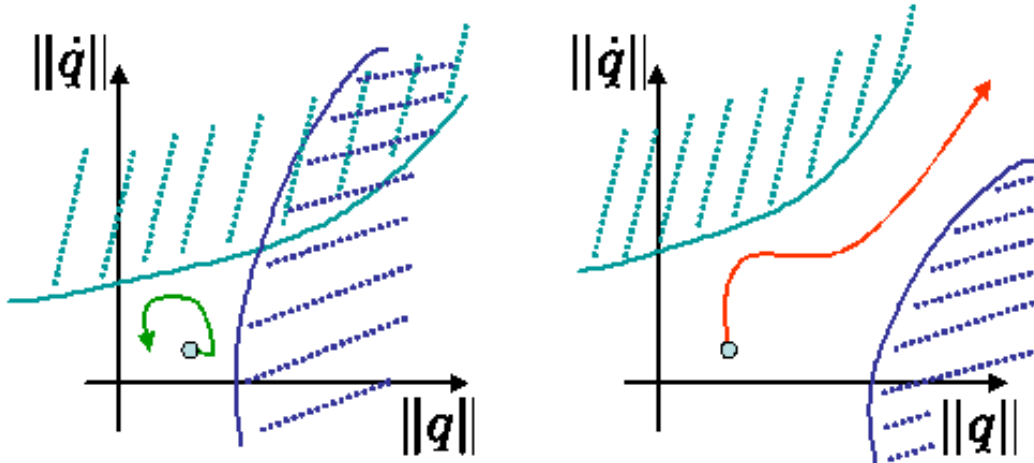


Figura 5.2: Possibili evoluzioni del vettore  $(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})^T$ . (Sinistra): Le stime delle matrici sono tali da mantenere l'errore limitato, ma non nullo. (Destra): Le stime delle matrici non sono tali da garantire una evoluzione limitata dell'errore di posizione, che risulta quindi instabile.

### 5.2.2 Controllo alla Arimoto o PD ai giunti con compensazione di gravità

In questo paragrafo verrà esposto il controllo di posizione Proporzionale-Derivativo (PD) dei giunti di un manipolatore supposta la unica conoscenza esatta, e quindi la compensazione, delle coppie gravitazionali non lineari  $G(q)$  che compaiono nella dinamica (5.1).

Al fine di giungere alla espressione della coppia  $\tau$  di controllo PD verrà utilizzata la tecnica di controllo alla Lyapunov, previa definizione di una “energia”  $V(t) > 0$ , funzione della velocità dei giunti  $\dot{q}$  (il manipolatore sotto l'azione del controllo deve tendere asintoticamente ad una configurazione di equilibrio  $\dot{q} = 0$ ), e dell'errore di posizione  $\tilde{q} = q_d - q$  (l'errore di posizione a regime deve essere nullo), nella forma

$$V(t) = \frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) \dot{q} + \frac{1}{2} \tilde{q}^T K_p \tilde{q}$$

dove l'energia cinetica  $T = \frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) \dot{q} > 0$ , per  $\dot{q} \neq 0$ , e  $K_p > 0$ .

A questo punto si derivi la  $V(t)$  e, sfruttando la  $\dot{\tilde{q}} = \dot{q}_d - \dot{q} = -\dot{q}$  vera se  $q_d$  è costante (traiettorie di riferimento punto-punto) e l'espressione per il

termine  $B(q)\ddot{q}$  che compare nella (5.1), si giunge a

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= \dot{q}^T (\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)) + \frac{1}{2}\dot{q}^T \dot{B}(q)\dot{q} - \tilde{q}^T K_p \dot{q} \rightarrow \\ \dot{V}(t) &= \frac{1}{2}\dot{q}^T (\dot{B}(q) - 2C(q, \dot{q})) \dot{q} + \dot{q}^T (\tau - G(q)) - \tilde{q}^T K_p \dot{q} \rightarrow \\ \dot{V}(t) &= \dot{q}^T (\tau - G(q)) - \tilde{q}^T K_p \dot{q}\end{aligned}\quad (5.11)$$

dove abbiamo utilizzato la nota proprietà  $\frac{1}{2}\dot{q}^T (\dot{B}(q) - 2C(q, \dot{q})) \dot{q} = 0$  che deriva dal principio di Hamilton di conservazione dell'energia.

Si scelga a questo punto la coppia di controllo Proporzionale-Derivativa

$$\tau = K_p \tilde{q} - K_v \dot{q} + G(q) \quad (5.12)$$

e la sostituisca nella (5.11), ottenendo il risultato

$$\dot{V}(t) = -\dot{q}^T K_v \dot{q}$$

che impone  $\dot{V}(t) \leq 0$ . Questo risultato indica soltanto che il sistema tende ad una posizione di equilibrio ( $\dot{q} = 0$ ), ma per verificare se tale posizione di equilibrio risulta caratterizzata da un errore di posizione  $\tilde{q} = 0$  è necessario usufruire del lemma di Krasowskii.

A tal fine si sostituisca la (5.12) nella (5.1)

$$\begin{aligned}B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) &= K_p \tilde{q} - K_v \dot{q} + G(q) \rightarrow \\ B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} &= K_p \tilde{q} - K_v \dot{q}\end{aligned}$$

e, notando che in una configurazione di equilibrio si verifica  $\ddot{q} = 0$ , si ottiene

$$K_p \tilde{q} = 0$$

che impone, data l'invertibilità della matrice  $K_p$ , un errore a regime  $\tilde{q}$  nullo. Il controllo PD proposto (si veda fig.5.3) garantisce quindi l'inseguimento asintotico di traiettorie  $q_d$  punto-punto.

A questo livello, è necessario puntualizzare il fatto che la presenza di non linearità derivanti dal "disturbo"  $G(q)$  non esclude la asintotica stabilità di un controllo PD senza compensazioni gravitazionali, e che quindi ha l'espressione

$$\tau = -K_v \dot{q} + K_p \tilde{q}. \quad (5.13)$$

Per convincersi di ciò senza addentrarci in una dimostrazione rigorosa, basti pensare a che il controllo PD opera inserendo rigidità  $K_p$  e viscosità  $K_v$  "virtuali" a livello di giunto: la forza elastica  $K_p \tilde{q}$  costringe la posizione di giunto  $q$  a inseguire il riferimento  $q_d$ , mentre la forza di attrito  $K_v \dot{q}$  tende a dissipare l'energia elastica accumulata durante l'evoluzione, e quindi a smorzare

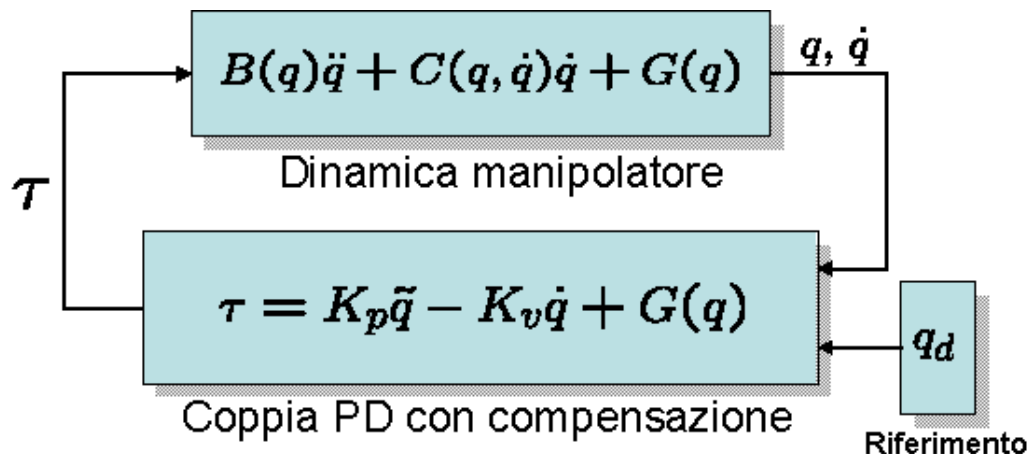


Figura 5.3: Schema di controllo di posizione ai giunti di tipo Proporzionale-Derivativo con compensazione di Gravità.

le oscillazioni (si veda fig.5.4).

Da questo si deduce che, utilizzando la (5.13) quale controllo, gli errori di posizione a regime dovuti alle non linearità possono essere resi piccoli a piacere mediante una opportuna scelta delle matrici  $K_p$ ,  $K_v$ . Inserendo inoltre un termine di compensazione integrale nella (5.13)

$$\tau = -K_v \dot{q} + K_p \tilde{q} + K_I \int_0^t \tilde{q}(t) dt,$$

l'asintotica convergenza a zero dell'errore di posizione  $\tilde{q}$  è garantita.

Per riallacciarsi a quanto esposto nella sezione precedente, si noti che il controllo PD con compensazione di gravità proposto è nella forma (5.6) dove sono utilizzate le seguenti approssimazioni delle matrici dinamica, di Coriolis e gravitazionale

$$\begin{cases} \bar{B}(q) = I, \\ \bar{C}(q, \dot{q}) = 0, \\ \bar{G}(q) = G(q). \end{cases}$$

In questo caso dunque è garantita l'asintotica stabilità del sistema perturbato (5.7).

Infine, è da notarsi che la scelta della matrice  $K_v$  nella (5.12) ha la proprietà di rendere più o meno elevata la velocità di convergenza a zero dell'errore di posizione  $\tilde{q}$  da parte del manipolatore. Essa infatti influenza direttamente la funzione quadratica  $\dot{V}(t)$ , e impone che a parità di  $\dot{q}$  più i

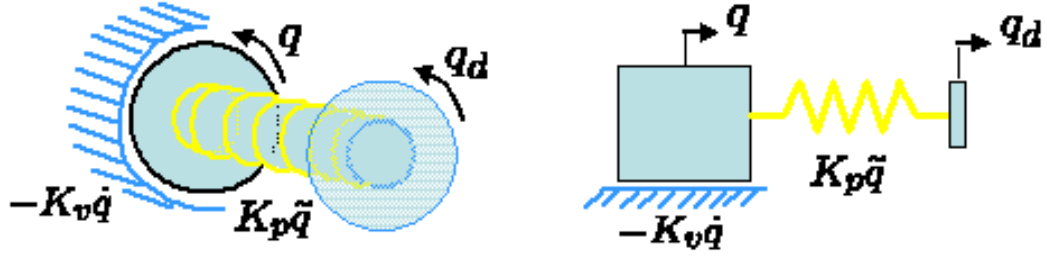


Figura 5.4: Schema esemplificativo del controllo di posizione PD senza compensazione di gravità, nel caso di giunto rotoidale (sinistra) e prismatico (destra). Sono evidenziati la molla e lo smorzatore inseriti virtualmente a livello di giunto dal controllo, e che garantiscono l'asintotica stabilità del sistema ad anello chiuso.

termini sulla diagonale di  $K_v$  risultano elevati, più risulta elevata la velocità di convergenza a zero dell'errore di posizione.

### 5.2.3 Controllo Robusto o a Struttura Variabile

Si prenda in considerazione l'espressione (5.6) del controllo a coppia calcolata con errori di stima, e si aggiunga ad essa un termine "correttivo"  $\bar{B}(q)\Delta(t)$  ottenendo

$$\tau = \bar{B}(q)\ddot{q}_d + \bar{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \bar{G}(q) + \bar{B}(q) \left( K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q} + \Delta(t) \right), \quad (5.14)$$

la cui scelta di  $\Delta(t)$  ci riserbiamo di farla in modo da ottenere la prestazione desiderata (cioè l'inseguimento asintotico del riferimento di posizione  $q_d(t)$ ). Sostituita la (5.14) nella (5.1) si ottiene, dopo alcuni passaggi, la dinamica dell'errore

$$\ddot{\tilde{q}} + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q} = \bar{B}(q)^{-1} \left( \tilde{B}(q)\ddot{q} + \tilde{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \tilde{G}(q) \right) - \Delta(t) = \eta(t) - \Delta(t) \quad (5.15)$$

in cui  $\eta(t) = \bar{B}(q)^{-1} \left( \tilde{B}(q)\ddot{q} + \tilde{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \tilde{G}(q) \right)$ , introdotto in precedenza, è assimilabile ad un disturbo cui  $\Delta$  deve opporsi. È da notarsi che  $\eta(t)$  è in modulo tanto più grande (nel caso peggiore) quanto più grandi sono gli errori relativi di modello  $\bar{B}(q)^{-1}\tilde{B}(q)$ ,  $\bar{B}(q)^{-1}\tilde{C}(q, \dot{q})$  e  $\bar{B}(q)^{-1}\tilde{G}(q)$ . Inoltre,  $\eta(t)$  dipende dalle traiettorie  $q(t)$  seguite dal braccio, essendo maggiore (nel caso peggiore) quanto più esse risultino veloci ed accidentate. Le  $q(t)$  a loro volta dipendono dai riferimenti  $q_d(t)$ , ma anche dalla stessa scelta di  $\Delta(t)$  ancora da farsi.

Verrà comunque

$$\|\eta(t)\| \leq \alpha \|\Delta(t)\| + \beta, \quad (5.16)$$

dove  $\alpha = \alpha(q_d(t), \bar{B}(q)^{-1} \tilde{B}(q), \dots)$ ,  $\beta = \beta(q_d(t), \bar{B}(q)^{-1} \tilde{B}(q), \dots)$ . Supporremo di scegliere modelli e traiettorie tali per cui  $\alpha > 1$ .

Si esprima il sistema (5.15) in forma di stato

$$\dot{\xi} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -K_p & -K_v \end{pmatrix} \xi + \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} (\eta(t) - \Delta(t)),$$

con  $\xi = (\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})^T$ , o in forma compatta

$$\dot{\xi} = A\xi + b(\eta(t) - \Delta(t)). \quad (5.17)$$

Sappiamo che il sistema, se non eccitato, è stabile asintoticamente. Data infatti una matrice  $Q \in \mathbf{R}^{2n \times 2n}$  positiva definita, sappiamo che esiste una matrice  $P \in \mathbf{R}^{2n \times 2n}$  positiva definita tale che

$$A^T P + P A = -Q$$

cosicchè, per il sistema

$$\dot{\xi} = A\xi,$$

la candidata  $V(t) = \xi^T P \xi$  è una funzione di Lyapunov, infatti calcolandone la derivata si ottiene

$$\dot{V}(t) = \xi^T P \dot{\xi} + \dot{\xi}^T P \xi = \xi^T (A^T P + P A) \xi = -\xi^T Q \xi < 0.$$

Utilizzando la stessa candidata per il sistema perturbato (5.17), si ottiene

$$\dot{V}(t) = -\xi^T Q \xi + 2\xi^T P b(\eta(t) - \Delta(t))$$

in cui il termine  $2\xi^T P b(\eta(t) - \Delta(t))$  può in generale avere segno qualsiasi, e non è più quindi garantita essere negativa definita. La tecnica di progetto "alla Lyapunov" consiste nell'applicare un  $\Delta(t)$  tale per cui si possa mostrare  $\dot{V}(t) < 0$ .

Per far ciò, definito il termine  $w(t) = b^T P \xi(t)$ , si considera il prodotto scalare  $w(t)^T (\eta(t) - \Delta(t))$  (si veda FIGURA). Il caso peggiore si ha quando  $\eta(t)$  è allineato a  $w(t)$ , cioè  $w(t)^T \eta(t) = \|w(t)\| \|\eta(t)\|$  è massimo.

Si sceglie quindi

$$\Delta(t) = \begin{cases} \rho(t) \frac{w(t)}{\|w(t)\|} & , \|w(t)\| \neq 0 \\ 0 & , \|w(t)\| = 0 \end{cases} \quad (5.18)$$

che impone  $\|\Delta(t)\| = \rho(t)$  per  $\|w(t)\| \neq 0$ .

Dalla (5.18), e scelta la funzione maggiorante  $\rho(t) \geq \eta(t)$  si ottiene

$$\begin{cases} w(t)^T(\eta(t) - \Delta(t)) \leq -\|w(t)\|(\rho(t) - \|\eta(t)\|) < 0 & , \|w(t)\| \neq 0 \\ w(t)^T(\eta(t) - \Delta(t)) = 0 & , \|w(t)\| = 0 \end{cases}$$

Da notare che una opportuna scelta per la funzione maggiorante può essere trovata sfruttando la (5.16)

$$\rho(t) \geq \alpha\|\Delta\| + \beta = \alpha\rho(t) + \beta$$

che conduce alla

$$\rho(t) \geq \frac{\beta}{1-\alpha} > 0,$$

significativa vista l'ipotesi preliminare  $\alpha < 1$ .

Si noti che la legge di controllo  $\Delta(t) = \rho(t) \frac{w(t)}{\|w(t)\|}$  è di tipo discontinuo, essendo infatti proporzionale alla derivata di un cono  $C = \sqrt{w(t)^T w(t)} \in \mathbf{R}^n$ . In  $\mathbf{R}^1$ ,  $\Delta$  è la funzione  $sign(w(t)) = \frac{w(t)}{|w(t)|} = \pm 1$ , che rappresenta il controllo *tutto-niente* (o *bang-bang*, o *a relay*).

Possono infine insorgere fenomeni di *chattering* nelle vicinanze della singolarità  $w(t) = 0$  che devono essere smorzati, ad esempio ponendo

$$\Delta = \rho(t) \frac{w(t)}{\sqrt{w(t)^T w(t) + \epsilon}}, \quad (5.19)$$

con  $\epsilon > 0$  piccolo. Si veda a tal proposito lo schema di controllo riportato in fig.5.5.

## 5.2.4 Controllo Adattivo alla Craig

Si scelga una coppia di controllo  $\tau$  della forma

$$\tau = \hat{B}(q) (\ddot{q}_d + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q}) + \hat{C}(q, \dot{q}) \dot{q} + \hat{G}(q) \quad (5.20)$$

dove  $\hat{B}(q)$ ,  $\hat{C}(q, \dot{q})$  rappresentano rispettivamente le stime delle matrici dinamica e di Coriolis, e  $\hat{G}(q)$  è la stima delle coppie gravitazionali del manipolatore, e si sostituisca nella dinamica (5.1). In tal modo si ottiene

$$\begin{aligned} B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) &= \hat{B}(q) (\ddot{q}_d + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q}) + \hat{C}(q, \dot{q}) \dot{q} + \hat{G}(q) \rightarrow \\ (B(q) - \hat{B}(q))\ddot{q} + (C(q, \dot{q}) - \hat{C}(q, \dot{q}))\dot{q} + (G(q) - \hat{G}(q)) &= \\ \hat{B}(q) (\ddot{\tilde{q}} + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q}) \rightarrow & \\ \hat{B}(q)^{-1} Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \tilde{\pi} = \ddot{\tilde{q}} + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q} & \end{aligned} \quad (5.21)$$

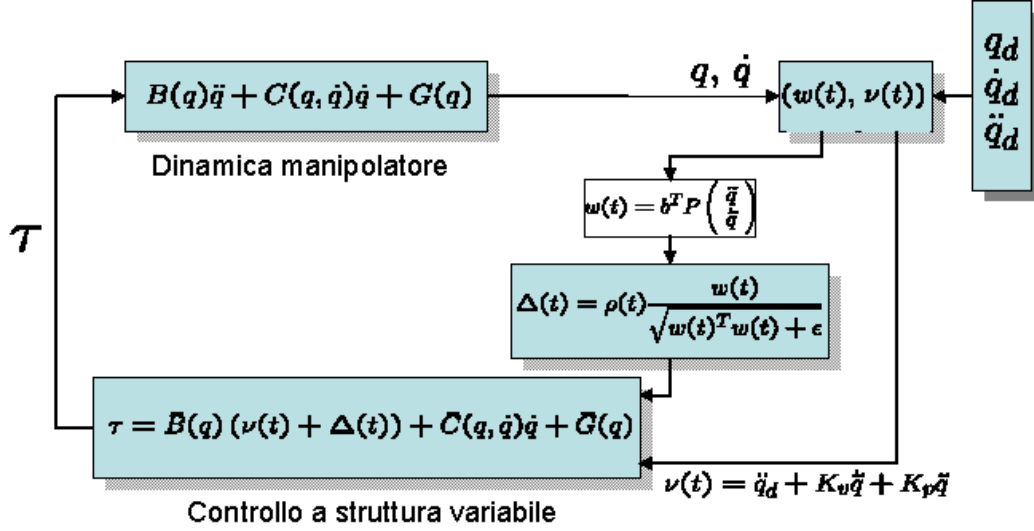


Figura 5.5: Schema di controllo a struttura variabile con la scelta (5.19) per  $\Delta(t)$ .

dove  $\tilde{\pi} = \pi - \hat{\pi}$  rappresenta l'errore di stima dei parametri dinamici, e avendo supposto l'invertibilità della stima  $\hat{B}(q)$  della matrice dinamica. Come evidenziato nella sezione 5.2.3, la dinamica dell'errore di posizione risulta affetta da un disturbo  $\eta = \hat{B}^{-1}(q) Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \tilde{\pi}$  che ne preclude l'asintotica convergenza a zero, e in alcuni casi la stabilità. Vedremo quindi come una scelta opportuna della dinamica  $\dot{\hat{\pi}}$  delle stime dei parametri dinamici garantisca la convergenza a zero dell'errore di stima. A tal proposito si sfrutta nuovamente il metodo diretto di Lyapunov.

Si esprima la (5.21) in forma di stato

$$\dot{\xi} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -K_p & -K_v \end{pmatrix} \xi + \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \hat{B}(q)^{-1} Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \tilde{\pi}$$

dove abbiamo posto  $\xi = (\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})^T$ , e si scelga la funzione di Lyapunov

$$V(t) = \frac{1}{2} \xi^T P \xi + \frac{1}{2} \tilde{\pi}^T R \tilde{\pi}.$$

che derivata rispetto al tempo porta a

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \frac{1}{2} \dot{\xi}^T P \xi + \frac{1}{2} \xi^T P \dot{\xi} - \tilde{\pi}^T R \dot{\tilde{\pi}} \rightarrow \\ \dot{V}(t) &= \frac{1}{2} \xi^T (A^T P + P A) \xi + \tilde{\pi} (Y^T(q, \dot{q}, \ddot{q}) \hat{B}^{-T}(q) (0, I) P \xi - R \dot{\tilde{\pi}}) \rightarrow \\ \dot{V}(t) &= -\frac{1}{2} \xi^T Q \xi + \tilde{\pi} (Y^T(q, \dot{q}, \ddot{q}) \hat{B}^{-T}(q) (0, I) P \xi - R \dot{\tilde{\pi}}), \end{aligned} \quad (5.22)$$

dove abbiamo sfruttato l'equazione di Lyapunov  $A^T P + PA = -Q$ ,  $Q > 0$ . A questo punto si nota che scegliendo la dinamica per le stime dei parametri

$$\dot{\hat{\pi}} = R^{-1} Y^T(q, \dot{q}, \ddot{q}) \hat{B}^{-T}(q) (0, I) P \xi \quad (5.23)$$

la (5.22) diventa

$$\dot{V}(t) = -\frac{1}{2} \xi^T Q \xi \leq 0.$$

Questa espressione implica che, con la scelta della coppia  $\tau$  in (5.20) e della dinamica per le stime (5.23), il sistema a ciclo chiuso tende asintoticamente alla configurazione di equilibrio  $\xi^T = (\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = (0, 0)$ , ma *non è garantita* la convergenza a zero dell'errore di stima  $\tilde{\pi}$ . A tal proposito mostriamo che l'errore di stima tende a zero solo per quelle traiettorie di riferimento che risultino *persistentemente eccitanti* per le dinamiche (5.23).

- **Condizione di eccitazione persistente**

Una funzione  $f(t)$  soddisfa la *condizione di eccitazione persistente* se

$$\int_t^{t+\delta} f(t)^T f(t) dt \geq \alpha I, \forall t, \quad (5.24)$$

dove  $\alpha, \delta > 0$ .

A tal proposito si nota che la (5.21) diventa, una volta raggiunto l'equilibrio (i.e.  $\langle \xi, \dot{\xi} \rangle = \langle 0, 0 \rangle$ ),

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \tilde{\pi}(t) = 0 \quad (5.25)$$

che non implica la convergenza a zero dell'errore di stima  $\tilde{\pi}(t)$ , basta infatti che  $\tilde{\pi}(t) \neq 0 \in \text{Ker}\{Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\}$ . Si può comunque notare che le dinamiche (5.23) delle stime dei parametri tendono a zero asintoticamente, vista l'asintotica convergenza a zero del vettore  $\xi$ , il che implica la costanza del vettore  $\tilde{\pi}(t) = \bar{\tilde{\pi}}$  per istanti temporali  $t$  grandi. Moltiplicando quindi la (5.25) per  $Y^T(q, \dot{q}, \ddot{q})$ , e integrandola in un intervallo temporale  $[t, t + \delta]$  si ottiene

$$\int_t^{t+\delta} Y^T(q, \dot{q}, \ddot{q}) Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) dt \bar{\tilde{\pi}} = 0$$

che ha come unica soluzione  $\bar{\tilde{\pi}} = 0$  se è vera la (5.24).

In conclusione, è importante sottolineare che il controllo di Craig, il cui schema è riportato in fig.5.6, è affetto da alcuni problemi, quali la necessità di retroazionare le accelerazioni di giunto e la non sempre garantita invertibilità della matrice  $\hat{B}(q)$ . Tali problemi verranno superati dallo schema di controllo adattivo proposto nel paragrafo successivo.



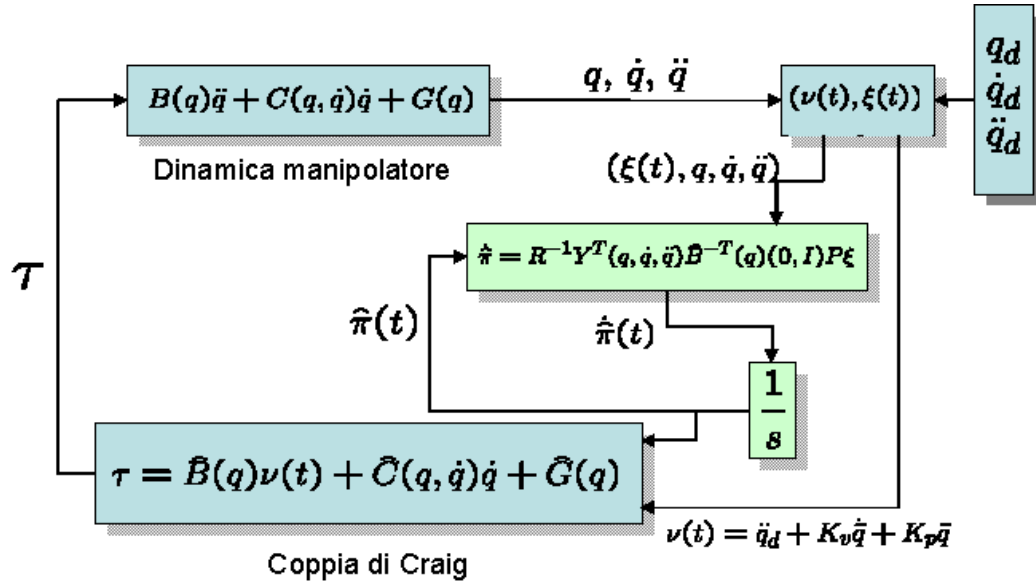


Figura 5.6: Schema di controllo adattivo alla Craig. In verde è evidenziata la parte relativa alla integrazione della dinamica della stima  $\hat{\pi}$  dei parametri dinamici.

### 5.2.5 Controllo Adattivo alla Li-Slotine

Per superare i limiti del controllo adattivo alla Craig, il controllo di Li-Slotine non si fonda sulla scelta di un controllo  $\tau$  del tipo a coppia calcolata, ma sfrutta la cosiddetta *velocità di riferimento*

$$\dot{q}_r = \dot{q}_d - \Lambda \tilde{q}$$

dove  $q_d$  è il riferimento di posizione dei giunti e  $\tilde{q} = q - q_d$  è il relativo errore di posizione. La differenza tra la velocità ai giunti  $\dot{q}$  e la velocità di riferimento  $\dot{q}_r$  è rappresentata da

$$s = \dot{q} - \dot{q}_r = \dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q}.$$

A questo punto si definisce una funzione

$$V(t) = \frac{1}{2} s^T B(q) s + \tilde{\pi}^T R \tilde{\pi},$$

dove in particolare  $R > 0$  e  $\tilde{\pi} = \pi - \hat{\pi}$ . Si noti che  $V(t)$ , che ha significato simile ad una candidata di Lyapunov, è soltanto *semi-definita positiva*, in quanto  $V(t) = 0 \rightarrow \tilde{\pi} = 0$ ,  $s = 0 \rightarrow \dot{\tilde{q}} = -\Lambda \tilde{q}$  che non implica  $(\dot{\tilde{q}}, \tilde{q}) = (0, 0)$ .

Passando comunque alla derivazione della  $V(t)$  si ottiene

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= s^T B(q)\dot{s} + \frac{1}{2}s^T \dot{B}(q)s - \tilde{\pi} R \dot{\hat{\pi}} \rightarrow \\ \dot{V}(t) &= s^T B(q)(\ddot{q} - \ddot{q}_r) + \frac{1}{2}s^T \dot{B}(q)s - \tilde{\pi} R \dot{\hat{\pi}} \rightarrow \\ \dot{V}(t) &= s^T (B(q)\ddot{q} - B(q)\ddot{q}_r) + \frac{1}{2}s^T \dot{B}(q)s - \tilde{\pi} R \dot{\hat{\pi}} \rightarrow \\ \dot{V}(t) &= s^T (\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q) - B(q)\ddot{q}_r) + \frac{1}{2}s^T \dot{B}(q)s - \tilde{\pi} R \dot{\hat{\pi}} \rightarrow \\ \dot{V}(t) &= s^T (\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q) - B(q)\ddot{q}_r) + \frac{1}{2}s^T \dot{B}(q)s - \tilde{\pi} R \dot{\hat{\pi}} \rightarrow\end{aligned}$$

e sommando e sottraendo il termine  $s^T C(q, \dot{q})s$  si giunge alla

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= s^T (\tau - C(q, \dot{q})\dot{q}_r - G(q) - B(q)\ddot{q}_r) - \tilde{\pi} R \dot{\hat{\pi}} \rightarrow \\ \dot{V}(t) &= s^T (\tau - Y(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)\pi) - \tilde{\pi} R \dot{\hat{\pi}}\end{aligned}\tag{5.26}$$

dove abbiamo supposto che la matrice  $C(q, \dot{q})$  sia stata calcolata utilizzando il metodo di Christoffel, che comporta  $s^T (\dot{B}(q) - 2C(q, \dot{q}))s = 0, \forall s$ .

Si scelga la coppia di controllo

$$\tau = \hat{B}(q)\ddot{q}_r + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q}_r + \hat{G}(q) - K_d s = Y(q, \dot{q}, \ddot{q}_r, \dot{q}_r)\hat{\pi} - K_d s$$

e la si sostituisca nella (5.26) ottenendo

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= s^T (Y(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)(\hat{\pi} - \pi) - K_d s) - \tilde{\pi} R \dot{\hat{\pi}} \rightarrow \\ \dot{V}(t) &= s^T Y(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)\tilde{\pi} - s^T K_d s - \tilde{\pi} R \dot{\hat{\pi}} \rightarrow \\ \dot{V}(t) &= \tilde{\pi}^T (-Y^T(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)s - K_d \dot{\hat{\pi}}) - s^T K_d s\end{aligned}$$

Scegliendo come dinamica per le stime  $\hat{\pi}$  la

$$\dot{\hat{\pi}} = -R^{-1}Y^T(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)s$$

si ottiene

$$\dot{V}(t) = -s^T K_d s \leq 0.$$

Al fine di garantire l'asintotica stabilità del sistema (i.e.  $(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \rightarrow (0, 0)$ ) è necessario mostrare che  $\dot{V}(t) \rightarrow 0$ . Infatti

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) = 0 &\rightarrow s = \dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q} = 0 \rightarrow \dot{\tilde{q}} = -\Lambda \tilde{q} \rightarrow \\ \tilde{q} &= \tilde{q}(0)e^{-\Lambda t}\end{aligned}$$

che impone  $(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \rightarrow (0, 0)$  per  $t \rightarrow \infty$ .

Poichè la  $V(t)$  non rappresenta una candidata di Lyapunov in senso stretto è necessario ricorrere ad un tecnicismo particolare, quale il

- **Lemma di Barbalat:**

Se la funzione differenziabile scalare  $V(t)$  soddisfa le seguenti condizioni

$$\begin{cases} V(t) \geq 0 \\ \dot{V}(t) \leq 0 \\ |\ddot{V}(t)| \leq M \end{cases} \quad (5.27)$$

in cui la terza condizione assicura l'uniforme continuità della  $\dot{V}(t)$ , allora  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(t) = 0$ .

Nel nostro caso è facile notare che la  $\ddot{V}(t)$  risulta inferiormente limitata. Infatti

$$\ddot{V}(t) = -2s^T K_d \dot{s} = -2(\dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q})^T K_d (\ddot{\tilde{q}} + \Lambda \dot{\tilde{q}}),$$

e le funzioni  $(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \ddot{\tilde{q}})$  da cui dipende sono limitate. Abbiamo quindi mostrato che il controllo proposto garantisce l'inseguimento asintotico dei riferimenti di posizione da parte dei giunti (resta il fatto che non garantisce l'asintotica convergenza a zero degli errori di stima, si veda a tal proposito i risultati riportati in 5.2.4).

Come anticipato, il controllo adattivo proposto (vedasi fig.5.7) risulta una tecnica di controllo adattivo preferibile allo schema presentato in 5.2.4, non richiedendo la retroazione della accelerazione  $\ddot{q}$  di giunto (in genere affetta da rumore), e principalmente l'inversione della stima della matrice dinamica  $\hat{B}(q)$ .

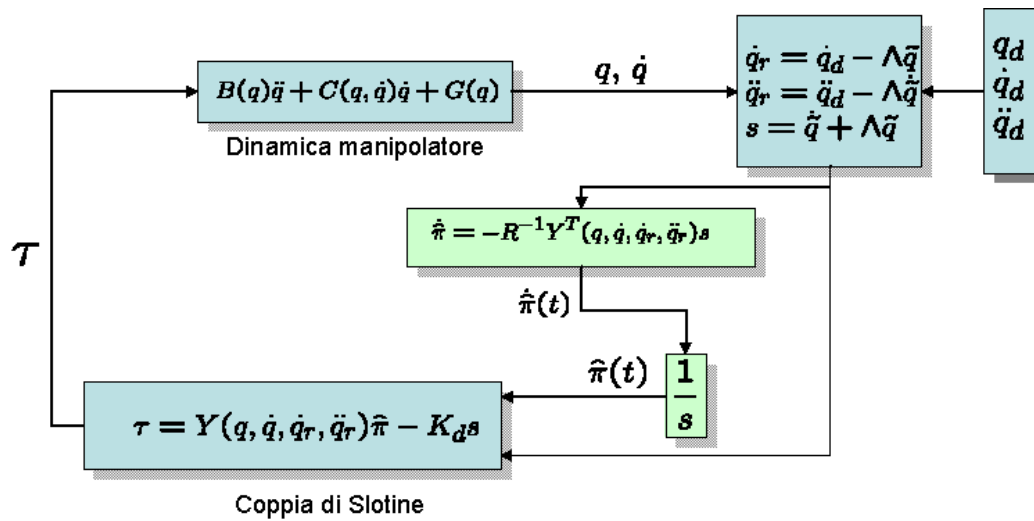


Figura 5.7: Schema di controllo adattivo alla Li-Slotine.



# Capitolo 6

## Sistemi Nonlineari

### 6.1 Scatola degli attrezzi matematici

Per studiare i sistemi nonlineari sono necessari alcuni strumenti matematici diversi da quelli della teoria dei sistemi lineari, che spesso ne sono una generalizzazione.

Si seguirà un approccio utilitaristico all'apprendimento di alcuni di questi strumenti rimandando a testi specialistici le definizioni e le dimostrazioni più rigorose.

Con qualche sacrificio di generalità si tratteranno solo sistemi affini nel controllo, cioè nella forma :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g_1(x)u_1(t) + g_2(x)u_2(t) + \cdots + g_m(x)u_m(t) \\ y = h(x) \end{cases}$$

Il vettore di stato  $\underline{x}$  è un elemento di uno spazio a  $n$  dimensioni. Il termine di *deriva*,  $f(x)$  è quindi un vettore di  $n$  funzioni in  $n$  variabili. Lo stesso vale per  $g_i(x)$ . Questi vettori di funzioni sono chiamati **campi vettoriali**.

Nel modello considerato, vi sono  $m$  campi vettoriali di ingresso  $g_1(x) \cdots g_m(x)$ , associati a funzioni  $u_1(t) \cdots u_m(t)$  che fungono da **controlli** del sistema. Sulle  $u_i(t)$  si assumerà che siano almeno **continue a tratti** a volte si chiederà la continuità o la differenziabilità.

Nello studio dei sistemi non lineari di nostro interesse, è frequente il caso che l'insieme delle configurazioni da rappresentare non sia semplicemente  $\mathbb{R}^n$ , spazio delle  $n$ -uple di numeri reali (ciò che avviene nei sistemi lineari). Più generalmente dovremo supporre che  $x \in M$ , dove  $M$  è una superficie curva a  $n$  dimensioni, immersa in uno spazio  $\mathbb{R}^N$  con  $N \geq n$ .

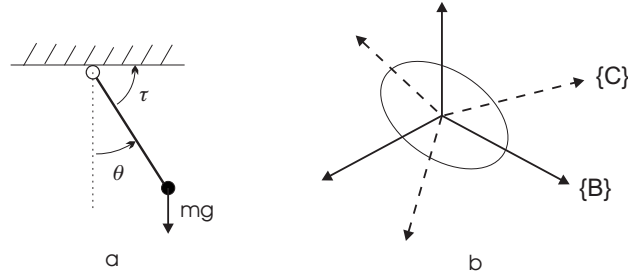


Figura 6.1: Esempi di sistemi meccanici

**Esempio** Si consideri il semplice pendolo riportato in figura

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \in S^1 \times \mathbb{R}^1 \neq \mathbb{R}^2 \quad S^1 = \mathbb{R} \pmod{2\pi}$$

$$ml^2\ddot{\theta} = mgl \sin(\theta) + \tau \quad \begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{g}{l} \sin x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} \tau$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{g}{l} \sin x_1 \end{bmatrix} \quad g_1(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix}$$

**Esempio** Rotazioni di corpo rigido;

L'orientazione del corpo C, che ruota attorno al centro del riferimento {B} è descritto dalla orientazione della terna {C} rispetto a {B}. La matrice di rotazione espressa in termini dei versori principali delle due terne,  $\underline{i} \underline{j} \underline{k}$ , descrive completamente tale orientazione.

$${}^B R^C = \begin{bmatrix} i_C^T i_B & j_C^T i_B & k_C^T i_B \\ i_C^T j_B & j_C^T j_B & k_C^T j_B \\ i_C^T k_B & j_C^T k_B & k_C^T k_B \end{bmatrix}$$

$${}^B R_C = \left[ {}^B i_C : {}^B j_C : {}^B k_C \right]$$

I nove parametri che appaiono in  $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  sono ovviamente ridondanti per esprimere l'orientazione. Valgono infatti le relazioni:

$$\begin{cases} {}^B i_C^T {}^B i_C = {}^B j_C^T {}^B j_C = {}^B k_C^T {}^B k_C = 1 \\ {}^B i_C^T {}^B j_C = {}^B i_C^T {}^B k_C = {}^B j_C^T {}^B k_C = 0 \end{cases}$$

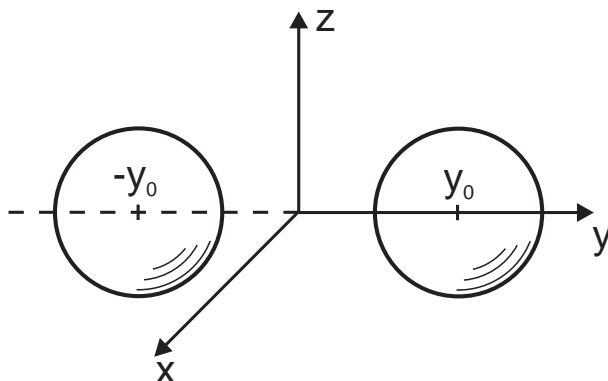


Figura 6.2: Esempio

equivalenti alla relazione di ortonormalità matriciale

$$RR^T = I \Rightarrow R^T = R^{-1}$$

Vi è per il vero una ulteriore relazione che impone che la terna  $\{C\}$  sia destrorsa, cioè  ${}^B i_C \times {}^B j_C = {}^B k_C$  (nota che le relazioni precedenti già implicano  ${}^B i_C \times {}^B j_C = \pm {}^B k_C$ , quindi questa relazione impone solo il **segno** di  ${}^B k_C$  . In termini matriciali, questo vincolo si esprime come  $\det R = 1$ . Le sei relazioni tra le nove variabili definiscono una superficie in  $\mathbb{R}^9$  a due componenti non connesse analogamente a quanto l'equazione seguente fa in  $\mathbb{R}^3$ :  $x^2 + (y \pm y_0)^2 + z^2 = R^2$ .

La relazione  $\det R = 1$  sceglie una delle due falde sulla quale il punto rappresentativo "vive" (v.fig. 1.6)

La dimensione della superficie è  $9 - 6 = 3$  ( nell'esempio delle sfere ho  $3 - 1 = 2$  ). Ciò induce a pensare che esistano descrizioni della orientazione di una terna più compatte, che usino solo tre parametri. Tali sono ad esempio gli angoli di Eulero, di Roll Pitch Yaw, etc. Nell'analogia con la sfera in  $\mathbb{R}^3$ , questo significherebbe prendere 2 parametri ( ad esempio, latitudine e longitudine ) per rappresentare i punti della sfera. In tal modo ad ogni coppia di parametri corrisponde uno ed un solo punto sulla sfera; non vale il viceversa per il polo nord e il polo sud. L'identificazione dello spazio dei parametri ( $\mathbb{R}^3$ ) e la sfera ( $S^2$ ) non è quindi perfetto. Lo stesso succede per le rappresentazioni minime delle orientazioni, che necessariamente presentano singolarità. Ovviamente è possibile usare due rappresentazioni delle orientazioni con singolarità in configurazioni diverse , e cambiare rappresentazione nei pressi di una singolarità secondo opportunità. Questo è il concetto alla base delle definizioni della **geometria delle varietà** o **manifolds** regolari.

Un *manifold* può essere visto come uno spazio, o varietà a  $n$  dimensioni, inserito in uno spazio più vasto  $\mathbb{R}^m$   $m \geq n$ , ma tale che, per ogni suo punto, esista una funzione "carta" che mappi un intorno del punto in un dominio di  $\mathbb{R}^n$  in modo continuo e invertibile.

Consideriamo uno spazio  $M$  (manifold) (v.fig. 1.7). Supponiamo che  $\forall p \in M$  esista un insieme aperto  $U \subset M$  (contenente  $p$ ) e una bijezione  $\varphi$  che mappa  $U$  in un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$ . Su  $\mathbb{R}^n$  abbiamo le funzioni delle coordinate naturali per cui

$$r_i(a_1, \dots, a_n) = a_i \quad i \in \{1 \dots n\}$$

Attraverso la composizione con  $\varphi$  otteniamo le funzioni di coordinate

$$x_i = r_i \circ \varphi$$

in questo modo una griglia definita su  $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$  attraverso le funzioni di coordinate  $r_i$  si trasforma in una griglia su  $U \subset M$ .

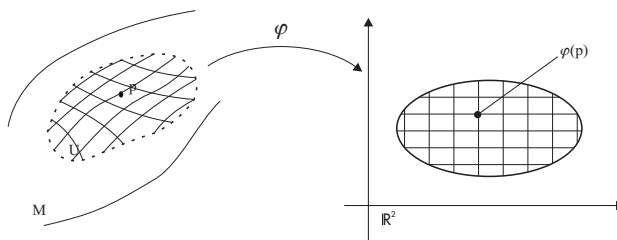


Figura 6.3: Manifolds e carta delle coordinate

L'insieme aperto  $U$  e la mappa  $\varphi$  sono dette Carta delle coordinate e hanno la seguente proprietà :

$\forall (U, \varphi)$   $\varphi$  è un omeomorfismo cioè  $\varphi$  e  $\varphi^{-1}$  sono continue. Quindi possiamo dire che un generico sistema non lineare può essere espresso nella seguente forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases}$$

dove  $f$  e  $h$  sono mappe definite su un insieme aperto  $U$  del manifold dello spazio di stato. Qualora si voglia studiare il sistema in un punto non appartenente a  $U$  occorre scegliere una nuova carta delle coordinate che ne cambia la rappresentazione. Verranno scelti infatti un nuovo insieme  $V \in M$  che contiene il punto in studio e due nuove mappe  $\bar{f}$  e  $\bar{h}$ . Può succedere che due diverse carte siano definite su insiemi la cui intersezione non è nulla quindi è necessaria una certa "compatibilità". Questo vuol dire che se ho



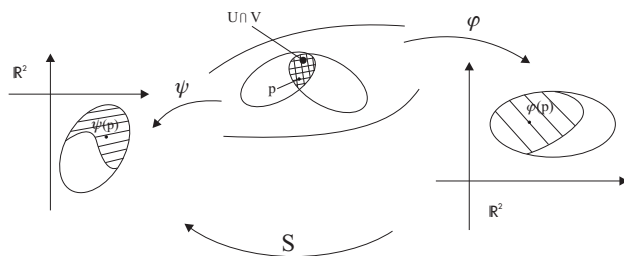


Figura 6.4: Trasformazione tra carte delle coordinate

una carta  $(U, \varphi)$  e una carta  $(V, \psi)$  con  $U \cap V \neq \emptyset$  la mappa  $S = \psi \circ \varphi^{-1}$  è  $C^\infty$  (smooth) (v.fig. 1.8).

$S$  è una trasformazione di coordinate da  $x = (x_1, \dots, x_n)$  a  $z = (z_1, \dots, z_n)$  con  $x_i = r_i \circ \varphi$  e  $z_i = r_i \circ \psi$  quindi possiamo scrivere  $z_i = S_i(x_1, \dots, x_n)$ .  $M$  con le sue carte delle coordinate  $C^\infty$  è detto smooth manifold o varietà regolare.

**Def:** un sottoinsieme  $P \subset M$  è chiamato Submanifold di dimensione  $m < n$  se  $\forall p \in P$  esiste una carta delle coordinate per  $M$  tale che

$$P \cap U = \{q \in U, x_i(q) = x_i(p), i = m + 1, \dots, n\}$$

Gli strumenti della teoria dei manifolds sono preziosi per studiare le proprietà globali dei sistemi non lineari che evolvono su spazi di struttura geometrica complessa. In ogni modo, nel seguito, ci limiteremo a considerare l'evoluzione di sistemi in intorno del punto iniziale che siano "piccoli" abbastanza da non coinvolgere cambiamenti di carte. Fissata una carta, cioè un sistema di coordinate, potremo dunque studiare il sistema attraverso la sua immagine su  $\mathbb{R}^n$ .

**Def:** sia data una funzione  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Una funzione è  $C^k$  se è  $k$  volte differenziabile e continua nelle sue derivate. Se una funzione è  $C^k \forall k$  allora si dice liscia ( $f \in C^\infty$ ). Inoltre  $f$  si dice analitica ( $f \in C^\omega$ ) se è espandibile in serie di potenze (di Taylor) in ogni suo argomento su ogni punto di  $A$ .

Ricordiamo dall'analisi che esistono funzioni lisce ma non analitiche. Ad esempio:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Noi assumeremo che le funzioni che appaiono nelle definizioni dei sistemi nonlineari con cui trattiamo siano analitiche. Una eccezione si avrà nel caso di funzioni di ingresso costanti a tratti, che ovviamente non sono analitiche.

Torniamo a considerare il sistema :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g_1(x)u_1(t) + g_2(x)u_2(t) + \cdots + g_m(x)u_m(t) \\ y = h(x) \end{cases}$$

dove le funzioni vettoriali  $f(\cdot)$  e  $g_i(\cdot)$  sono assunte essere mappe in  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  regolari (cioè  $C^\infty$ ) su tutto il dominio dello spazio di stato di nostro interesse. Inoltre, le funzioni  $h_i(\cdot)$  sono assunte essere mappe  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^1$  regolari anch'esse.

Nello studio dei sistemi nonlineari di nostro interesse incontriamo tre oggetti fondamentali:

**1 - Funzioni dello stato**, che associano agli stati valori nei reali:

$$\begin{aligned} \lambda : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto \lambda(p) \end{aligned}$$

In coordinate locali ( $p = \phi(x)$ ) la funzione (che continuiamo a chiamare con lo stesso nome) associa al vettore di stato uno scalare:  $\lambda : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \lambda(x) \in \mathbb{R}$ .

**Esempio:** Un vincolo olonomo su un sistema meccanico descritto dal vettore di configurazione generalizzata  $q$ , è scritto come una funzione dello stato  $C(q) = 0$ .

**2 - Campi vettoriali**, che associano agli stati vettori dello spazio tangente alla varietà:

$$\begin{aligned} f : M &\rightarrow TM \\ p &\mapsto f(p) \end{aligned}$$

In ogni punto  $p \in M$ ,  $f(p) \in T_p M$  è un elemento dello spazio tangente alla superficie  $M$  in  $p$  ( $TM$  denota l'insieme degli spazi  $T_p M$  tangenti a  $M$  in  $p$ , al variare di  $p \in M$ ). In coordinate locali si ha  $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto f(x) \in \mathbb{R}^n$ . In questo caso, scriveremo i campi vettoriali in notazione matriciale come vettori colonna.

**Esempio:** Si consideri la equazione differenziale

$$\dot{x} = f(x, x(0) = x_0.$$

Il campo vettoriale  $f(x)$  può essere visto come il vettore "velocità" associato alla traiettoria  $\Phi(t, x_0)$  che risolve la equazione differenziale, cioè tale per cui

$$\frac{d\Phi}{dt} = f(\Phi) ; \Phi(0, x_0) = x_0.$$

Si noti che anche se, in coordinate, gli spazi di dominio e codominio dei campi vettori possono essere entrambe descritti come  $\mathbb{R}^n$ , la natura dei due spazi può essere ben diversa. Ad esempio, nella descrizione del moto di un

punto, il dominio è un insieme di punti, mentre il codominio è un insieme di vettori.

**3 - Campi covettoriali**, che associano agli stati elementi dello spazio cotangente alla varietà:

$$\begin{aligned} \omega : M &\rightarrow T^*M \\ p &\mapsto \omega(p) \end{aligned}$$

Lo spazio cotangente  $T^*M$  denota l'insieme di tutti degli spazi  $T_p^*M$  cotangenti ad  $M$  nei punti  $p \in M$ . Questi spazi sono formati da applicazioni che associano ad un campo vettore dello spazio tangente una funzione scalare. In altri termini, un covettore  $\omega(p) \in T_p^*M$  associa ad ogni vettore  $f(p) \in T_pM$  uno scalare  $\mu(p) = \langle \omega(p), f(p) \rangle$ .

In coordinate locali si ha  $\omega : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \omega(x) \in \mathbb{R}^n$ . Per sfruttare la notazione matriciale, esprimeremo i covettori come vettori riga. In questo modo, lo scalare ottenuto dalla applicazione di un covettore ad un vettore si valuta con la consueta convenzione del prodotto riga per colonna:

$$\mu(x) = \omega(x)f(x) = \sum_{i=1}^n \omega_i(x)f_i(x)$$

**Esempio:** La operazione di gradiente su una funzione scalare  $V(x)$  risulta in un covettore

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \left[ \frac{\partial V(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \right]$$

Pertanto, se  $m$  vincoli geometrici  $C(q) = 0$  sono espressi in forma cinematica, cioè scrivendo  $\frac{\partial C}{\partial q} \dot{q} = A(q)\dot{q} = 0$ , la matrice dei vincoli  $A(q) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  può essere vista come una collezione di  $m$  covettori.

Si noti che possono essere dati campi covettoriali che *non* derivano da una operazione di gradiente quale quella sopra indicata: questo è il caso dei vincoli anolonomi.

Un particolare campo covettoriale  $\omega(x) = [\omega_1(x), \dots, \omega_n(x)]$  che (eventualmente moltiplicato per un opportuno fattore integrante  $\nu(x)$ ) corrisponda al gradiente di qualche funzione  $\lambda(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , viene detto *integrabile*, ovvero che è un *differenziale esatto*.

Una condizione necessaria e sufficiente perché  $\omega(x)$  sia un differenziale esatto è che

$$\frac{\partial \omega_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j(x)}{\partial x_i} \quad (6.1)$$

**Esempio:** Per un veicolo nel piano con configurazioni  $q = [x, y, \theta]$ , un vincolo che impone la costanza della orientazione  $\theta = 0$  può venire descritto

da  $A(q)\dot{q} = 0$ , con  $A(q)$  un covettore

$$A(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

che verifica la condizione (6.1), ed è ovviamente integrabile nella forma  $C(q) = \theta - \theta_0 = 0$  con  $\theta_0$  costante arbitraria.

Nel vincolo di un unicyclo appare invece il covettore

$$A(q) = \begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta & 0 \end{bmatrix}$$

che non verifica la condizione (6.1), e pertanto non è integrabile (sappiamo che il vincolo è anolonomo).

• La condizione (6.1) si applica solo al caso di un solo covettore, mentre si possono avere sistemi meccanici sottoposti a più vincoli contemporaneamente, che possono combinarsi in modo non ovvio. Si consideri ad esempio il sistema costituito da un unicyclo con il vincolo aggiuntivo che la sua direzione di marcia sia costante, cioè

$$A(q) = \begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

In questo esempio, i due vincoli (che separatamente considerati sono rispettivamente anolonomo e olonomo) se posti insieme sono entrambe integrabili, quindi olonomi. Il numero di configurazioni indipendenti necessarie a descrivere il sistema è infatti ridotto a uno (il sistema può essere visualizzato come in moto su un binario rettilineo).

Per saper distinguere vincoli anolonomi da vincoli olonomi in forma cinematica, sarà necessario trovare condizioni più generali.

Definiamo ora alcune operazioni su funzioni e campi in  $\mathbb{R}^n$  di utilità nello studio di sistemi non lineari:

1. **Derivata di una funzione lungo un campo vettoriale** Data una funzione scalare  $\lambda(x)$  e un campo vettoriale  $f(x)$ , si definisce *derivata direzionale di  $\lambda(x)$  lungo  $f(x)$*  la funzione scalare

$$L_f\lambda(x) = \frac{\partial\lambda}{\partial x}f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\lambda}{\partial x_i}f_i(x)$$

2. **Prodotto di Lie (o Lie Bracket)** Con questo nome viene indicata comunemente la derivata direzionale di un campo vettoriale lungo un campo vettoriale (la notazione corrispondente  $L_f g$  è poco usata). Il

prodotto di Lie associa a due campi vettoriali  $g_1(x)$ ,  $g_2(x)$  un terzo campo  $g_3(x) = [g_1, g_2]$  dove

$$[g_1, g_2] = \frac{\partial g_2(x)}{\partial x} g_1(x) - \frac{\partial g_1(x)}{\partial x} g_2(x)$$

Si noti che  $\frac{\partial g_i(x)}{\partial x}$  rappresenta, per ogni  $x$ , una matrice (Jacobiana)  $n \times n$ .

Oltre che col simbolo  $[\cdot, \cdot]$  il prodotto di Lie può essere indicato con

$$[f(x), g(x)] = ad_f g(x)$$

in modo da condensare l'espressione di una Lie bracket iterata

$$\overbrace{[f, [f, [\dots [f, g]]]]}^{k \text{ volte}} = ad_f^k g(x)$$

### 3. Derivata di un campo covettoriale lungo un campo vettoriale

Associa a un campo covettoriale  $\omega(x)$  e ad un campo vettoriale  $f(x)$  un nuovo campo covettoriale definito come

$$L_f \omega = f^T \left[ \frac{\partial \omega^T}{\partial x} \right]^T + \omega \frac{\partial f}{\partial x}$$

Tra i precedenti operatori, le Lie-Brackets hanno un ruolo fondamentale nello studio dei sistemi nonlineari. Esse possiedono alcune proprietà la cui conoscenza si rivela utile:

1. **proprietà di bilinearità:** per ogni  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  vale

$$[\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g_1] = \alpha_1 [f_1, g_1] + \alpha_2 [f_2, g_1]$$

$$[f_1, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2] = \alpha_1 [f_1, g_1] + \alpha_2 [f_1, g_2]$$

2. **proprietà di anticommutatività**

$$[f, g] = -[g, f]$$

3. **identità di Jacobi**

$$[f, [g, h]] + [h, [f, g]] + [g, [h, f]] = 0$$

Vale inoltre la seguente relazione per Lie-Brackets tra campi moltiplicati per funzioni scalari:

$$[\alpha(x)g_1(x), \beta(x)g_2(x)] = \alpha\beta[g_1, g_2] + \alpha L_{g_2}\beta g_1 - \beta L_{g_1}\alpha g_2$$

Consideriamo per esempio alcune funzioni, campi vettoriali e covettoriali lineari:

$$\begin{aligned}\lambda(x) &= c^T x, \quad c \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ f(x) &= Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ g(x) &= Bx, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ \omega(x) &= x^T C, \quad C \in \mathbb{R}^{n \times n}\end{aligned}$$

Si ha

$$\begin{aligned}L_f \lambda(x) &= \frac{\partial \lambda}{\partial x} f = c^T Ax \\ [f, g] &= \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g = (BA - AB)x \\ [g, f] &= (AB - BA)x = -[f, g] \\ L_f \omega &= f^T \left[ \frac{\partial \omega^T}{\partial x} \right]^T + \omega \frac{\partial f}{\partial x} = x^T (A^T C + CA)\end{aligned}$$

Consideriamo adesso il modello dell'uniciclo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2 \\ \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2\end{aligned}$$

La Lie bracket di  $g_1(x)$  con  $g_2(x)$  è data da

$$[g_1, g_2] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} g_1 - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & \cos(\theta) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\theta) \\ -\cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si ha poi

$$[g_1, [g_1, g_2]] = \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & \cos(\theta) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui

$$[g_1, [g_1, g_2]] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos(\theta) \\ 0 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 0$$

$$[g_2, [g_1, g_1]] = \left[ g_2, \frac{\partial g_1}{\partial x} g_1 - \frac{\partial g_1}{\partial x} g_1 \right] = 0$$

verificando così l'**identità di Jacobi**. Inoltre si ha :

$$[g_2, [g_1, g_2]] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos(\theta) \\ 0 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[g_2, [g_2, g_1]] = -[g_2, [g_1, g_2]]$$

$$[g_1, [g_2, g_2]] = 0$$

## 6.2 Distribuzioni e Codistribuzioni

Ad un numero  $d$  di campi vettoriali  $g_1(p), \dots, g_d(p)$ , in un punto  $p \in M$ , corrisponde un sottospazio dello spazio tangente descritto da

$$\Delta(p) = \text{span} [g_1(p), \dots, g_d(p)] \subset T_p M$$

In coordinate si ha analogamente

$$\Delta(x) = \text{span} (g_1(x), \dots, g_d(x)) \subset \mathbb{R}^n$$

L'insieme di tutti i sottospazi  $\Delta$  forma una *distribuzione* su  $M$ .

La *dimensione* di una distribuzione in un punto  $p$  è pari alla dimensione del sottospazio  $\Delta(p)$ , ovvero, in coordinate, al rango della matrice :

$$G(x) = [g_1(x), \dots, g_d(x)]$$

Una distribuzione può essere identificata con lo spazio immagine di  $G(x)$ , dove si pensi a combinazioni lineari delle sue colonne con coefficienti che possono essere funzioni dello stato  $x$ .

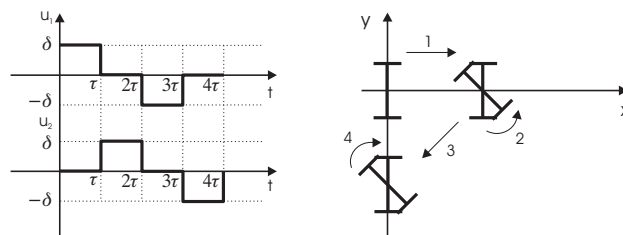


Figura 6.5: Veicolo su due ruote

Una distribuzione si dice **non singolare** su un dato insieme aperto di  $M$  se la sua dimensione è costante in ogni punto dell'insieme.

Un punto di  $M$  è detto *regolare* se  $\Delta(p)$  è non singolare in un suo intorno, altrimenti è detto punto di *singolarità*.

Se la dimensione di  $M$  è  $n$ , si dice che  $\Delta(p)$  ha *codimensione*  $n - d$ .

Una distribuzione generata dai vettori di controllo di un sistema del tipo

$$\dot{x} = g_1(x)u_1 + \cdots + g_m(x)u_m$$

ha l'evidente significato di individuare, in ogni punto  $x$ , il sottospazio a cui appartengono i vettori tangenti alle traiettorie seguite dal sistema quando  $u_1(t) = u_2(t) = \cdots = u_{k-1}(t) = 0$ ,  $u_k(t) = \bar{u}_k \neq 0$ ,  $u_{k+1}(t) = \cdots = u_m(t) = 0$ , al variare di  $k$ . Di conseguenza la distribuzione di controllo contiene "direzioni di moto" che, almeno in piccolo, possono essere realizzate dal sistema, scegliendo opportune combinazioni degli ingressi.

Una distribuzione di controllo può però non contenere *tutte* le possibili direzioni di moto. Si consideri ad esempio il modello cinematico di un unicycle. La distribuzione dei vettori di controllo è

$$\Delta(x) = \text{span} \left\{ \begin{array}{cc} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\}$$

ed è ovviamente regolare ovunque, con dimensione 2, codimensione 1. Le direzioni di moto rese possibili dai vettori appartenenti alla distribuzione di controllo coincidono con quelle possedute dal modello linearizzato approssimato nel punto considerato.

Si pensi ora di applicare ingressi della forma riportata in figura a partire dalla configurazione  $q_0 = (x = 0, y = 0, \theta = 0)$ .

Integrando le equazioni cinematiche



$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2$$

si ottiene facilmente

$$\begin{cases} x(\tau) = \delta\tau \\ y(\tau) = 0 \\ \theta(\tau) = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x(2\tau) = \delta\tau \\ y(2\tau) = 0 \\ \theta(2\tau) = \delta\tau \end{cases} ; \begin{cases} x(3\tau) = -\sin(\delta\tau) + \delta\tau \\ y(3\tau) = \cos(\delta\tau) - 1 \\ \theta(3\tau) = \delta\tau \end{cases}$$

e infine

$$\begin{cases} x(4\tau) = -\sin(\delta\tau) + \delta\tau \\ y(4\tau) = \cos(\delta\tau) - 1 \\ \theta(4\tau) = 0 \end{cases}$$

Consideriamo ora il caso di piccoli ingressi e/o intervalli temporali  $\tau$  brevi, così che  $\delta\tau \rightarrow 0$ . Sviluppando in serie di Taylor fino al secondo ordine si ha:

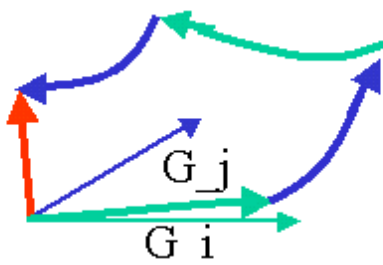
$$\begin{cases} x(4\tau) = 0 + [(1 - \cos(\delta\tau))]_{\delta\tau=0} \delta\tau + \frac{\delta^2 \tau^2}{2} [\sin \delta\tau]_{\delta\tau=0} + O(\delta^3 \tau^3) = O(\delta^3 \tau^3) \\ y(4\tau) = 0 + [-\sin(\delta\tau)]_{\delta\tau=0} \delta\tau + \frac{\delta^2 \tau^2}{2} [-\cos(\delta\tau)]_{\delta\tau=0} + O(\delta^3 \tau^3) = -\frac{\delta^2 \tau^2}{2} + O(\delta^3 \tau^3) \end{cases}$$

Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al secondo è possibile vedere che, pur localmente, (cioè con moti arbitrariamente piccoli), il movimento risultante del veicolo è stato nella direzione del vettore

$$\begin{bmatrix} x(4\tau) \\ y(4\tau) \\ \theta(4\tau) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ \theta(0) \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

che **non** risulta contenuto in  $\Delta(x(0))$ :

$$\Delta(x_0) = \text{span} \left[ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right]$$



Osserviamo — per ora solo incidentalmente — che la direzione del moto in cui é evoluto il sistema all'istante  $4\tau$  é invece contenuta in

$$[g_1, g_2] = \begin{bmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}_{(0,0,0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ci chiediamo, piú generalmente, se da un punto  $x_0$  possiamo muoverci lungo direzioni non contenute in  $\Delta(x_0)$ . Questo é possibile come visto nell'esempio: l'idea base é quella di scegliere opportune combinazioni degli ingressi  $u_1, \dots, u_m$  in modo da *commutare* i campi vettoriali  $g_1, \dots, g_m$  (vedi figura).

Si osservi il fatto importante che il moto nella direzione della Lie bracket, esterna al sottospazio di raggiungibilitá del sistema linearizzato, é stato ottenuto senza allontanarsi da un intorno del punto iniziale, ed infatti risulta da una analisi locale.

L'osservazione fatta nell'esempio dell'uniciclo ha valore piú generale: si può dimostrare con facili passaggi che applicando ingressi alternati del tipo sopra descritto al sistema

$$\dot{x} = g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2$$

e utilizzando il fatto che soluzioni di  $\dot{x} = g_i(x)u_i$ ,  $x(0) = x_0$  possono essere scritte come

$$x(t) = x(0) + \dot{x}(0)t + \ddot{x}(0)\frac{t^2}{2} + O(t^3) = x(0) + g_i(x_0)t + \frac{t^2}{2} \left. \frac{\partial g_i}{\partial x} \right|_{x_0} g_i(x_0) + O(t^3)$$

si ha che

$$x(4\tau) = x_0 + [g_1, g_2]_{x=x_0} \frac{\delta^2 \tau^2}{2} + O(\delta^3 \tau^3)$$

Questo significa che in prima approssimazione possiamo muovere il sistema da  $x_0$  lungo direzioni stabilite dal vettore generato dalla Lie bracket  $[g_1, g_2]$  calcolato in  $x_0$ .

(il calcolo di questo risultato è facilitato se, senza perdere generalità, si assumono coordinate per il sistema tali per cui uno dei campi vettori sia costante.)

Questo non è tutto perché il termine  $O(\tau^3)$ , se sviluppato, contiene le Lie brackets composte come

$$[g_1, [g_1, g_2]], [[g_1, g_2], [g_1, [g_1, g_2]]], \text{ etc.}$$

queste generano direzioni di moto che possono essere prese dal sistema commutando opportunamente gli ingressi.

Nel caso in cui consideri sistemi in cui il termine di deriva  $f$  non è nullo devo considerare anche le Lie brackets che lo interessano.

In un certo senso la Lie bracket di due campi vettoriali misura la loro *non commutatività*; è evidente che questo operatore differenziale giocherà un ruolo importante nei problemi di controllabilità.

Una distribuzione si dice **involutiva** se la Lie bracket di qualsiasi due campi vettoriali che le appartengono, le appartiene ancora; cioè se

$$\tau_1(x) \in \Delta(x) ; \tau_2(x) \in \Delta(x) \Rightarrow [\tau_1, \tau_2] \in \Delta(x)$$

Nell'esempio precedente  $\Delta_1(x) = \text{span} \left\{ \begin{array}{l} \cos(\theta) \quad \vdots \quad 0 \\ \sin(\theta) \quad \vdots \quad 0 \\ 0 \quad \quad \quad \vdots \quad 1 \end{array} \right\}$  non è involutiva.

È invece involutiva la distribuzione

$$\Delta_2(x) = \text{span} \{g_1, g_2, [g_1, g_2]\} = \text{span} \left\{ \begin{array}{l} \cos(\theta) \quad \vdots \quad 0 \quad \vdots \quad \sin(\theta) \\ \sin(\theta) \quad \vdots \quad 0 \quad \vdots \quad -\cos(\theta) \\ 0 \quad \quad \quad \vdots \quad 1 \quad \vdots \quad 0 \end{array} \right\}$$

come si constata facilmente osservando che  $\Delta_2(x)$  ha dimensione 3 in ogni punto dello spazio di stato.

La condizione che il rango della matrice associata ad una distribuzione sia pieno non è comunque necessaria: ad esempio, qualsiasi distribuzione generata da campi vettoriali costanti è certamente involutiva, essendo  $[a, b] = 0$ ,  $a, b = \text{costanti}$ .

Altro caso particolare, le distribuzioni generate da un solo campo vettoriale  $\Delta(x) = \text{span} \{g_1(x)\}$  sono ovviamente involutive, in quanto

$$[ag_1(x), bg_1(x)] = 0, \forall a, b \in \mathbb{R}^1$$

Data una distribuzione  $\Delta(x)$ , risulta naturale introdurre il concetto di **chiusura involutiva** di  $\Delta(x)$ , come la distribuzione minima che contiene  $\Delta(x)$  e che è involutiva.

L'oggetto analogo delle distribuzioni per i campi covettoriali è definito **codistribuzione**. Indicheremo con

$$\Omega(p) = \text{span} \{ \omega_1(p), \dots, \omega_l(p) \}$$

la codistribuzione associata ai covettori  $\omega_1(p), \dots, \omega_l(p)$ , cioè l'insieme di tutti i covettori formati per combinazione lineare (a coefficienti funzioni dello stato) dei covettori dati.

In coordinate, le codistribuzioni possono essere identificate con lo **spazio-riga** di una matrice che per righe ha le  $\omega_i$ .

È naturale pensare una analogia al noto teorema dell'algebra lineare, per il quale, per ogni matrice costante A, vale

$$N(A^T) = R(A)^\perp$$

$$N(A) = R(A^T)^\perp$$

dove  $\perp$  indica il complemento ortogonale di un sottospazio. Similarmente per una distribuzione  $\Delta(x)$  si definisce il suo **annichilatore**

$$\Delta^\perp(x) = \{ \omega : \omega v = 0, v \in \Delta(x) \}$$

cioè l'insieme dei covettori che danno prodotto interno nullo con qualsiasi vettore di  $\Delta(x)$ . Essendo  $\Delta^\perp(x)$  uno spazio aggiunto di  $\mathbb{R}^n$ , esso è certamente una codistribuzione.

Analogamente data la codistribuzione  $\Omega(x)$ , si può costruire una distribuzione **annichilatrice**

$$\Omega^\perp(x) = \{ v \in \mathbb{R}^n : \langle \omega, v \rangle = 0, \omega \in \Omega(x) \}$$

Si ha che

$$\dim(\Omega(x)) + \dim(\Omega^\perp(x)) = n$$

e ovviamente lo stesso vale per

$$\dim(\Delta(x)) + \dim(\Delta^\perp(x)) = n.$$

Nei sistemi meccanici con vincoli in forma cinematica  $A(q)\dot{q} = 0$ , la matrice  $A(q)$  definisce chiaramente una *codistribuzione* dei vincoli. La espressione della stessa cinematica in termini di quasi velocità,  $\dot{q} = S(q)\nu$ , esemplifica l'uso della distribuzione annichilatrice  $\text{span } S(q)$ .

Vale il seguente risultato: Se una distribuzione  $\Delta(x)$  è regolare e non singolare in  $x_0$ , allora anche  $\Delta^\perp(x)$  lo è; vale anche il viceversa.

Infine accenniamo il fatto che per ogni distribuzione a  $d$  dimensioni  $\Delta(x)$  non singolare ogni suo campo vettoriale può essere espresso come

$$\tau \in \Delta(x) \Rightarrow \tau = \sum_{i=1}^d c_i(x) f_i(x)$$

dove  $f_i(x)$  sono campi vettoriali regolari che formano una *base*, tali cioè che

$$\Delta(x) = \text{span} \{f_1(x), \dots, f_d(x)\}$$

Supponiamo ora di avere una distribuzione  $\Delta(x)$  definita su uno spazio a  $n$ -dimensioni con dimensione  $d < n$ . La codistribuzione annichilatrice  $\Delta^\perp(x)$  ha dimensione  $n - d$ , e può essere scritta come

$$\Delta^\perp(x) = \text{span} \{\omega_1(x), \dots, \omega_{n-d}(x)\}$$

Ci chiediamo quando questi campi covettoriali siano in effetti **differenziali esatti**, cioè esistano  $(n - d)$  funzioni indipendenti  $\lambda_i(x)$  tali che:

$$\omega_i = \frac{\partial \lambda_i}{\partial x}$$

Tale condizione è detta di **completa integrabilità** per la  $\Delta(x)$ . Se la  $\Delta(x)$  è espressa come

$$\Delta(x) = \text{span} \{f_1(x), \dots, f_d(x)\} = \text{Im}F(x)$$

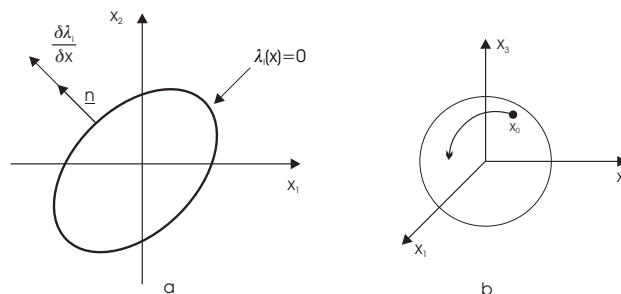
le funzioni cercate dovranno verificare le equazioni differenziali alle derivate parziali

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x} F(x) = 0, \quad \forall i, \quad \forall x$$

Il problema chiaramente ci interessa ai fini della discriminazione dei vincoli cinematici tra olonomi ed anolonomi; ma vedremo che esso ha importanza più generale, coinvolgendo tutta la analisi di raggiungibilità di sistemi nonlineari.

Si consideri il luogo dei punti  $\lambda_i(x) = \text{cost}$  in  $\mathbb{R}^n$ . Il gradiente  $\frac{\partial \lambda_i}{\partial x}(x)$  può essere visto geometricamente come un vettore in  $x$  e orientato come la normale  $n(x)$  al luogo. La condizione che

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x} f_j(x) = 0, \quad \forall i, j, \quad \forall x$$



equivale a imporre che ognuno dei vettori  $f_j(x)$ , e ogni loro combinazione lineare, sia perpendicolare alla normale al luogo in quel punto, cioè **tangente** al luogo. In tal caso risulta evidente che un sistema il cui vettore velocità  $\dot{x}$  appartenga a  $\Delta(x)$  sarebbe costretto a rimanere su  $\lambda_i(x) = \text{cost}$  indefinitamente qualora vi si venga a trovare in qualsiasi istante. È pertanto fondamentale il seguente

*Teorema di Frobenius* Una distribuzione è completamente integrabile se e solo se è involutiva.

Il teorema di Frobenius ha conseguenze immediate sulla raggiungibilità del sistema. Se infatti per un sistema, la distribuzione di controllo ha dimensione  $d < n$  ed è integrabile, esisteranno  $n - d$  superfici in  $M$  definite da  $\lambda_i(x) = c_i = \text{cost}$ . che il sistema non può abbandonare (le costanti dipendendo dalle condizioni iniziali). Il sistema non potrà raggiungere nessun punto che si trovi al di fuori della superficie intersezione (che ha dimensione  $d$ ), e non sarà quindi certamente completamente raggiungibile.

Partendo da condizioni iniziali diverse, si avranno traiettorie giacenti su superfici di equazione  $\lambda_i(x) = c'_i$  con  $c' \neq c$  ma ancora costante. Queste superfici sono parallele tra loro (nel senso che i piani tangenti sono paralleli), e formano una *foliazione* di superfici.

Il teorema di Frobenius vale **localmente** cioè  $\Delta(x)$  è integrabile in un intorno di  $x_0$  se e solo se è involutiva nell'intorno. Questo significa che il sistema potrebbe ancora uscire dalla intersezione delle superfici integrali, allontanandosi sufficientemente dal punto iniziale. Per avere un risultato valido *in grande* ho bisogno di una delle ulteriori condizioni

1.  $\Delta(x)$  **analitica** (cioè tutti i suoi campi vettoriali sono analitici) su  $M$  analitico, ovvero
2.  $\Delta(x) \in C^\infty$  su  $M \in C^\infty$ , con  $\dim \Delta(x) = \text{cost}$

In queste ipotesi,  $\forall x_0 \in M$  esiste una *sottosuperficie integrale massima* che non può essere abbandonata dal sistema.

**Esempio**  $x \in \mathbb{R}^3$

$$g_1(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_3 \\ -x_2 \end{bmatrix}; \quad g_2(x) = \begin{bmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$\Delta(x) = \text{span} \{g_1, g_2\}$  ha dimensione 2 eccetto in  $x_3 = 0$ .

$$g_3 = [g_1, g_2] = \begin{bmatrix} +x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{x_1}{x_3}g_1 - \frac{x_1}{x_3}g_2 \in \Delta(x)$$

eccetto in  $x_3 = 0$ .

Per il teorema di Frobenius, ci attendiamo l'esistenza di una varietà integrale di dimensione 2: infatti, le superfici sferiche  $\lambda(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \text{cost.}$  sono tali per cui

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} \begin{bmatrix} g_1(x) & g_2(x) \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -x_3 \\ x_3 & 0 \\ -x_2 & x_1 \end{bmatrix} = 0$$

È possibile vedere facilmente che la evoluzione di un sistema dinamico  $\dot{x} = g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2$ , non abbandonerebbe mai la superficie sferica sulla quale si trovano le sue condizioni iniziali: infatti, sarebbe  $\dot{\lambda} = \frac{\partial \lambda}{\partial x} \dot{x} = 0$ , per qualsiasi valore dei controlli  $u_1(t), u_2(t)$ .

## 6.3 Raggiungibilità dei Sistemi Nonlineari

Torniamo ora al sistema in forma affine nel controllo

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)u_1(t) + g_2(x)u_2(t) + \cdots + g_m(x)u_m(t)$$

Una definizione di raggiungibilità per questo sistema potrebbe essere data così:

*Un sistema è raggiungibile se  $\forall x_1, x_2 \in X$  esiste  $T(< \infty)$ ,  $u : [0, T] \rightarrow U$  tale che  $x(T, x_1, u) = x_2$ .*

Per questa definizione “in grande” di raggiungibilità non esistono, al momento attuale, criteri di verifica di facile e generale applicabilità.

Perfino per una versione “locale” del tipo

*Un sistema è localmente raggiungibile in  $x_1$  se,  $\forall x_2$  in un intorno di  $x_1$ , esiste  $T(< \infty)$ ,  $u : [0, T] \rightarrow U$  tale che  $x(T, x_1, u) = x_2$ .*

non si hanno al momento soddisfacenti criteri di verifica. Il problema è che la possibilità di poter raggiungere un punto anche vicino può dipendere per

sistemi nonlineari generali anche dal comportamento del sistema in regioni lontane: ad esempio, si consideri il sistema in  $\mathbb{R}^2$

$$\dot{x} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_1, & x_1 < 1 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2, & x_1 \geq 1 \end{cases}$$

in cui tutti i punti di un intorno dell'origine sono raggiungibili, ma solo dopo aver raggiunto il semipiano chiuso  $x_1 \geq 1$ . L'analisi di sistemi discontinui come questo è un argomento di ricerca attualmente ancora molto aperto.

Questo tipo di difficoltà è legata al fatto che i sistemi nonlineari possono non essere analitici. I sistemi analitici sono quelli in cui i campi vettoriali di deriva e di controllo sono tutti esprimibili in serie di Taylor attorno al punto iniziale. Questo significa che l'informazione locale sul sistema (cioè il valore dei campi e di tutte le loro derivate nel punto iniziale) è sufficiente a determinare tutto l'andamento del campo anche a distanza finita dal punto iniziale. Si può notare che l'esempio precedente non è analitico. Considereremo quindi una ulteriore restrizione del concetto di raggiungibilità, detta raggiungibilità *locale–locale*.

Introduciamo la notazione  $R_T^V(x_0)$  per indicare l'insieme dei punti raggiungibili da  $x_0$  al tempo  $T > 0$  seguendo traiettorie che rimangono, per  $t \leq T$ , contenute nell'intorno  $V$  di  $x_0$ .

*Un sistema non lineare è detto*

- raggiungibile localmente–localmente (*in sigla, l.l.c.*) da  $x_0$  se, per ogni intorno  $V$  (arbitrariamente piccolo) esiste  $T$  tale che  $R_T^V(x_0)$  contiene un intorno di  $x_0$ ;
- raggiungibile localmente in tempo breve (*“small-time locally controllable”, o s.t.l.c.*) da  $x_0$  se, per ogni  $V$  e per ogni  $T$  (arbitrariamente piccoli),  $R_T^V(x_0)$  contiene un intorno di  $x_0$ ;

Nelle definizioni appena date, si sostituisce la parola “raggiungibile” con la parola “accessibile” quando si possa solo dimostrare che  $R_T^V(x_0)$  contiene un insieme aperto non vuoto di  $M$  (cioè, non un intorno).

Si è visto in precedenza come le direzioni indicate dalle Lie bracket tra i campi vettori della distribuzione di controllo siano anch'esse possibili “direzioni di moto” locali del sistema. È naturale perciò considerare la seguente



catena (o “filtrazione”) di distribuzioni

$$\begin{aligned}
 \Delta_0 &= \text{span} (g_1, \dots, g_m); \quad \Delta = \text{span} (f, g_1, \dots, g_m) \\
 \Delta_1 &= \text{span} (g_1, \dots, g_m, [f, g_1], \dots, [f, g_m], \\
 &\quad [g_1, g_2], \dots, [g_1, g_m], \dots) = \\
 &= [\Delta_0, \Delta] + \Delta_0 \\
 &\vdots = \vdots \\
 \Delta_k &= \Delta_{k-1} + [\Delta_{k-1}, \Delta]
 \end{aligned}$$

La dimensione di  $\Delta_k(p)$  in un punto  $p$  è non decrescente, e limitata superiormente (dalla dimensione dello spazio di stato).

Se tutte le distribuzioni ottenute sono non-singolari in  $p$ , allora la dimensione di  $\Delta_k$  è strettamente crescente sino a che, per qualche  $k$ , si avrà  $\dim \Delta_k = \dim \Delta_{k-1}$ . A questo  $k$  la filtrazione si arresta (ogni successiva iterata offrirebbe ancora la stessa distribuzione). Si noti che  $k \leq n - m + 1$ , quindi la procedura è computabile in un numero finito di passi. La distribuzione  $\Delta_k$  viene detta *distribuzione di accessibilità* per il sistema.

Se le distribuzioni ottenute sono singolari in  $p$ , la filtrazione deve procedere sinché non si giunge ad una distribuzione nonsingolare di dimensione pari alla successiva. In questo caso, il numero  $k$  di passi necessari alla procedura non è superiormente limitabile a priori.

In termini della distribuzione di accessibilità si può formulare il seguente

**Teorema di Chow.** Se  $\dim \Delta_k(p) = \dim \Delta_{k-1}(p) = n$  allora il sistema è l.l. accessibile.

Se  $\dim \Delta_k = \dim \Delta_{k-1} = r < n$  in tutti i punti di un intorno di  $p$ , l'insieme raggiungibile l.l. in tempo  $T$   $R_T^V$  è contenuto in una sottosuperficie  $S_p$  di dimensione  $r$  dello spazio di stato.  $R_T^V$  contiene un sottoinsieme aperto di  $S_p$ , quindi il sistema ristretto su  $S_p$  è l.l. accessibile.

In generale la accessibilità di un sistema non implica la raggiungibilità. Ad esempio si consideri il seguente sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2^2 \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Il sistema è localmente accessibile da  $p$ , come si verifica dal teorema di Chow:

a) Per  $p_2 \neq 0$ ,  $\dim \Delta_1(p) = 2$ ;

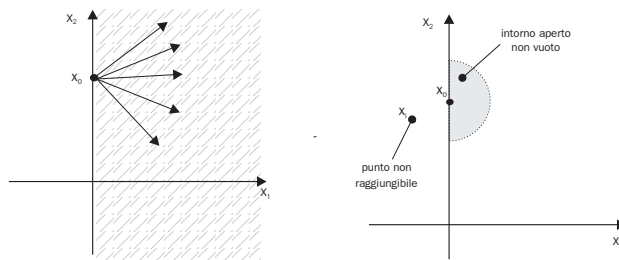


Figura 6.6: Sistema accessibile ma non raggiungibile

- b) Per  $p_2 = 0$ ,  $\Delta_1 = \text{span} \{g, [f, g]\}$  è singolare in  $p$ , ma  $\Delta_2 = \text{span} \{g, [f, g], [g, [f, g]]\}$  ha dimensione 2 ovunque.

Dalla definizione di locale accessibilità,  $R_T^V(p)$  contiene un insieme aperto non vuoto di  $M$  (un sottoinsieme del semipiano destro). Il sistema non è però raggiungibile perché non posso raggiungere punti, anche arbitrariamente vicini al punto iniziale, appartenenti al semipiano sinistro (quindi  $R_T^V(p)$  non contiene un intorno): infatti le evoluzioni dello stato, a partire da punti  $p = (p_1, p_2)$ , appartengono al semipiano a destra della retta  $x = p_1$  perché  $\dot{x}_1$  è sempre positivo.

In certi casi si può decidere la raggiungibilità (anche in tempo breve) data la accessibilità (l.l.). In particolare, è ovvio che la accessibilità è condizione necessaria per la raggiungibilità. In termini semplificativi, la raggiungibilità sarà possibile quando gli effetti del vettore di deriva possono essere “annullati” dal controllo. Si può dimostrare che le seguenti, assieme alla condizione di accessibilità, sono condizioni sufficienti (di crescente generalità e complessità) per la raggiungibilità in tempo breve a partire da un punto  $p$ :

1.  $f(x) \equiv 0, \forall x \in B_\epsilon(p)$ ;
2.  $f(x) \in \text{span} [g_1(x) \cdots g_m(x)], \forall x \in B_\epsilon(p)$ ;
3.  $f(p) = 0$  e  $\dim \Delta_L(p) = n$ , dove  $\Delta_L = \text{span} \{g_i, [f, g_i], \dots, ad_f^{\mu_i} g_i, \dots\}$ , con  $i = 1, \dots, m$  e per qualsiasi  $\mu_i \in \mathbb{N}$ ;
4.  $f(p) = 0$  e  $\dim(\Delta_L(p) + \Delta_{G1}(p)) = n$ , dove  $\Delta_{G1} = \text{span} \{[g_i, g_j]\}$ , per tutti gli  $i, j$  da 1 a  $m$ ;
5.  $f(p) = 0$ , e ogni Lie bracket tra le  $f$  e le  $g$  in cui appaiano un numero dispari di  $f$  e un numero pari (diverso da zero) di  $g$  (“bad” brackets), sia combinazione lineare di bracket con un minor numero totale di  $f$  e  $g$ .

Si noti che i criteri 1, 2, sono molto più restrittivi perché richiedono proprietà che devono essere verificate su tutto un intorno di  $p$ , mentre le altre condizioni vengono valutate solo in  $p$  stesso.

La condizione 1) è particolarmente interessante per lo studio della olonomia di vincoli cinematici. Vediamo esplicitamente la procedura di analisi in questo caso.

Sia dato un sistema meccanico con  $n$  configurazioni  $q$ , sottoposto a  $m$  vincoli cinematici in forma di Pfaff,  $A(q)\dot{q} = 0$ . Si consideri la distribuzione  $\mathcal{S} = \mathcal{A}^\perp$  che annichila la distribuzione dei vincoli  $\mathcal{A}(q) = \text{rowspan } A(q)$ . Sia  $S(q)$  una base di  $\mathcal{S}$ , e siano  $s_i(q)$  i campi vettori che ne formano le colonne. La forma di controllo per il sistema in esame è pertanto

$$\dot{q} = s_1(q)u_1 + \cdots + s_{n-m}(q)u_{n-m}$$

Si costruisca la filtrazione

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \text{span}(s_1, \dots, s_{n-m}) \\ \Delta_1 &= [\Delta_0, \Delta_0] + \Delta_0 \\ &\vdots \\ \Delta_k &= \Delta_{k-1} + [\Delta_{k-1}, \Delta_0] \end{aligned}$$

Sia  $d = \dim \Delta_k$  costante in un intorno di un punto  $\bar{q}$ . Allora, le configurazioni del sistema non possono abbandonare (almeno localmente) una superficie di dimensione  $d$  nello spazio di stato, il che implica che

- $n - d$  degli  $m$  vincoli sono olonomi;
- i restanti  $m - (n - d)$  sono anolonomi;

Si dice in questo caso che il sistema ha grado di anolonomia  $m - n + d$ . Nel caso  $d = n$ , il sistema (completamente raggiungibile) è detto massimamente anolonomo.

Per quanto riguarda la condizione 2), la sua interpretazione è evidente:  $f(x)$  in questo caso può essere “neutralizzato” da opportuni controlli, e l’analisi viene ricondotta al caso precedente.

Per quanto riguarda la condizione 3), si consideri un sistema lineare

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$$

come sistema nonlineare, cioè  $f(x) = Ax$  e  $g_i(x) = B_i$ ,  $i$ -esima colonna di  $B$ .

Svolgendo i calcoli si ottiene  $[g_i, g_j] = 0$  e  $ad_f^k g_i = (-1)^k A^k B_i$ . Infatti,  $[g_i, ad_f^k g_j] = 0$ ,  $\forall i, j, k$  e  $[f, g] = [Ax, b_i] = -Ab_i$ ,  $[f, [f, g]] = [Ax, -Ab_i] = A^2 b_i$ , e  $[g_i, g_j] = [b_i, b_j] = 0$

Pertanto se la distribuzione

$$\begin{aligned}\Delta_k &= \text{span} \left[ g_1 : [f, g_1] : \cdots : \text{ad}_f^k(g_1) : \cdots : g_2 : [f, g_2] : \cdots : \text{ad}_f^k(g_2) : \cdots \right] \\ &= \text{span} [B, AB, \cdots, A^k B]\end{aligned}$$

ha rango  $n$  per qualche  $k$ , il sistema è raggiungibile. Ci si riconduce quindi al consueto test lineare. Per Cayley-Hamilton, sappiamo che è sufficiente studiare  $\Delta_{n-1} = \Delta_L$ .

Si consideri ora un sistema  $\dot{x} = f(x) + G(x)u$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  che abbia equilibrio nell'origine (dopo eventuale traslazione), e lo si scriva nella forma

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u = Ax + p(x) + (B + r(x))u$$

con  $\|p(x)\|, \|r(x)\|$  infinitesimi di ordine almeno due.

Si può mostrare facilmente che questa coincide, a meno di infinitesimi di ordine superiore, con quella della approssimazione lineare. Pertanto, la raggiungibilità della approssimazione lineare in un punto di equilibrio è sufficiente per la raggiungibilità locale in tempo breve del sistema nonlineare originale.

Infine, l'applicazione all'esempio bidimensionale con termine di deriva sopra riportato della condizione 5) e' possibile solo per  $p_2 = 0$ ; la condizione non è soddisfatta proprio a causa della bad bracket  $[g, [f, g]]$ .

### Accessibilità in senso Debole

La distribuzione su cui si stabilizza la filtrazione di accessibilità,  $\Delta_k$ , coincide dunque per i sistemi lineari con la immagine della matrice di raggiungibilità

$$R = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

che è a sua volta uguale al sottospazio raggiungibile dall'origine (in un tempo arbitrario)  $\mathcal{R}_0 = \text{span } R$ .

In generale, l'insieme di raggiungibilità entro il tempo  $T$  da un punto  $x_0 \neq 0$ , per un sistema lineare  $\dot{x} = Ax + Bu$  non completamente raggiungibile, è dato da

$$\mathcal{R}(x_0, T) = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n | \bar{x} = \exp(A\tau)x_0 + v, 0 \leq \tau \leq T, v \in \mathcal{R}_0 \}.$$

Questo tipo di raggiungibilità è da considerarsi più debole di quella ottenuta dalla origine per i punti in  $\mathcal{R}_0$ , nel senso che alcuni punti possono essere raggiungibili solo in un tempo  $\tau$  fissato.

Per il caso nonlineare, si consideri dunque l'insieme

$$R^V(x_0, T) = \bigcup_{\tau \leq T} R^V(x_0, \tau),$$

ovvero l'insieme degli  $x$  che possono essere raggiunti in tempo  $t \leq T$  restando "vicini" (dentro  $V$ ) a  $x_0$ .

Le definizioni sopra date di accessibilità e raggiungibilità locale-locale si applicano in senso debole se vi si considera  $R^V(x_0, T)$  al posto di  $R_T^V(x_0)$ . Ovviamente, se un sistema è accessibile (nel primo senso, "forte"), esso è anche accessibile in senso debole.

Un test di accessibilità debole nei sistemi nonlineari è basato sulla filtrazione

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \text{span}(f, g_1, \dots, g_m) \\ \Gamma_1 &= \Gamma_0 + [\Gamma_0, \Gamma_0] \\ &\vdots \\ \Gamma_k &= \Gamma_{k-1} + [\Gamma_{k-1}, \Gamma_0] \end{aligned}$$

che si interrompe quando  $\dim \Gamma_k = \dim \Gamma_{k-1} = d$  quindi il sistema è l.l.d.a. se e solo se  $d = n$ .

**Esempio:** Differenze tra la locale forte accessibilità e la locale accessibilità. Limitiamo lo studio ad un sistema lineare del tipo

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

questo sistema non è raggiungibile perché la matrice di raggiungibilità ha rango pari a 1

$$[BAB] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

L'evoluzione libera del sistema è

$$\begin{cases} x_1(t) = x(0)e^t \\ x_2(t) = x(0)e^t \end{cases}$$

la traiettoria del sistema in evoluzione libera è una retta di pendenza  $\frac{\pi}{4}$  sul piano  $(x_1, x_2)$ . La distribuzione (n-1)-sima relativa al test di locale debole accessibilità sarà

$$\Gamma_{n-1} = \text{span}[Ax] + \text{span}[B, AB]$$

mentre la distribuzione (n-1)-sima relativa al test di locale forte accessibilità è

$$\Delta_{n-1} = \text{span}[B, AB]$$

Ad esempio, ci chiediamo se a partire dallo stato iniziale  $x_0 = (1, 1)$  possiamo raggiungere un punto  $x_c = (0, 4)$  ad un tempo  $T$  arbitrariamente fissato. Questo non è possibile perché dal test di locale forte accessibilità vediamo che le direzioni possibili per questo tipo di controllo appartengono allo  $\text{span } [BAB]$ . Questo non vuol dire che il punto  $x_c$  non sia raggiungibile (infatti lo è al tempo  $T \log(2)$ ): il test di locale accessibilità in  $x_c$  infatti indica  $\Gamma_1 = \text{span} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ .

**Esempio** Sistemi lineari tempo varianti

Possiamo riportarci ad un sistema non lineare tempo invariante ponendo un nuovo vettore di stato  $z \in \mathbb{R}^{n+1}$ :

$$z = \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}; \quad \dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{t} \end{bmatrix} = f(z) + g(z)u = \begin{bmatrix} A(t)x \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B(t) \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Calcoliamo adesso le Lie brackets:  $[g_i, g_j] = 0$ ,

$$\begin{aligned} [f, g_i] &= \begin{bmatrix} 0 & B_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ax \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & \dot{A}x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \dot{B}_i - AB_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\frac{d}{dt} - A\right] B_i \\ 0 \end{bmatrix} \\ [f, [f, g_j]] &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{d}{dt} [B - AB] \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ax \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & \dot{A}x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{B} - AB \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \left[\frac{d}{dt} - A\right] [\dot{B} - AB] \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\frac{d}{dt} - A\right]^2 B \\ 0 \end{bmatrix} \\ [g_i, [g, g_j]] &= 0 \quad \text{ad}_f^K g = \begin{bmatrix} \left[\frac{d}{dt} - A\right]^k B \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Indicando con  $\Delta$  l'operatore differenziale  $\left[\frac{d}{dt} - A\right]$ , il sistema è dunque raggiungibile se

$$\text{rank} \left[ \begin{bmatrix} B : \Delta B : \Delta^2 B : \dots \end{bmatrix} \right] = n$$

**Esempio** Raggiungibilità sistema altalena

Supponiamo che un bambino di massa  $m$  si alzi e si abbassi sulla altalena, variando così la lunghezza  $l$ . Le equazioni del moto sono ottenute facilmente con il metodo di Eulero-Lagrange,

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta - 2\frac{\dot{\theta}}{l} \dot{l}$$

e ponendo

$$\theta = x_1, \quad \dot{\theta} = x_2, \quad l = x_3, \quad \dot{l} = u$$

si ha in forma di controllo

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u; \quad f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -g \frac{\sin x_1}{x_3} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \frac{x_2}{x_3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si ottiene poi

$$[f, g] = \begin{bmatrix} -2 \frac{x_2}{x_3} \\ g \frac{S_1}{x_3^2} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad [f, [f, g]] = \begin{bmatrix} g \frac{S_1}{x_3^2} \\ -g C_1 \frac{x_2}{x_3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{span} \{f, g, [f, g], [f, [f, g]]\} = 3$$

eccetto che nei punti per cui  $x_2 = 0$ ,  $x_1 = 0 + k\pi$ ; quando l'altalena si trova in queste condizioni occorre uno "start" per iniziare a muoversi.

**Esempio** Sistemi in forma concatenata

Un sistema non lineare del tipo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \\ \dot{x}_2 = u_2 \\ \dot{x}_3 = x_2 u_1 \\ \dot{x}_4 = x_3 u_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = x_{n-1} u_1 \end{cases}$$

si dice in forma concatenata. Alcuni importanti sistemi robotici possono essere scritti in questa forma, come ad esempio un veicolo a singolo asse o unicyclo ( $n = 3$ ), un veicolo a doppio asse ( $n = 4$ ), e un veicolo a doppio asse con  $m$  rimorchi ( $n = 4 + m$ ). È un sistema senza deriva, con campi di controllo

$$g_1 = (1 \ 0 \ x_2 \ x_3 \ \cdots \ x_{n-1})^T; \quad g_2 = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0)^T$$

Calcolando le Lie brackets si ha

$$[g_1, g_2] = -\frac{\partial g_1}{\partial x} g_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e_3$$

$$[g_2, [g_1, g_2]] = 0 ; [g_1, [g_1, g_2]] = -\frac{\partial g_1}{\partial x} [g_1, g_2] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e_4$$

e in generale

$$ad_{g_1}^k g_2 = e_{k+2}$$

Al (n-2)-esimo livello di Lie Brackets si ottiene quindi la completa raggiungibilità. Ne consegue che è possibile “parcheggiare” in configurazione arbitraria un veicolo con un numero arbitrariamente elevato di rimorchi (naturalmente, le manovre risulteranno molto complesse, ricorrendo a commutatori di ordine tanto più elevato quanto più alto è il numero di rimorchi).

## 6.4 Osservabilità

Riprendiamo lo studio del modello completo:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \\ y_j = h_j(x) \quad , j = 1 \dots p \end{cases}$$

**Def:** Due stati sono detti **indistinguibili**, se per ogni  $u \in U$ , insieme dei controlli ammissibili, le evoluzioni a partire da  $x_1$  e  $x_2$  danno la stessa uscita  $y(t)$ .

Anche in questo caso la definizione si specializza in senso locale considerando in  $U$  solo controlli che, per  $T$  piccoli, non facciano allontanare  $x(t)$  da un intorno di  $x_1$  (e di  $x_2$ ). Per verificare l'uguaglianza di due funzioni  $y(x_1, u_1)$  e  $y(x_2, u_2)$ , in ogni istante  $t$ , è sufficiente ( se sono analitiche ) confrontare i valori di tutte le loro derivate in  $t = 0$ . Sarà dunque

$$y_i(0) = h_i(x_0)$$

$$\dot{y}_i(0) = \left. \frac{\partial h_i}{\partial x} \dot{x} \right|_0 = \left. \frac{\partial h_i}{\partial x} f(x) + \sum_j \frac{\partial h_i}{\partial x} g_j(x)u_j \right|_0 = L_g h_i(x_0) + \sum_j L_g h_i u_j(0)$$

e così via .



**Def:** Chiamo **Spazio di osservazione** lo spazio lineare di funzioni che contiene  $h_1, \dots, h_p$  e tutte le derivate di Lie  $L_{x_1}, \dots, L_{x_k} h_j$ , con

$$\begin{cases} x_i = f, g_1, \dots, g_m \\ k = 1, 2, \dots \end{cases}.$$

In altre parole, tutte le funzioni (dello stato) che appaiono nelle uscite, moltiplicate per funzioni degli ingressi ( $u_i, \dot{u}_i, \dot{u}_i^2$ , etc.). Questo spazio è anche lo spazio delle funzioni del tipo

$$L_{z_1} L_{z_2} \dots L_{z_k} h_j(x) \quad k = 1, 2, \dots$$

con

$$z_i = f(x) + \sum_{j=1}^m g_j(x) u_j^{(i)}, \quad \underline{u}^{(i)} \text{ vettore costante}$$

Cioè esplicitamente lo spazio delle variazioni delle uscite corrispondenti a ingressi costanti attratti, di piccola durata. Infatti

$$L_{x_1+x_2} \lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial x} (x_1 + x_2) = L_{x_1} \lambda + L_{x_2} \lambda$$

$$L_x (\lambda_1 \lambda_2) = L_x \lambda_1 + L_x \lambda_2$$

Quindi essendo ogni  $z_i$  combinazione lineare di  $x_i$  e viceversa, anche le  $L_{z_i}$  e  $L_{x_i}$  lo sono. Lo spazio di osservabilità  $\Theta$  contiene tutte le funzioni  $h(x)$  e le loro derivate di ogni ordine calcolate lungo le traiettorie del sistema. Intuitivamente se le funzioni in  $\Theta$  sono indipendenti la loro eguaglianza per ogni  $u$  implica che sono applicate alla stessa  $x$ .

### Esempi:

In un intorno di 0, in  $\mathbb{R}^1$ ,  $\sin(x)$  è invertibile.

$$\sin(x_1) = \sin(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad (\text{localmente})$$

invece  $\cos(x)$  non lo è.

In  $\mathbb{R}^2$  le funzioni  $\begin{cases} \sin(x+y) \\ x \end{cases}$  sono indipendenti e

$$\begin{cases} \sin(x_1 + y_1) = \sin(x_2 + y_2) \\ x_1 = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

mentre per le funzioni  $\begin{cases} \sin(x+y) \\ x^2 \end{cases}$  questa proprietà non vale.

Un metodo per stabilire l'indipendenza di funzioni è dato dal teorema del Dini. infatti

$$J \begin{bmatrix} \sin(x+y) \\ x \end{bmatrix} \Big|_0 = \begin{bmatrix} \cos(x+y) & \cos(x+y) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Big|_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J \begin{bmatrix} \sin(x+y) \\ x \end{bmatrix} \Big|_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si può notare come lo jacobiano nel primo caso generi due vettori linearmente indipendenti mentre nel secondo caso generi vettori linearmente dipendenti. Da questo esempio risulta chiara l'importanza delle derivate  $\frac{\partial}{\partial x}$  nel decidere l'indipendenza di funzioni.

Due funzioni  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  si dicono indipendenti se i covettori

$$df_1(x) = \frac{\partial f_1}{\partial x} ; df_2(x) = \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

sono indipendenti ( in un punto o in un insieme )

**Def:** si definisce la **Codistribuzione di osservabilità** come

$$d\mathcal{O} = \text{span} \left\{ \frac{\partial h_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial h_p}{\partial x}, \frac{\partial L_f h}{\partial x}, \dots \right\} = \text{span} \{ d\lambda(x), \lambda \in \theta \}$$

Se  $\dim d\mathcal{O} = n$ , il sistema è localmente osservabile (in un punto o in un insieme) , cioè tra i punti vicini a  $x_0$ , l'unico indistinguibile è  $x_0$  stesso.

Si definisce  $\Omega$  la matrice tale che  $\text{rowspan } \Omega = d\mathcal{O}$ .

Se  $\Omega$  ha rango  $n$  in  $\bar{x}$ ,  $\Omega^\perp = \mathcal{N}(\Omega) = 0$  e quindi non esiste alcuno stato  $\bar{x} + \delta x$  in un intorno di  $\bar{x}$  tale che  $y(\bar{x} + \delta x, u) - y(\bar{x}, u) = \Omega \delta x = 0$ , cioè che lasci le funzioni  $y(t), \dot{y}(t), \dots$  invariate .

Se invece  $\dim(d\mathcal{O}) = k < n$  con  $k = \text{cost}$  esisteranno  $k$  funzioni  $\lambda(x)$  tali che  $d\mathcal{O} = \text{span} \{ d\lambda_1 \dots d\lambda_k \}$ . Le superfici  $\lambda(x) = \text{cost}$  sono tali per cui traiettorie uscenti da due stati appartenenti all'intersezione di tutte le superfici sono indistinguibili dall'uscita.

L'osservabilità locale è una proprietà che non implica l'osservabilità globale, come è giustificato attendersi per sistemi non lineari.

Ad esempio il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = u & f(x) = 0 & g(x) = 1 \\ y_1 = \sin \alpha x \\ y_2 = \cos \alpha x \end{cases}$$

ha spazio di osservabilità

$$d\mathcal{O} = \{ \sin \alpha x, \cos \alpha x, L_f y_1 = 0, L_f y_2 = 0, L_g y_1 = \alpha \cos \alpha x, L_g y_2 = -\alpha \sin \alpha x \}$$

la corrispondente codistribuzione di osservabilità è data da

$$d\mathcal{O} = \text{span} \{ \cos \alpha x, \sin \alpha x \}$$

da cui  $\dim(d\mathcal{O}) = 1$ , per ogni valore di  $x$ . Il sistema è localmente osservabile ovunque; comunque gli stati iniziali  $x_0$  e  $x_1 = x_0 + \frac{2K\pi}{\alpha}$  **non** sono distinguibili.

**Esempio** Caso lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu & f(x) = Ax & g_i(x) = b_i \\ y = Cx & h_i(x) = c_i x \end{cases}$$

Lo spazio di osservabilità sarà

$$\theta = \{ c_1 x, \dots, c_m x, L_f h_1 = c_1 Ax, \dots, L_{g_i} h_j = c_j b_i u, \dots, L_f L_f h_1 = c_1 A^2 x, \dots \}$$

la codistribuzione di osservabilità

$$d\mathcal{O} = \text{span} \{ c_1; \dots; c_m; c_1 A; \dots; c_m A; c_1 A^2; \dots \}$$

Il rango della codistribuzione coincide col rango della matrice

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \end{bmatrix}$$

e quindi col classico criterio ( di Kalman ) di osservabilità.

Si noti infine che se  $\text{rank} d\theta < n$  in un punto isolato ( di singolarità ), non si può escludere la locale osservabilità .

**Esempio**

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ y = x^3 \end{cases}$$

questo sistema è osservabile ma  $\dim d\mathcal{O} = \dim x^3 = 0$  in  $x = 0$ .



$$L_{g_1} h_2 = \frac{(d-y) \cos \theta + x \sin \theta}{x^2 + (y-d)^2}$$

$$L_{g_2} h_2 = -1$$

$$L_{g_2} L_{g_1} h_1 = \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{x^2 + y^2}$$

Gli elementi fino ad ora calcolati permettono di scrivere

$$\Theta = h_1, h_2, L_{g_2} h_1, L_{g_1} h_2, L_{g_2} h_2, L_{g_2} L_{g_1} h_1,$$

Non tutte queste funzioni sono indipendenti, infatti

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{-y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} & -1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{d-y}{x^2 + (d-y)^2} & \frac{x}{x^2 + (d-y)^2} & -1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial L_{g_1} h_1}{\partial x} = \left[ \frac{\sin \theta [x^2 + y^2] - 2x[x \sin \theta - y \cos \theta]}{[x^2 + y^2]^2}, \frac{-\cos \theta [x^2 + y^2] - 2y[x \sin \theta - y \cos \theta]}{[x^2 + y^2]^2}, \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{x^2 + y^2} \right]$$

$$\frac{\partial L_{g_2} h_1}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L_{g_1} h_2}{\partial x} = \left[ \frac{\sin \theta [x^2 + (d-y)^2] - 2x[x \sin \theta + (d-y) \cos \theta]}{[x^2 + (d-y)^2]^2}, \frac{-\cos \theta [x^2 + (d-y)^2] - 2(d-y)[x \sin \theta + (d-y) \cos \theta]}{[x^2 + (d-y)^2]^2}, \frac{x \cos \theta - (d-y) \sin \theta}{x^2 + (d-y)^2} \right],$$

$$\frac{\partial L_{g_2} h_2}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L_{g_2} L_{g_1} h_1}{\partial x} = \left[ \frac{\cos \theta [x^2 + y^2] - 2x[x \cos \theta + y \sin \theta]}{[x^2 + y^2]^2}, \frac{\sin \theta [x^2 + y^2] - 2y[x \cos \theta + y \sin \theta]}{[x^2 + y^2]^2}, \frac{-x \sin \theta + y \cos \theta}{x^2 + y^2} \right]$$

I campi covettoriali di  $d\theta$  calcolati hanno rango 3 laddove uno almeno dei seguenti determinanti é diverso da zero

$$D_1 = \det \begin{bmatrix} dh_1 \\ dh_2 \\ dL_{g_1} h_1 \end{bmatrix} = \frac{d(y-d)(y \cos \theta - x \sin \theta)}{[x^2 + (y-d)^2][x^2 + y^2]^2}$$

$$D_2 = \det \begin{bmatrix} dh_1 \\ dh_2 \\ dL_{g_1} h_2 \end{bmatrix} = \frac{dy((y-d)\cos\theta - x\sin\theta)}{[x^2 + (y-d)^2][x^2 + y^2]^2}$$

$$D_3 = \det \begin{bmatrix} dh_1 \\ dh_2 \\ dL_{g_2} L_{g_1} h_1 \end{bmatrix} = -\frac{d(y-d)(y\sin\theta + x\cos\theta)}{[x^2 + (y-d)^2][x^2 + y^2]^2}$$

Si noti che i punti in cui sono situati i markers sono da escludersi perché in questi punti le funzioni  $h_1$  e  $h_2$  non sono definite.

Svolgendo i calcoli sui determinanti ottengo i seguenti risultati

$$D_1 = 0 \quad \text{se} \quad \begin{cases} y = d \\ d = 0 \\ \frac{y}{x} = \tan\theta \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \theta = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 0 \end{cases}$$

$$D_2 = 0 \quad \text{se} \quad \begin{cases} y = 0 \\ d = 0 \\ \frac{y-d}{x} = \tan\theta \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \theta = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 0 \end{cases}$$

$$D_3 = 0 \quad \text{se} \quad \begin{cases} y = d \\ d = 0 \\ \frac{y}{x} = -\tan\theta \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \theta = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

I tre minori si annullano contemporaneamente quando  $d = 0$ , cioè i markers sono coincidenti. Quindi se i markers coincidono il sistema non è osservabile e gli stati indistinguibili appartengono alla superficie  $\theta - \tan\frac{y}{x} = \pi$ .

Infine osserviamo che se rinunciamo ad uno degli ingressi ottengo

1. caso in cui rinuncio a ruotare

$$\omega = \dot{\theta} = 0 \rightarrow \det \begin{bmatrix} dh_1 \\ dh_2 \\ dL_{g_1} h_1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} dh_1 \\ dh_2 \\ dL_{g_1} h_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{per} \quad \begin{cases} \theta = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 0 \end{cases}$$

cioè siamo nella seguente situazione

2. caso in cui rinuncio a avanzare

$$v = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} dh_1 \\ dh_2 \\ dL_{g_2} h_1 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{sempre}$$

quindi il sistema non è osservabile solo ruotando.

# Capitolo 7

## Controllo di Sistemi Nonlineari

### 7.1 Introduzione

Vi sono due problemi fondamentali:

- Stabilizzazione
- Inseguimento (tracking)

La stabilizzazione consiste nel trovare un ingresso  $u(x)$  tale da rendere il sistema nonlineare  $\dot{x} = f(x, u(x))$ , asintoticamente (esponenzialmente) stabile attorno ad un punto di equilibrio  $x_0$ .

Il tracking si riferisce a un modello ingresso-uscita

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases}$$

e cerca di trovare  $u(x)$  tale che  $y(t) \rightarrow y_d(t)$  asintoticamente.

Ricordiamo che la stabilizzabilità si può ottenere con metodi lineari “robusti”, localmente: ( $\dot{x} = Ax + Bu + \text{hot}$ ) se  $(A, B)$  è stabilizzabile.

I metodi di linearizzazione feedback sono più potenti perché:

- a) valgono anche per sistemi con linearizzato che abbia poli non controllabili, marginalmente stabili;
- b) pur se si ottengono ancora risultati solo locali, sono spesso più ampi.

### 7.2 Linearizzazione Input-Stati

L'idea è quella, dato un sistema nonlineare del tipo

$$\dot{x} = f(x) + \sum_j g_j(x)u_j$$

e un punto di equilibrio

$$f(x_0) = 0,$$

di trovare un cambio di variabili  $z = \Phi(x)$  tale che

$$\Phi(x_0) = 0$$

e

$$\dot{z} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)} \quad \dot{x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)} \left( f(\Phi^{-1}(z)) + \sum_j g_j(\Phi^{-1}(z))u_j \right) = Az + Bu$$

con  $z(0) = 0$ .

Cioè ottenere un sistema lineare nelle nuove variabili di stato  $z$  equivalente a quello iniziale, con punto di equilibrio in  $z(0)$ .

Questi sistemi sono sostanzialmente lineari, anche se appaiono in forma “travisata”.

Riconoscerli può non essere banale. Una condizione necessaria e sufficiente per capire se ci troviamo di fronte ad un sistema di questo tipo o meno, ci viene dal seguente teorema:

**Theorem 1 (H. Nijmijer, A.J. Van der Schaft)** *Dato il sistema*

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i$$

con  $f(x_0) = 0$ , esiste un cambiamento di variabili  $\Phi(x) = z$  tale che  $\dot{z} = Az + Bu$ , con  $(A, B)$  coppia controllabile, se e solo se

- a)  $\dim(\text{span}\{ad_f^j g_i(x), i = 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n-1\}) = n \quad \forall x \in \mathcal{B}(x_0)$ ;
- b)  $[ad_f^k g_i, ad_f^l g_j] = 0 \quad \forall i, j, k, l; x \in \mathcal{B}(x_0)$ .

La condizione (a) corrisponde a chiedere che il linearizzato approssimante sia controllabile. La condizione (b) esclude tutti i sistemi onolomi.

Comunque i casi in cui si verificano queste ipotesi sono molto rari. In effetti, avendo il progettista a disposizione gli ingressi, egli ha la possibilità di riportare il sistema ad una forma lineare nella quale applicare le tecniche note del controllo lineare.

**Esempio.**

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\cos(\arcsin x_1)[x_2^{\frac{1}{3}} - u_1] \\ \dot{x}_2 = 3x_2^{\frac{2}{3}} \arcsin x_1 + 3x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 = \arcsin x_1 \\ z_2 = x_2^{\frac{1}{3}} \end{cases} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \begin{aligned} \dot{z}_1 &= \frac{1}{\cos(\arcsin x_1)} \dot{x}_1 \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)} = -x_2^{\frac{1}{3}} + u_1 \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)} = -z_2 + u_1 \\ \dot{z}_2 &= \frac{1}{3} x_2^{-\frac{2}{3}} \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)} \dot{x}_2 = z_1 + z_2 \end{aligned}$$

cioè

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

\*\*\*

Un problema di maggior interesse pratico è quello della linearizzazione in retroazione.

Si consideri ad esempio lo schema (SISO) in figura, nel quale l'ingresso  $u$  è ottenuto mediante retroazione (nonlineare) degli stati come

$$u(x) = \alpha(x) + \beta(x)v, \quad \beta(x) \neq 0 \text{ con } v \text{ nuovo riferimento.}$$

Vediamo quando è possibile trovare funzioni  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$  e coordinate  $z = \Phi(x)$  tali che nelle nuove coordinate il sistema sia lineare

$$\dot{z} = Az + Bv$$

e controllabile <sup>1</sup>.

### Esempio.

Scriviamo l'equazione della dinamica di un link collegato a un motore elettrico:

$$\tau = I\ddot{q} + mgL \sin q.$$

Pongo

$$\tau = mgL \sin q + Iv \Rightarrow \ddot{q} = v$$

cioè

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v$$

---

<sup>1</sup> Siccome ci è data la possibilità di scegliere una retroazione degli stati sugli ingressi, possiamo sempre imporre la posizione dei poli di  $A$ , in particolare chiederemo che siano tutti nell'origine e che la coppia  $(A, B)$  sia in forma canonica di controllo:

$$A = \left( \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \vdots & & I & \\ 0 & & & \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right); \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Esempio.**

Si supponga adesso che il link collegato al motore abbia una certa cedevolezza.

Le equazioni del sistema diventano

$$\begin{cases} I\ddot{q}_1 + mgL \sin q_1 + k(q_1 - q_2) = 0 \\ J\ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) = \tau \end{cases}$$

cioè

$$\begin{aligned} \begin{matrix} x_1 = q_1 \\ x_2 = \dot{q}_1 \\ x_3 = q_2 \\ x_4 = \dot{q}_2 \end{matrix} &\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{mgL}{I} \sin x_1 - \frac{k}{I}(x_1 - x_3) \\ x_4 \\ \frac{k}{J}(x_1 - x_3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \end{pmatrix} \tau \end{aligned}$$

Il controllo entra nella seconda equazione, e la nonlinearity nella prima.

Tipicamente, lo scopo è controllare il link  $q_1$ .

Si consideri l'uscita

$$y = q_1 = x_1$$

e le sue derivate

$$\dot{y} = x_2$$

$$\ddot{y} = -a \sin x_1 - b(x_1 - x_3)$$

$$y^{(iii)} = -a \cos x_1 \dot{x}_1 - b\dot{x}_1 + b\dot{x}_3 = -a \cos x_1 x_2 - bx_2 + bx_4$$

$$\begin{aligned} y^{(iv)} &= a \sin x_1 x_2^2 - a \cos x_1 \dot{x}_2 - b\dot{x}_2 + b\dot{x}_4 = \\ &= [a \sin x_1 x_2^2 + (a \cos x_1 + b)(a \sin x_1 + b(x_1 - x_3))] + b\frac{k}{J}(x_1 - x_3) + \frac{b}{J}\tau \end{aligned}$$

dove  $a = \frac{mgL}{I}, b = \frac{k}{I}$ .

Ponendo

$$\tau = -[a \sin x_1 x_2^2 + (\dots)(\dots) + b\frac{k}{J}(x_1 - x_3)]\frac{J}{b} + \frac{J}{b}v$$

si ottiene

$$y^{(iv)} = v.$$

Per stabilizzare  $q_1$ , basterà quindi porre

$$v = -c_0 y - c_1 \dot{y} - c_2 \ddot{y} - c_3 y^{(iii)}$$

da cui si ha

$$y^{(iv)} + c_3 y^{(iii)} + c_2 \ddot{y} + c_1 \dot{y} + c_0 y = 0$$

in questo modo, scegliendo i  $c_i$  opportunamente, si può fissare la posizione dei poli.

Si noti che sostanzialmente se scrivo

$$\begin{cases} z_1 = y = q_1 = x_1 \\ z_2 = \dot{z}_1 \\ z_3 = \dot{z}_2 \\ z_4 = \dot{z}_3 \end{cases} \quad \text{ottengo} \Rightarrow \dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v$$

e la retroazione è  $v = kz$ ,  $k = -(c_0 \ c_1 \ c_2 \ c_3)$ .

\*\*\*

Vediamo il caso generale (SISO):

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}$$

se il sistema è di questo tipo l'uscita non contiene  $u$ . Deriviamo l'uscita  $y$ :

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial h}{\partial x} (f(x) + g(x)u) = L_f h + L_g h u.$$

Se  $L_g h = 0$ , anche la derivata prima dell'uscita non contiene l'ingresso; calcoliamo le derivate successive dell'uscita

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \frac{\partial L_f h}{\partial x} \dot{x} = L_f^2 h + L_g L_f h u \\ &\vdots \\ y^{(r)} &= L_f^{(r)} h + L_g L_f^{(r-1)} h u \end{aligned}$$

Supponiamo che:

- $L_g L_f^i h = 0, \quad i = 0, 1, \dots, r-2$
- $L_g L_f^{(r-1)} h \neq 0$

sotto queste ipotesi il sistema si dice *di grado relativo*  $r$  (C.N.S.).

Quindi il grado relativo di un sistema rappresenta il numero di volte che si deve derivare la sua uscita per far comparire l'ingresso  $u$ .

Anche per i sistemi lineari può essere calcolato il grado relativo <sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup> In questo caso corrisponde alla differenza poli-zero nella funzione di trasferimento

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Ricavando  $u$  dalla derivata  $r$ -esima di  $y$  e ponendo  $v = y^{(r)}$  otteniamo un ingresso in controreazione del tipo scelto all'inizio

$$u = -\frac{L_f^r h}{L_g L_f^{r-1} h} + \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h} v = \alpha(x) + \beta(x)v$$

$$\alpha(x) = -\frac{L_f^r h}{L_g L_f^{r-1} h} \quad \beta(x) = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h}$$

con  $v = y^{(r)}$ .

Possiamo allora usare le derivate successive di  $y$  per un cambio di variabili

$$\begin{aligned} z_1 &= y = h(x) \\ z_2 &= \dot{y} = L_f h(x) \\ &\vdots \\ z_r &= y^{(r-1)} = L_f^{r-1} h(x) \end{aligned}$$

Nel caso in cui  $r = n$  resta solo da verificare che

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ L_f^2 h(x) \\ \vdots \\ L_f^{r-1} h(x) \end{pmatrix}$$

sia un cambio di variabili ammissibile, cioè che le  $r$  funzioni siano *indipendenti*; ovvero le righe  $[dh(x_0), dL_f h(x_0), \dots, dL_f^{r-1} h(x_0)]$  sono indipendenti se  $r$  è il grado relativo <sup>3</sup>. Dunque, se il sistema iniziale ha grado relativo  $r = n$  rispetto all'uscita  $y$  e il cambio di variabili è ammissibile, posso scrivere il sistema nelle nuove coordinate <sup>4</sup> ed ottenere una *linearizzazione esatta*

$$\left. \begin{array}{l} L_g(Cx) = CB = 0 \\ L_g L_f(Cx) = CAB = 0 \\ \vdots \\ L_g L_f^{r-1}(Cx) = CA^{r-1}B \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_{n-r+1} s^{n-r}}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n}.$$

Infatti come è noto dalla teoria dei sistemi lineari, il grado relativo  $r$  è indicato dal primo coefficiente di Markov non nullo.

<sup>3</sup> Per la dimostrazione vedi Lemma 4.1.1 sul testo "Nonlinear Control Systems" di A.Isidori.

<sup>4</sup> Se  $L_g L_f^k h = 0, \forall k \Rightarrow h(x)$  non dipende da  $u$ ; infatti sotto queste ipotesi lo sviluppo in serie di Taylor di  $h(x)$  attorno ad un punto  $x_0$  assume la forma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} L_f^k h(x)|_{x=x_0} \frac{(t-t_0)^k}{k!}.$$

in feedback

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \vdots & \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= b(z) + a(z)u \end{cases}$$

che corrisponde ad un sistema lineare con reazione del tipo scelto,  $u = -\frac{b(z)}{a(z)} + \frac{v}{a(z)}$ .

Il fatto che il sistema abbia grado relativo  $r = n$ , non dipende solamente dalla forma del sistema, ma anche dalla funzione di uscita  $h(x)$  scelta.

In effetti, è facile dimostrare che  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  è linearizzabile in feedback se e solo se esiste una funzione  $\lambda(x)$  (che potrei non conoscere), che dà grado relativo  $r = n$ . Cerchiamo di capire per quali sistemi è possibile trovare  $\lambda(x)$ , che possa soddisfare:

$$\begin{cases} L_g h(x) = L_g L_f h(x) = \dots = L_g L_f^{n-2} h(x) = 0 \\ L_g L_f^{n-1} h(x) \neq 0 \end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases} L_g \lambda(x) = L_{ad_f g} \lambda(x) = \dots = L_{ad_f^{n-2} g} \lambda(x) = 0 \\ L_{ad_f^{n-1} g} \lambda(x) \neq 0 \end{cases}$$

(abbiamo supposto  $r = 1$ , allora  $n - r - 1 = n - 2$ ).

**Theorem 2** *Condizione Necessaria e Sufficiente affinché esista una funzione  $\lambda(x)$  che, presa come uscita del sistema  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  con  $f(x_0) = 0$ , dia grado relativo  $n$*

ovvero

*affinché esistano un cambiamento di variabili  $\Phi(x)$  e le funzioni di retroazione statica  $\alpha(x)$  e  $\beta(x)$  tali da linearizzare il sistema detto*

è che

A)  $\text{rank}[g(x_0) \ ad_f g(x_0) \ \dots \ ad_f^{n-1} g(x_0)] = n;$

B)  $\text{span}\{g, \ ad_f g, \ \dots, \ ad_f^{n-2} g\}$  sia involutivo.

Nel caso SISO, la condizione IFF composta da:

a)  $\dim \text{span}\{g, \ ad_f g, \ \dots, \ ad_f^{n-1} g\} = n;$

b) la distribuzione  $\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-1} g\}$  è involutiva.

In alcuni casi l'idea è banale.

### Esempio.

Riprendiamo l'equazione della dinamica di un link collegato a un motore:

$$\tau = I\ddot{q} + mgL \sin q.$$

Pongo

$$\begin{aligned} x_1 &= q \\ x_2 &= \dot{q} \\ u &= \tau \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{mgL}{I} \sin x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \end{pmatrix} u$$

Se faccio  $u = mgL \sin x_1 + Iv$  ottengo

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v$$

A questo punto, disegno  $v$  con metodi lineari, per ottenere comportamenti arbitrari.

### Esempio.

Nel caso del link con cedevolezza la cosa è meno banale:

$$\begin{cases} I\ddot{q}_1 + mgL \sin q_1 + k(q_1 - q_2) = 0 \\ J\ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) = \tau \end{cases}$$

Si può notare che in questo caso si ha la nonlinearietà nella prima equazione e il controllo nella seconda. Pongo

$$x = \begin{pmatrix} q_1 \\ \dot{q}_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}$$

e

$$f = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{mgL}{I} \sin x_1 - \frac{k}{I}(x_1 - x_3) \\ x_4 \\ \frac{k}{J}(x_1 - x_3) \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \end{pmatrix}$$

allora ottengo

$$\left[ g, [f g], [f[f g]], [f[f[f g]]] \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{k}{IJ} \\ 0 & 0 & \frac{k}{IJ} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} & 0 & \frac{k}{J^2} \\ \frac{1}{J} & 0 & -\frac{k}{J^2} & 0 \end{pmatrix}$$

matrice che ha rango 4 per  $k \neq 0$  e  $IJ < \infty$ . Inoltre  $g$ ,  $ad_f g$ ,  $ad_f^2 g$  sono costanti e di conseguenza sono involutivi.

Quindi deve essere possibile trovare  $\lambda(x)$ . Come si trovano  $\Phi(x)$ ,  $\alpha(x)$  e  $\beta(x)$ ?

La prima componente di  $\Phi(x)$ ,  $z_1 = \Phi_1(x)$ , è scelta come quella superficie tangente a  $g$ ,  $[f g]$ ,  $\dots$ ,  $ad_f^{n-2} g$  (che sicuramente esiste), ma naturalmente non a  $ad_f^{n-1} g$ .

Quindi

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} g = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} [f g] = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} [f[f g]] = 0$$

$\vdots$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} ad_f^{n-2} g = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} ad_f^{n-1} g \neq 0$$

Nel nostro caso si ha

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} g = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_4} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} [f g] = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} [f[f g]] = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} a d_f^3 g \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \neq 0$$

$\Phi_1$  deve essere funzione di  $x_1$  solamente. Ad esempio  $\Phi_1(x) = x_1$ . Le altre componenti di  $\Phi$  si ottengono così:

$$\Phi_2 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} f = x_2 = L_f \Phi_1(x)$$

$$\Phi_3 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} f = -\frac{mgL}{I} \sin x_1 - \frac{k}{I}(x_1 - x_3) = L_f^2 \Phi_1(x)$$

$$\Phi_4 = \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} f = -\frac{mgL}{I} x_2 \cos x_1 - \frac{k}{I}(x_2 - x_4) = L_f^3 \Phi_1(x)$$

Infine

$$\begin{cases} \alpha(x) = \frac{L_f^n \Phi_1}{L_g L f^{n-1} \Phi} = \frac{L_f^4 \Phi_1}{L_g L_f^3 \Phi_1} \\ \beta(x) = \frac{1}{L_g L f^{n-1} \Phi_1} = \frac{1}{L_g L_f^3 \Phi_1} \end{cases}$$

Nel nostro esempio

$$u = \frac{IJ}{k}(v - a(x)) = -\frac{a(x)}{\frac{k}{IJ}} + \frac{1}{\frac{k}{IJ}} v$$

$$a(x) = \frac{mgL}{I} \sin x_1 (x_2^2 + \frac{mgL}{I} \cos x_2 + \frac{k}{I}) + \frac{k}{I} (x_1 - x_3) (\frac{k}{I} + \frac{k}{J} + \frac{mgL}{I} \cos x_1)$$

e si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= x_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= v \end{aligned}$$

$$L_f^4 \Phi_1(x) = a(x)$$

$$L_g L_f^3 \Phi_1(x) = \frac{k}{IJ}$$



### 7.2.1 Procedura Operativa (Sistemi SISO)

Riassumiamo i passi da compiere per trovare un ingresso linearizzante e un cambio di coordinate:

- a) calcolare  $ad_f^i g$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ ;
- b) verificare le condizioni necessarie e sufficienti (A) e (B);
- c) dalle equazioni differenziali alle derivate parziali

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} [g(x) \dots ad_f^{n-2} g] = 0$$

integrare  $\lambda(x)$

- d) porre

$$\alpha(x) = -\frac{L_f^n \lambda(x)}{L_g L_f^{n-1} \lambda(x)}$$

$$\beta(x) = -\frac{1}{L_g L_f^{n-1} \lambda(x)}$$

- e) cambiare le coordinate con

$$\Phi(x) = (\lambda(x), L_f \lambda(x), \dots, L_f^{n-1} \lambda(x))$$

**Esempio.**

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x_2 \\ \sin x_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$[f \ g] = \begin{pmatrix} 0 \\ -c_3 \\ 0 \end{pmatrix}; [f \ [f \ g]] = \begin{pmatrix} c_2 c_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3; [g \ [f \ g]] = \begin{pmatrix} 0 \\ s_3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{span}\{g, [f \ g]\}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \lambda}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} c_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = x_1 = z_1 \\ L_f \lambda = s_2 = z_2 \\ L_f^2 \lambda = c_2 s_3 = z_3 \\ L_f^3 \lambda = -s_3^2 s_2 \\ L_g L_f^2 \lambda = c_2 c_3 \end{cases}$$

quindi

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v = s_3 T_2 T_3 + \frac{1}{c_2 c_3} v$$

definito su

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} < x_2 < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} < x_3 < \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Il nostro sistema, con una retroazione opportuna,  $v = kz$ , ha tutti i poli in  $-1$ :

$$\begin{aligned} (s+1)^3 &= s^3 + 3s^2 + 3s + 1 \\ k &= (-1 \quad -3 \quad -3). \end{aligned}$$

\*\*\*

**Osservazione:** la completa controllabilità dell'approssimazione lineare è condizione necessaria alla linearizzazione in retroazione.

Infatti, supponiamo che  $f(0) = 0$  (se  $f(x_0) = 0$ , traslo gli stati) ed effettuiamo la seguente scomposizione

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \Leftrightarrow \dot{x} = Ax + \hat{f}(x) + \hat{g}(x)u + Bu$$

con

$$\begin{aligned} \hat{f}(0) &= 0 & \hat{g}(0) &= 0 \\ B &= g(0) \\ A &= \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=0} \Rightarrow \frac{\partial \hat{f}}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \end{aligned}$$

Calcolando

$$[f, g] = [Ax + \hat{f}, B + \hat{g}] = \frac{\partial \hat{g}}{\partial x} Ax + \frac{\partial \hat{g}}{\partial x} \hat{f} - AB - A\hat{g} - \frac{\partial \hat{f}}{\partial x} B - \frac{\partial \hat{f}}{\partial x} \hat{g}$$

troviamo

$$[f, g]|_0 = -AB$$

e in generale  $ad_f^k g = (-1)^k A^k B + p_k(x)$ , dove  $p_k(0) = 0$ .

Quindi

$$\text{rank}\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-1} g\} \Big|_0 = \text{rank}[B, AB, \dots, A^{n-1} B]$$

Ciò significa che imporre la condizione (A) equivale a richiedere la completa controllabilità. Questo riduce il vantaggio della linearizzazione in retroazione (ingresso-stati), perché modi marginalmente stabili non-controllabili (ad esempio poli complessi coniugati posti sull'asse immaginario), ne impediscono l'applicazione. <

## 7.2.2 Linearizzazione Ingresso-Uscita

La linearizzazione esatta in retroazione (ingresso-stati) può essere inapplicabile in certi casi:

- a) se  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  non soddisfa le condizioni necessarie e sufficienti di esistenza di una funzione di “uscita”  $\lambda(x)$  con grado massimo;
- b) se il sistema ha una uscita  $h(x)$  con significato fisico tale da imporre la scelta (soprattutto in problemi di inseguimento);
- c) se non si vuole o non si riesce a integrare il sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali che definiscono l’uscita di grado relativo massimo.

In questi casi, si può comunque procedere a una linearizzazione esatta, ancorché parziale (talvolta detta ingresso-uscita):

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}$$

$$L_g L_f^i h(x) = 0 \quad i = 0, 1, \dots, r-2$$

$$L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$$

$$r < n.$$

Posso ancora utilizzare le  $r$  funzioni indipendenti di cui dispongo come parte di un cambiamento di variabili:

$$\begin{aligned} z_1 &= \Phi_1(x) = h(x) \\ z_2 &= \Phi_2(x) = L_f h(x) \\ &\vdots \\ z_r &= \Phi_r(x) = L_f^{r-1} h(x) \end{aligned}$$

Ma restano da trovare  $n - r$  funzioni indipendenti da queste. Questo in sé non è difficile, spesso basta prendere alcuni dei “vecchi” stati. Procedendo come fatto nel caso  $r = n$ , la dinamica delle nuove  $r$  variabili è

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) \dot{x} = L_f h = z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1} &= z_r \\ \dot{z}_r &= L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x) u \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)} \\ &= b(z) + a(z)u \end{aligned}$$

mentre per le restanti  $n - r$  non ci possiamo aspettare nulla di speciale:

$$\begin{aligned}\dot{z}_{r+1} &= q_{r+1}(z) + p_{r+1}(z)u \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= q_n(z) + p_n(z)u\end{aligned}$$

L'uscita del nuovo sistema è naturalmente ancora

$$y = h(x) = z_1.$$

La dinamica delle variabili del secondo gruppo dunque non influenza questa uscita (dopo la retroazione).

La scelta delle  $n - r$  variabili “complementari” deve solo soddisfare la condizione di costruire, con le prime  $r$  funzioni, un cambiamento di variabili lecito (invertibile), cioè

$$\det \left[ \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_n \end{pmatrix} \right] \neq 0$$

nella regione d'interesse.

È comodo peraltro scegliere le variabili complementari  $\Phi_{r+1} \dots \Phi_n$  in modo che

$$L_g \Phi_i(x) = 0 \quad r + 1 \leq i \leq n.$$

Infatti, in questo caso si ha

$$\begin{aligned}\dot{z}_{r+1} &= \frac{\partial \Phi_{r+1}}{\partial x} \dot{x} = L_f \Phi_{r+1}(x) + L_g \Phi_{r+1}(x)u = q_{r+1}(z) \\ &\vdots \\ z_n &= q_n(z)\end{aligned}$$

con  $x = \Phi^{-1}(z)$ .

Cosicché, la dinamica delle variabili complementari oltrechè ininfluenza sull'uscita, è indipendente dagli ingressi.

Nelle nuove coordinate, possiamo dunque riscrivere il sistema nella forma “normale”

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_0 \xi + b_0 v \\ \dot{\eta} = q(\xi, \eta) \end{cases} \quad y = \xi_1 = c_0 \xi$$

dove

$$\xi = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix}; \quad \eta = \begin{pmatrix} z_{r+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix};$$

$$A_0 = \left( \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \vdots & & I & \\ 0 & & & \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right); \quad b_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$c_0 = (1 \ 0 \ \dots \ 0);$$

e l'ingresso in retroazione linearizzato è

$$u = -\frac{b(\xi, \eta)}{a(\eta, \xi)} + \frac{1}{a(\xi, \eta)}v$$

Se per le variabili  $\eta$  non vale  $L_g \Phi_{r-1}(x) = 0$ , si avrà più in generale

$$\dot{\eta} = q(\xi, \eta) + p(\xi, \eta)v$$

da un punto di vista ingresso-uscita, il sistema è linearizzato; la sua f.d.t. è

$$\frac{y(s)}{v(s)} = \frac{1}{s^r}$$

Resta però la dinamica “interna”, delle variabili  $\eta$ .

La stabilizzazione del sottosistema linearizzato è solo “esterna” e non implica che il sistema nel suo complesso non possa avere componenti divergenti e quindi inaccettabili.

È quindi fondamentale studiare cosa accade della dinamica delle variabili  $\eta$ .

Per far questo, studiamo il problema:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_0 \xi + b_0 v \\ v = k \xi \\ \dot{\eta} = p(\xi, \eta) \end{cases}$$

determinando quali stati iniziali  $(\eta_0, \xi_0)$  e quali controlli mantengono l'uscita costantemente a zero; questo perchè le evoluzioni a partire da questi stati iniziali e con quei controlli rappresentano i “modi” della parte inaccessibile  $\eta_0(t)$ .

Ricordando che

$$y \equiv \xi_1 \equiv 0 \Rightarrow \xi_2 \equiv \dot{\xi}_1 \equiv 0 \Rightarrow \xi_3 \equiv \dot{\xi}_2 \equiv 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \xi_r \equiv \dot{\xi}_{r-1} \equiv 0$$

perciò

$$\xi_0 = \xi(t) = 0$$

$$\xi_r = v \Rightarrow v \equiv 0 \Rightarrow u = -\frac{b(0, \eta)}{a(0, \eta)}$$

resta dunque

$$\dot{\eta} = q(0, \eta) \quad \eta_0 \text{ qualsiasi.}$$

Questa equazione in  $\eta$  viene chiamata *Zero Dinamica*.

Il nome Zero Dinamica deriva dall'analogia con il comportamento dei sistemi lineari che possiedono un polinomio degli zeri:

$$G(s) = k \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_{n-r-1} s^{n-r-1} + s^{n-r}}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n}$$

realizzato in forma minima (canonica di controllo) come

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

$$A = \left( \begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & I & \\ \hline -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} & \end{array} \right); \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k \end{pmatrix}; \quad C = (b_0 \dots b_{n-r-1} \ 1 \ 0 \ \dots \ 0).$$

Trattando  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $y = Cx$  come sistema non lineare, la sua forma normale è ottenuta ponendo

$$\begin{aligned} \xi_1 &= y = Cx = b_0 x_1 + \dots + x_{n-r+1} \\ \xi_2 &= \dot{y} = CAx = B_0 x_2 + \dots + x_{n-r+2} \\ &\vdots \\ \xi_r &= y^{(r-1)} = CA^{r-1}x = B_0 x_r + \dots + x_n \end{aligned}$$

e scegliendo per complemento

$$\begin{aligned} \eta_1 &= x_1 \\ &\vdots \\ \eta_{n-r} &= x_{n-r}. \end{aligned}$$

Per questa scelta, si ha

$$\frac{\partial}{\partial x} \Phi(x) = \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \eta(x) \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{cccc|cccc} b_0 & b_1 & \dots & b_{n-r-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & \dots & b_{n-r-2} & b_{n-r-1} & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_0 & b_{r+1} & \dots & b_{n-r-1} & 1 \\ \hline 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right)$$

quindi lo jacobiano è sicuramente non-singolare e inoltre  $L_g\eta(x) = (I_{n-r} \mid 0)B = 0$ .

La forma normale è dunque

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_0\xi + b_0v \\ \dot{\eta} = q(\xi, \eta) = P\xi + Q\eta \end{cases}$$

La dinamica di  $\eta$  è infatti certamente lineare; per di più vale

$$Q = \left( \begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & I & \\ \hline -b_0 & -b_1 & \dots & -b_{n-r-1} & \end{array} \right)$$

infatti

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \dot{x}_1 = x_2 = \eta_2 \\ &\vdots \\ \dot{\eta}_{n-r-1} &= \eta_{n-r} \\ \dot{\eta}_{n-r} &= \dot{x}_{n-r} = x_{n-r+1} = \\ &= \xi_1 - b_0\eta_1 - b_1\eta_2 - \dots - b_{n-r-1}\eta_{n-r} \end{aligned}$$

La Zero Dinamica è quindi

$$\dot{\eta} = q(0, \eta) = Q\eta$$

cioè, ha polinomio caratteristico

$$b_0 + b_1s + \dots + b_{n-r-1}s^{n-r-1} + s^{n-r}$$

ovvero il polinomio degli zeri di  $G(s)$ . Gli zeri di trasmissione sono proprio quei valori di  $s \in \mathcal{C}$  per i quali esistono condizioni iniziali tali per cui l'ingresso  $e^{st}$  lascia invariata l'uscita.

L'importanza dello studio della zero dinamica discende dal seguente teorema.

**Theorem 3** *Con riferimento alla forma normale*

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_0\xi + b_0v \\ \dot{\eta} = q(\xi, \eta) \\ y = \xi_1 \end{cases}$$

*una retroazione  $v = v(\xi) = k\xi$ , con  $k = (-k_0 \dots -k_r)$  coefficienti di un polinomio a radici con parte reale negativa, rende certamente asintoticamente stabile il sistema non lineare originale se la Zero Dinamica  $\dot{\eta} = q(0, \eta)$  è asintoticamente stabile (in  $\eta_0 = 0$ ).*

Il controllo che effettivamente stabilizza il sistema originale

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}$$

è

$$u(x) = -\frac{L_f^r h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)} + \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)} (-k_0 \Phi_1(x) - \dots - k_{r-1} \Phi_{r-1}(x)).$$

Il risultato è quasi banale se l'approssimazione lineare del sistema è stabilizzabile. Il linearizzato approssimante è infatti

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ \star & Q \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_0 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

con autovalori unione di quelli di  $A$  e quelli di  $Q$  (con  $Q$  vuota se il sistema originario è controllabile e  $Q$  stabile se il sistema originario è stabilizzabile). Il punto importante è che la zero dinamica può essere dimostrata stabile anche quando la sua linearizzazione è solo marginalmente stabile; cioè possono essere resi asintoticamente stabili anche sistemi la cui approssimazione lineare possiede autovalori sull'asse immaginario.

### Esempio.

Prendiamo un sistema con:

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_3 - x_2^3 \\ -x_2 \\ x_1^2 - x_3 \end{pmatrix}; \quad g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad y(x) = x_1.$$

Calcoliamo il grado relativo

$$\begin{aligned} h(x) &= x_1 \\ L_f h(x) &= (1 \ 0 \ 0) f(x) = x_3 - x_2^3 \\ L_g h(x) &= (1 \ 0 \ 0) g(x) = 0 \\ L_f^2 h(x) &= (0 \ -3x_2^2 \ 1) f(x) = 3x_2^3 + x_1^2 - x_3 \\ L_g L_f h(x) &= (0 \ -3x_2^2 \ 1) g(x) = 3x_2^2 + 1 \neq 0 \\ &\Rightarrow r = 2 \end{aligned}$$

Esiste un'altra uscita con  $r = 3$ ?

Verifichiamo le condizioni (A) e (B):

$$ad_f g = [f \ g] = - \begin{pmatrix} 0 & -2x_2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2x_1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_2^2 - 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$ad_f^2 g = \begin{pmatrix} 3x_2^2 - 1 \\ -1 \\ 6x_1x_2 + 2x_1 + 1 \end{pmatrix}$$

$$[g \ [f \ g]] = \begin{pmatrix} 6x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in span \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3x_2^2 - 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

La condizione (B) è verificata, ma la (A) non lo è ...

$$rank [g(x) \ ad_f g(x) \ ad_f^2 g(x)]|_{x=0} = 2$$

Non esiste allora una funzione  $\lambda(x)$  che dia grado relativo massimo per effettuare una linearizzazione esatta.

Scegliamo le nuove coordinate:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 \\ \xi_2 &= L_f h = x_3 - x_2^3 \end{aligned}$$

$\eta_1(x)$ :

$$L_g \eta_1 = 0$$

$$d\eta_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \begin{cases} \nearrow \eta_1 = \alpha x_1 \\ \searrow \eta_1 = \alpha x_2 + \alpha x_3 \end{cases}$$

la scelta  $\eta = \alpha x_1$  non è indipendente da  $\xi_1 = x_1$ ; quindi scelgo  $\eta = x_2 + x_3$  (con la costante  $\alpha = 1$ ).

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 - x_2^3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix};$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3x_2^2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Forma normale:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= (x_1^2 + 3x_2^3 + x_3) + (3x_2^2 + 1)u \\ \dot{\eta}_1 &= \frac{\partial \Phi_3}{\partial x}(f + gu) = x_1^2 - x_2 - x_3 = \xi_1^2 - \eta_1 \\ y &= \xi_1 \end{aligned}$$

Zero dinamica:

$$y \equiv 0 \Rightarrow \xi_1 \equiv 0, \xi_2 \equiv 0 \Rightarrow \dot{\eta}_1 = -\eta_1, \forall \eta_1(0)$$

$$\begin{cases} u = -\frac{x_1^2 + 3x_2^3 - x_3}{3x_2^2 + 1} + \frac{1}{3x_2^2 + 1}v \\ v = (k_1 \ k_2) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$\Rightarrow$  Il sistema è asintoticamente stabile (esternamente e internamente).

### 7.3 Inseguimento di traiettorie

Supponendo che il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}$$

abbia grado relativo  $r$  e che sia stato posto nella forma normale

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_0\xi + b_0\nu \\ \dot{\eta} = q(\eta, \xi) + p(\eta, \xi)\nu \end{cases}$$

utilizzando l'ingresso linearizzante

$$u = -\frac{b(\eta, \xi)}{a(\eta, \xi)} + \frac{1}{a(\eta, \xi)}\nu,$$

desideriamo inseguire una traiettoria assegnata per l'uscita

$$y(t) = \hat{y}(t).$$

Perché l'inseguimento sia perfetto, dovremo supporre

$$y(0) = h(x_0) = \hat{y}(0),$$

e se definisco il vettore

$$\hat{\xi} = \begin{pmatrix} \hat{y} \\ \dot{\hat{y}} \\ \vdots \\ \hat{y}^{(r-1)} \end{pmatrix}$$

si ha che

$$y(t) \equiv \hat{y}(t), \forall t \Leftrightarrow \xi(t) = \hat{\xi}(t).$$

In pratica tutto ciò implica che le variabili di stato  $\xi$  coincidano con l'uscita e le sue derivate in un intorno di  $t = 0$ .

In questo caso, scegliendo l'ingresso  $\nu = \hat{y}^{(r)}$ , cioè

$$u = -\frac{b(\eta, \hat{\xi})}{a(\eta, \hat{\xi})} + \frac{1}{a(\eta, \hat{\xi})} \hat{y}^{(r)}.$$

con  $\eta$  soluzione di

$$\dot{\eta} = q(\hat{\xi}, \eta) + p(\hat{\xi}, \eta) \hat{y}^{(r)}$$

otteniamo lo scopo:

$$y^{(r)} = \dot{\xi}_{r-1} = b(\xi, \eta) + a(\xi, \eta) \left\{ -\frac{b(\xi, \eta)}{a(\xi, \eta)} + \frac{1}{a(\xi, \eta)} \hat{y}^{(r)} \right\} = \hat{y}^{(r)}.$$

Naturalmente, nella pratica è difficile poter fissare gli stati iniziali del sistema e allo stesso tempo condizioni iniziali sbagliate non permetterebbero di ottenere questo risultato. In tale caso, quanto di meglio si può chiedere è un inseguimento asintotico cioè tale che  $\|y(t) - \hat{y}(t)\| \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow \infty$ .

Questo si ottiene sfruttando il controllo "lineare"  $\nu$ :

$$\nu = \hat{y}^{(r)} - c_{r-1}(\xi_r - \hat{\xi}_r) - \dots - c_0(\xi_1 - \hat{\xi}_1)$$

Fissato

$$e = \xi - \hat{\xi}$$

il vettore di errore, ho

$$\nu = \hat{y}^{(r)} - c^T e \text{ con } c^T = (c_0 \ c_1 \ \dots \ c_{r-1})$$

$$\dot{\xi}_r = \hat{y}^{(r)} - c^T e \Rightarrow e_1^{(r)} + c_{r-1} e_1^{(r-1)} + \dots + c_0 e_1 = 0.$$

Scegliendo i coefficienti  $c_i$  in modo opportuno, l'errore di inseguimento viene fatto convergere a zero con dinamica arbitraria (lineare).

Riconsideriamo la dinamica delle variabili  $\eta$ :

$$\dot{\eta} = q(\xi, \hat{\xi}) + p(\eta, \hat{\xi}) \hat{y}^{(r)}$$

e l'ingresso

$$u = -\frac{b(\xi, \eta)}{a(\xi, \eta)} + \frac{1}{a(\xi, \eta)} \hat{y}^{(r)}$$

Notando che  $\hat{y}(t)$  (quindi  $\hat{y}^{(r)}$ ,  $\hat{\xi}(t)$ ) sono assegnati, posso vederlo come un sistema che, prendendo le uscite desiderate per ingresso, fornisce come uscita gli ingressi necessari all'inseguimento, usando come stati gli  $\eta$ : *Sistema Inverso*.

Il problema residuo nell'inseguimento è la limitatezza di  $\eta$ ,  $\xi$  ed  $u$ .

**Theorem 4** *Sotto le seguenti ipotesi:*

- se  $\hat{y}(t), \dot{\hat{y}}(t), \dots, \hat{y}^{(r)}$  sono sufficientemente “piccoli”,
- se  $\dot{\eta} = f(\eta, \hat{y})$  è asintoticamente stabile e limitata,
- e se  $c$  ha coefficienti Hurwitz,

$\Rightarrow \eta, \xi$  sono limitati.

## 7.4 Linearizzazione in retroazione MIMO

Consideriamo un sistema “quadrato”

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \\ y_1 = h_1(x) \\ \vdots \\ y_m = h_m(x) \end{cases}$$

e procediamo, analogamente al caso SISO, a differenziare le uscite finché non appare esplicitamente almeno uno degli ingressi:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = h_1(x) \\ \dot{y}_1 = L_f h_1(x) \\ \vdots \\ y_1^{(r_1)} = L_f^{r_1} h_1(x) + L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x) u_1 + \dots + L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x) u_m \\ \quad \text{(dove almeno una delle } L_{g_i} L_f^{r_1-1} h_1(x) \neq 0) \\ \\ y_2 = h_2(x) \\ \dot{y}_2 = L_f h_2(x) \\ \vdots \\ y_2^{(r_2)} = L_f^{r_2} h_2(x) + \sum_{i=1}^m L_{g_i} L_f^{r_2-1} h_2(x) u_i \\ \quad \text{(dove almeno una delle } L_{g_i} L_f^{r_2-1} h_2(x) \neq 0) \\ \\ \vdots \\ \vdots \\ \\ y_m = h_m(x) \\ \dot{y}_m = L_f h_m(x) \\ \vdots \\ y_m^{(r_m)} = L_f^{r_m} h_m(x) + \sum_{i=1}^m L_{g_i} L_f^{r_m-1} h_m(x) u_i \\ \quad \text{(dove almeno una delle } L_{g_i} L_f^{r_m-1} h_m(x) \neq 0) \end{array} \right.$$

Consideriamo le ultime equazioni di queste catene in forma matriciale; si ha

$$\begin{pmatrix} y_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ y_m^{(r_m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_f^{r_1} h_1(x) \\ \vdots \\ L_f^{r_m} h_m(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

$$\underline{y} = \Gamma(x) + E(x)\underline{u}$$

Se la matrice  $E(x)$  è invertibile (in un intorno di un punto  $x_0$ ), si dice che il sistema ha grado relativo vettoriale

$$\underline{r} = (r_1 \dots r_m)^T$$

e grado relativo totale  $r = \sum_{i=1}^m r_i$ .

Se questo accade posso definire  $r$  funzioni dei vecchi stati

$$\begin{array}{llll} \xi_1^1 = \xi_1 = h_1(x) & \xi_1^2 = \xi_{r_1+1} = h_2(x) & \dots & \xi_1^m = \xi_{r+1} = h_m(x) \\ \xi_2^1 = \xi_1 = L_f h_1(x) & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{r_1}^1 = \xi_{r_1} = L_f^{r_1-1} h_1(x) & \xi_{r_2}^2 = \xi_{r_1+r_2} = L_f^{r_2-1} h_2(x) & \dots & \xi_{r_m}^m = \xi_r = L_f^{r_m-1} h_m(x) \end{array}$$

che sono indipendenti e altre  $(n - r)$  funzioni indipendenti da queste

$$\eta_1(x) \dots \eta_{n-r}(x)$$

tali che per  $i = 1, \dots, m$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi}_1^i = \xi_2^i \\ \dot{\xi}_2^i = \xi_3^i \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{r_i-1}^i = \xi_{r_i}^i \\ \\ \dot{\xi}_{r_i}^i = b_i(\xi, \eta) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(\xi, \eta) u_j \\ \\ \dot{\eta} = q(\xi, \eta) + \sum_{j=1}^m p_j(\xi, \eta) u_j \end{array} \right. \leftarrow \left\{ \begin{array}{l} y_1 = \xi_1^1 \\ y_2 = \xi_1^2 \\ \vdots \\ y_m = \xi_1^m \\ \\ \left. \begin{array}{l} \text{righe di } \Gamma(x), E(x) \\ \text{(con } x = \Phi^{-1}(\eta, \xi)) \\ \text{in cui interviene} \\ \text{l'ingresso} \end{array} \right\}$$

Se poi trovo  $\eta(x) : L_{g_j} \eta(x) = 0 \forall j$ , scompare l'ultima sommatoria e resta  $\dot{\eta} = q(\eta, \xi)$  (ciò è possibile solo se  $\text{span}\{g_1 \dots g_m\}$  è involutivo).

Questa è detta *forma normale* per il sistema MIMO a m-ingressi e m-uscite.

Il problema della linearizzazione in retroazione per un sistema

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i$$

consiste nel trovare un vettore di  $m$  funzioni

$$\alpha(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1(x) \\ \vdots \\ \alpha_m(x) \end{pmatrix}$$

ed una matrice di  $m \times m$  funzioni

$$\beta(x) = \begin{pmatrix} \beta_{11}(x) & \dots & \beta_{1m}(x) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \beta_{m1}(x) & \dots & \beta_{mm}(x) \end{pmatrix}$$

tali che, ponendo

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = \alpha(x) + \beta(x)v$$

esista un cambio di coordinate  $\xi = \Phi(x)$  nel quale sia

$$\dot{\xi} = A\xi + Bu$$

$$A = \text{diag}(A_1, \dots, A_m), \quad B = \text{diag}(b_1, \dots, b_m)$$

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad b_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il problema è risolubile se e solo se esistono  $m$  funzioni di “uscita”  $h_1(x), \dots, h_m(x)$  rispetto alle quali il sistema ha grado relativo  $r_1, r_2, \dots, r_m$ , con

$$r_1 + r_2 + \dots + r_m = n.$$

In questo caso, le nuove coordinate sono scelte come visto sopra:

$$\xi_1^1 = h_1, \quad \xi_2^1 = \dot{h}_1 = L_f h, \quad \dots, \quad \xi_2^2 = h_2, \quad \text{etc.} \dots$$

Il controllo linearizzante è

$$U = -E^{-1}(x)\Gamma(x) + E^{-1}(x)\nu$$

(si ricordi l'ipotesi  $E(x)$  invertibile).

**Theorem 5** *La linearizzazione esatta (completa) in retroazione è possibile per il sistema*

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i$$

se e solo se considerando:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \text{span}\{g_1 \dots g_m\} \\ \Gamma_1 &= \Gamma_0 + [f \Gamma_0] \\ &\vdots \\ \Gamma_i &= \Gamma_{i-1} + [f \Gamma_{i-1}] = \text{span}\{ad_f^k g_j, 0 \leq k \leq i, 1 \leq j \leq m\} \end{aligned}$$

si ha ...

$$\begin{aligned} \dim \Gamma_i &= \text{cost} && \text{in un intorno di } \bar{x}, \text{ per } i = 1, \dots, n-1 \\ \dim \Gamma_{n-1} &= \eta && (\text{controllo linearizzante approssimante}) \\ \Gamma_i &\text{ è involutiva, con } 0 \leq i \leq n-2. \end{aligned}$$

**Osservazione:** se il sistema è SISO, la condizione coincide con quella vista. Se le uscite  $h_1(x) \dots h_m(x)$  sono già assegnate, ovvero se non è possibile trovarne di perfettamente linearizzanti, potrò procedere ad una linearizzazione parziale (ingresso-uscita). Se  $r_1 + \dots + r_m = r < n$  e  $E(x)$  è invertibile (cioè, è definito un grado relativo), posso sempre applicare il controllo

$$u(x) = -E^{-1}(x)\Gamma(x) + E(x)\nu$$

che ottiene la perfetta *noninterazione* e linearizzazione I/O:

$$\begin{array}{l} y_1^{(r_1)} = h_1^{(r_1)} = \nu_1 \\ y_2^{(r_2)} = h_2^{(r_2)} = \nu_2 \\ \vdots \end{array} \leftarrow \begin{cases} \text{catene di} \\ r_i \text{ integratori} \end{cases}$$

Intrinsecamente, restano  $n - r$  variabili di stato non “visibili” dal rapporto I/O:

$$\dot{\eta} = q(\xi, \eta) + p(\xi, \eta)u = q(\xi, \eta) - p(\xi, \eta)E^{-1}(\cdot)\Gamma(\cdot) + p(\xi, \eta)E^{-1}(\cdot)\nu$$

Si hanno risultati analoghi al caso SISO:

- i controlli  $\nu_i = -c_0^i \xi_1^i - c_1^i \xi_2^i - \dots - c_{r_i-1}^i \xi_{r_i}^i + \bar{\nu}_i$  pongono i poli delle catene nelle posizioni desiderate (LHP);
- la retroazione (a) rende tutto il sistema stabile se la zero dinamica

$$\dot{\eta} = q(0, \eta) + p(0, \eta)u(0, \eta)$$

è asintoticamente stabile.

Se il sistema non ha grado relativo definito ( $E(x)$  singolare) *non* è disaccoppiabile, ma può essere linearizzabile I/O<sup>5</sup>.<

### Esempio.

Supponiamo di avere il sistema

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 + x_2^2 \\ x_3 - x_1x_4 + x_4x_5 \\ x_2x_4 + x_1x_5 - x_5^2 \\ x_5 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$$

---

<sup>5</sup>Vedi testo Isidori



$$g_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(x_1 - x_3) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad g_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = h_1(x) = x_1 - x_5 \\ y_2 = h_2(x) = x_4 \end{cases}$$

In questo caso

$$r = \{2 + 3\}$$

è il grado relativo totale massimo.

\*\*\*

## 7.5 Pendolo inverso

### 7.5.1 Modello fisico

Le equazioni dinamiche del modello sono date da

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + ml \cos \theta \ddot{\theta} - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 = u \\ ml \cos \theta \ddot{x} + ml^2 \ddot{\theta} - mgl \sin \theta = 0 \end{cases}$$

dove  $M$  è la massa del carrello,  $m$  è la massa posta all'estremità dell'asta (l'asta si considera di peso trascurabile),  $l$  è la lunghezza dell'asta,  $x$  è l'ascissa del carrello e  $g$  è l'accelerazione di gravità. L'ingresso  $u$  rappresenta una forza applicata al carrello. Allo scopo di ottenere un sistema di equazioni in forma standard poniamo

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \theta \\ x_3 = \dot{x} \\ x_4 = \dot{\theta} \end{cases}$$

ottenendo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = \frac{l \sin x_2 x_4^2 - mg \sin x_2 \cos x_2 + u}{M + m \sin x_2} \\ \dot{x}_4 = \frac{(M + m)g \sin x_2 - ml \cos x_2 \sin x_2 x_4^2 - \cos x_2 u}{l(M + m \sin x_2)} \end{cases}$$

Adesso possiamo porre il sistema affine nella classica forma

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

con

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{m \sin x_2 (lx_4^2 - g \cos x_2)}{M + m \sin x_2} \\ \frac{(M + m)g \sin x_2 - ml \sin x_2 \cos x_2 x_4^2}{l(M + m \sin x_2)} \end{bmatrix}$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M + m \sin x_2} \\ \frac{-\cos x_2}{l(M + m \sin x_2)} \end{bmatrix}$$

Per avere un sistema SISO prendiamo come uscita soltanto l'angolo dell'asta (angolo nullo quando l'asta è in posizione verticale); quindi l'uscita sarà

$$y = h(x) = x_2$$

Le linearizzazioni verranno effettuate intorno a

$$x_{eq} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

punto di equilibrio instabile.

## 7.5.2 Linearizzazione approssimata

La linearizzazione approssimata sfrutta la formula di Taylor per linearizzare il sistema non lineare

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

attorno a un punto di equilibrio.

Prendiamo come punto di equilibrio  $x_{eq}$  e applichiamo una volta Taylor

$$\dot{x} = Ax + \tilde{f}(x) + (B + \tilde{g}(x))u$$

con

$$A = \left. \frac{\partial}{\partial x} f(x) \right|_{x=x_{eq}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-mg}{M} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{g(M+m)}{lM} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \left. \frac{\partial}{\partial x} g(x) \right|_{x=x_{eq}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-m}{M^2} \\ \frac{m}{lM^2} \end{bmatrix}$$

Il nostro sistema approssimato è allora

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

### 7.5.3 Linearizzazione esatta

Calcoliamo il grado relativo del sistema

$$L_g h(x) = L_g x_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ * \\ * \end{bmatrix} = 0$$

$$L_f h(x) = [0 \ 1 \ 0 \ 0] f(x) = x_4$$

$$L_g L_f h(x) = L_g x_4 = [0 \ 0 \ 0 \ 1] g(x) = -\frac{\cos x_2}{l(M + m \sin x_2)}$$

$$L_g L_f h(x_{eq}) = -\frac{1}{lM}.$$

Il grado relativo del sistema è  $r = 2$ . Quindi la linearizzazione esatta sarà parziale, perché abbiamo a disposizione soltanto due funzioni indipendenti per il cambio di variabili:

$$\xi_1 = h(x) = x_2$$

$$\xi_2 = L_f h(x) = x_4$$

Per completare il cambio di variabili dobbiamo trovarne altre due indipendenti dalle altre e che possibilmente soddisfino la condizione  $L_g z_i = 0$ .

$$L_g \eta_3 = 0 \Rightarrow \frac{\partial \eta_3}{\partial x} g(x) = \frac{\partial x_1}{\partial x} g(x) = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ * \\ * \end{bmatrix} = 0$$

per  $\eta_3 = x_1$ .

$$L_g \eta_4 = 0 \Rightarrow \frac{\partial \eta_4}{\partial x} g(x) = \frac{\partial}{\partial x} [x_3 \cos x_2 + l x_4] g(x) =$$

$$= [0 \ * \ \cos x_2 \ l] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l \frac{ml}{ml_2(M + m \sin x_2)} \\ (-\cos x_2) \frac{ml}{ml_2(M + m \sin x_2)} \end{bmatrix} = 0$$

per  $\eta_4 = x_3 \cos x_2 + l x_4$  (la velocità assoluta della punta dell'asta).  
Adesso il cambio di variabili è completo

$$z = \Phi(x) = \begin{cases} \xi_1 = x_2 \\ \xi_2 = x_4 \\ \eta_3 = x_1 \\ \eta_4 = x_3 \cos x_2 + l x_4 \end{cases}$$

$$x = \Phi^{-1}(z) = \begin{cases} x_1 = \eta_3 \\ x_2 = \xi_1 \\ x_3 = \frac{\eta_4 - l \xi_2}{\cos \xi_1} \\ x_4 = \xi_2 \end{cases}$$

Il sistema complessivo nelle nuove variabili è descritto da

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \frac{(M + m)g \sin \xi_1 - ml \cos \xi_1 \sin \xi_1 \xi_2^2 - \cos \xi_1 u}{l(M + m \sin \xi_1)} \\ \dot{\eta}_3 = \frac{\eta_4 - l \xi_2}{\cos \xi_1} \\ \dot{\eta}_4 = \frac{(-lm(\cos \xi_1)^2 + \sin \xi_1 l M + l m) \xi_2}{(M + m \sin \xi_1) \cos \xi_1} + \frac{(-m + m(\cos \xi_1)^2 - \sin \xi_1 M) \eta_4}{(M + m \sin \xi_1) \cos \xi_1} + \dots \\ \dots + \frac{-mg \sin \xi_1 (\cos \xi_1)^3 + mg \sin \xi_1 \cos \xi_1 + g M \sin \xi_1 \cos \xi_1}{(M + m \sin \xi_1) \cos \xi_1} \end{array} \right.$$

Calcoliamo adesso l'ingresso linearizzante derivando l'uscita

$$\begin{aligned} y &= x_2 \\ \dot{y} = \dot{x}_2 &= x_4 \\ \ddot{y} = \dot{x}_4 = v &= \frac{(M+m)g \sin x_2 - ml \cos x_2 \sin x_2 x_4^2 - \cos x_2 u}{l(M+m \sin x_2)} \end{aligned}$$

da cui

$$u = \frac{\sin x_2}{\cos x_2} [(M+m)g - ml \cos x_2 x_4^2] - \frac{l(M+m \sin x_2)}{\cos x_2} v = \alpha(x) + \beta(x)v$$

Osserviamo adesso l'andamento della zero dinamica facendo evolvere liberamente il sistema partendo dallo stato iniziale  $x_{eq}$ . Otteniamo l'espressione

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = 0 \\ \dot{\xi}_2 = 0 \\ \dot{\eta}_3 = \eta_4 \\ \dot{\eta}_4 = 0 \end{cases}$$

Si può notare che la zero dinamica è marginalmente stabile quindi il sistema linearizzato sarà asintoticamente stabile solo esternamente.

### 7.5.4 Confronto tra i due metodi di linearizzazione

In questo esempio si ricercano le differenze tra due diversi metodi di linearizzazione che si possono applicare su un sistema non lineare.

La linearizzazione standard si basa sullo sviluppo in serie di Taylor delle funzioni caratterizzanti il sistema in studio. Questo processo di approssimazione genera un sistema lineare che modella il non lineare intorno ad un punto di lavoro prestabilito. Sul modello lineare trovato si possono progettare controllori in grado di far evolvere il sistema secondo le specifiche date. Tali controllori se applicati al non lineare di partenza manterranno le specifiche di progetto su punti vicini al punto di lavoro. Non è detto però che se il sistema si allontana troppo da tale punto non si generi instabilità perché il modello lineare non approssima più il sistema originario non lineare.

La linearizzazione in feedback (o linearizzazione esatta) ricerca attraverso un retroazione dello stato di generare un ingresso che linearizza il sistema intorno ad un punto di lavoro. Come si può vedere dalla figura 2 il sistema visto dal nuovo ingresso  $v$  è lineare e sarà caratterizzato da un modello simile a quello generato dalla linearizzazione standard. Anche in questo caso il

controllore progettato sul modello lineare può dare problemi di instabilità su punti lontani dal punto di lavoro.

Si ricerca in questo esempio di verificare che l'intorno di stabilità del controllo effettuato sul modello lineare standard è più piccolo di quello sul linearizzato in feedback. Per confrontare correttamente i due metodi occorre che i controllori progettati siano tali da far sì che i sistemi in retroazione abbiano gli stessi poli e zeri (in pratica siano lo stesso sistema lineare). Il sistema non lineare scelto è il pendolo inverso mostrato in figura 3 .

L'ingresso del sistema è la forza applicata al carrello mentre l'uscita è la misura dell'angolo dell'asta (Sistema di tipo SISO).

### 7.5.5 Linearizzazione in feedback

Il modello lineare ottenuto da questo metodo è un sistema con due poli nell'origine. Come controllore si utilizza perciò una rete correttiva ( rete anticipatrice ) e un controllo proporzionale per stabilizzare il sistema ottenendo il luogo delle radici mostrato in figura 4. La rete anticipatrice ha uno zero in -2 e un polo in -20 mentre la scelta della componente proporzionale è stata effettuata in modo da testare due diversi tipi di controllo :

1.  $K=12.5$  : con questa scelta i poli del sistema in retroazione sono posizionati in -5 -5 -10 .
2.  $K=100$  : i poli in questo caso sono complessi coniugati .

### 7.5.6 Linearizzazione standard

Il modello lineare ottenuto con la funzione *linmod.m* di MATLAB presenta poli in -1.4832 e 1.4832 . Il sistema è ovviamente instabile ed occorre stabilizzarlo con un controllore in retroazione. Per usare lo stesso controllore progettato per l'altro metodo occorre portare il sistema ad avere due poli nell'origine. Si effettua perciò una retroazione puramente proporzionale e si posizionano con un  $K=110$  i poli nell' origine ( vedi luogo delle radici di figura 5 ) . A questo sistema applico i controllori precedentemente progettati.

Ora i due sistemi in retroazione derivati dai due metodi sono identici. Per il confronto occorre applicare il controllore progettato sul lineare standard al sistema non lineare di partenza.

### 7.5.7 Controllo con $K=12.5$ e $K=100$

Si riportano nelle figure successive i grafici relativi alle simulazioni effettuate su MATLAB. Su ogni grafico sono riportate le risposte dei sistemi diversificate nel tratto :

1. — : controllo su sistema lineare standard
2. - - - : controllo su sistema non lineare
3. - . - . : controllo su linearizzato in feedback

### 7.5.8 Conclusioni

Si può notare dai grafici che le risposte dei sistemi sono identiche con angolo di partenza pari a 0.3 rad. Man mano che ci si allontana da questo angolo le risposte si diversificano fino ad arrivare al punto in cui il controllo, progettato sul sistema lineare standard e applicato al non lineare, genera instabilità (questo accade per  $K=100$  e angolo di partenza 1.6 rad). Ciò dimostra che , almeno in questo esempio, l' insieme di convergenza del controllo sul sistema lineare standard é piú piccolo di quello del sistema linearizzato in feedback.

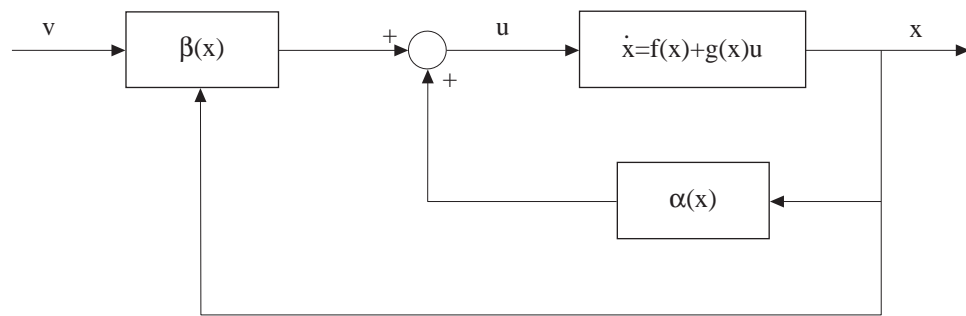


Figura 7.1: Sistema con linearizzazione input-stati



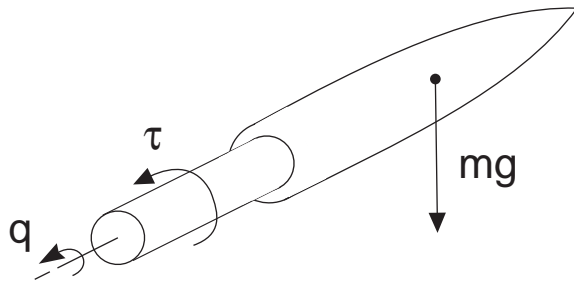


Figura 7.2: Link di un robot

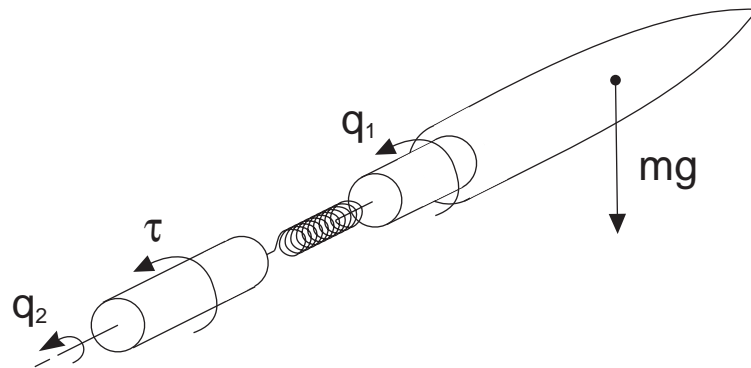


Figura 7.3: Link con cedevolezza

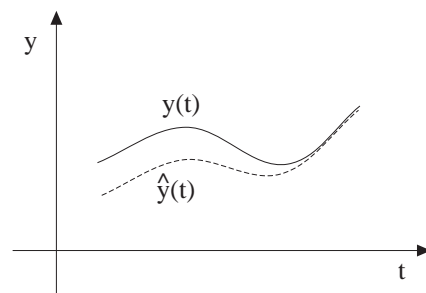


Figura 7.4: Inseguimento di tipo asintotico

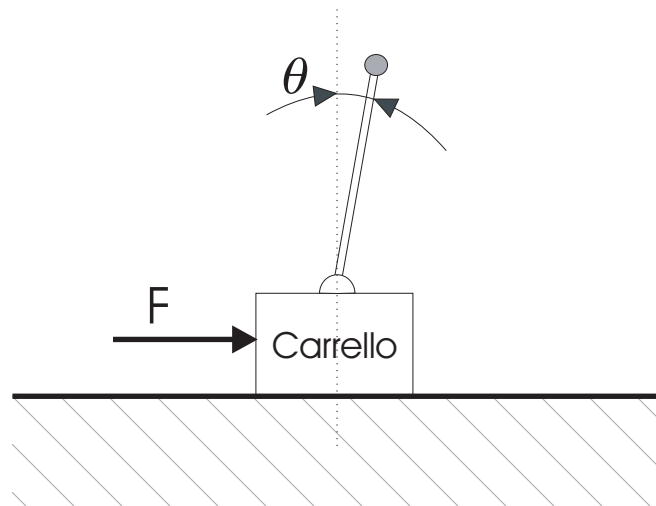
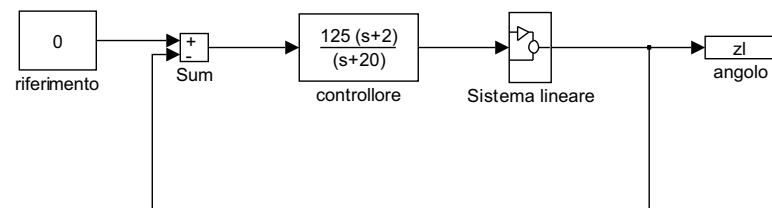
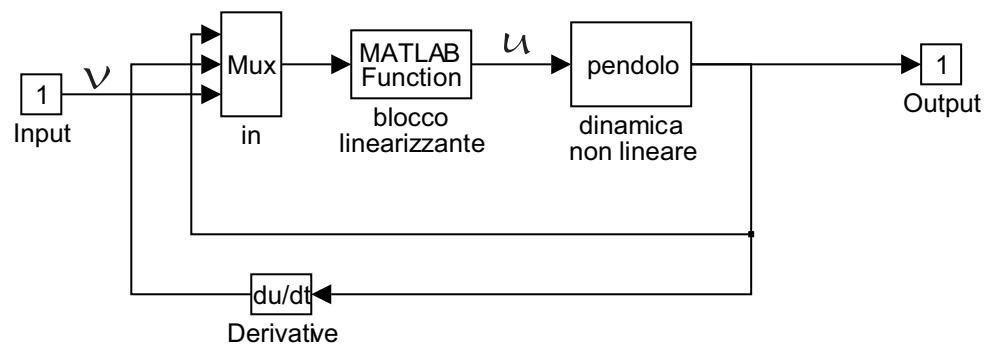


Figura 7.5: Pendolo inverso



## Sistema lineare in retroazione

Figura 7.6: Linearizzazione standard



## Linearizzazione in feedback

Figura 7.7: Linearizzazione in feedback

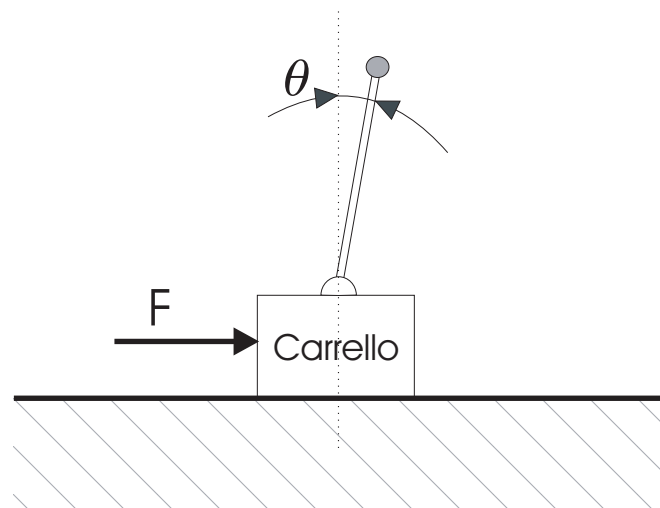


Figura 7.8: Pendolo inverso

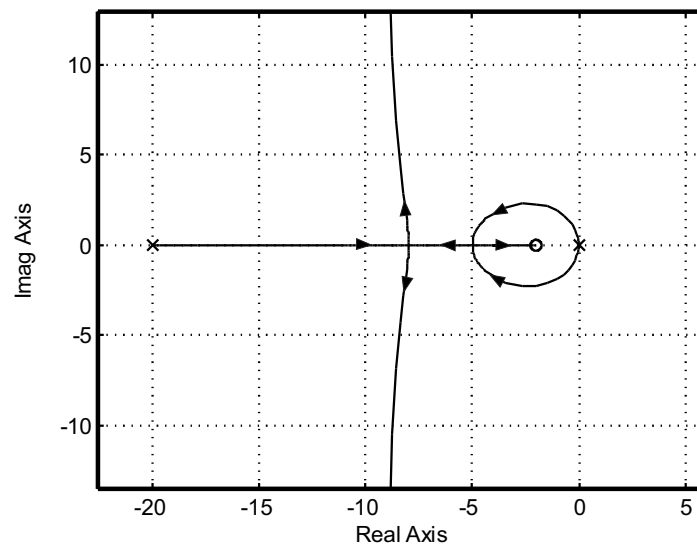


Figura 7.9: Luogo delle radici



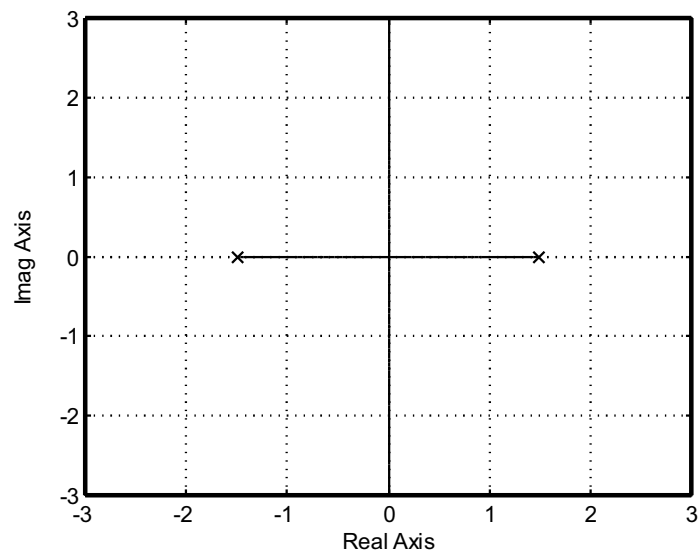


Figura 7.10: Luogo delle radici

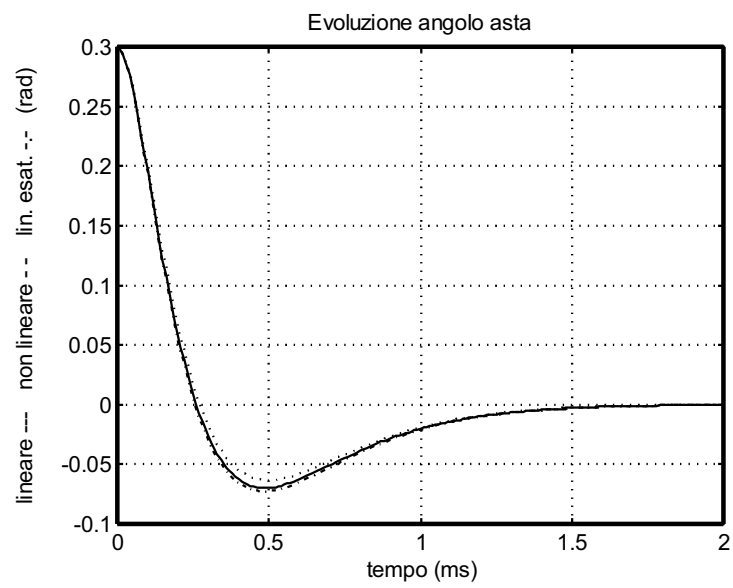


Figura 7.11: Simulazione con  $k=12.5$  e angolo  $0.3$

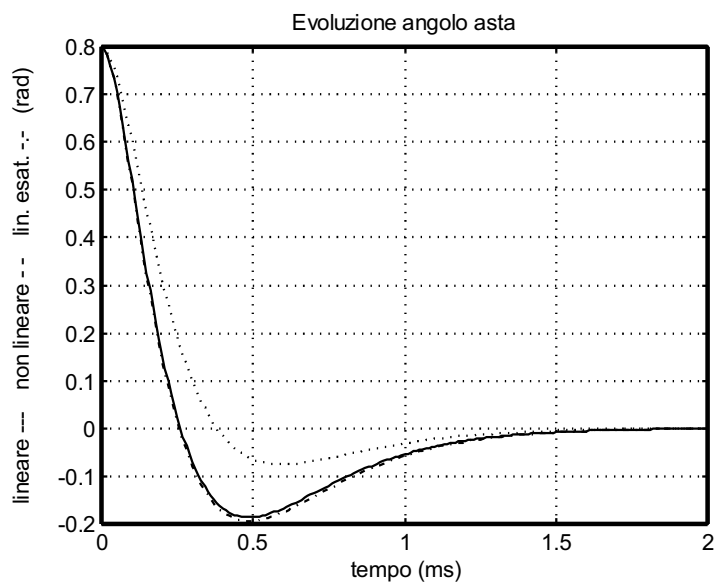


Figura 7.12: Simulazione con  $k=12.5$  e angolo  $0.8$

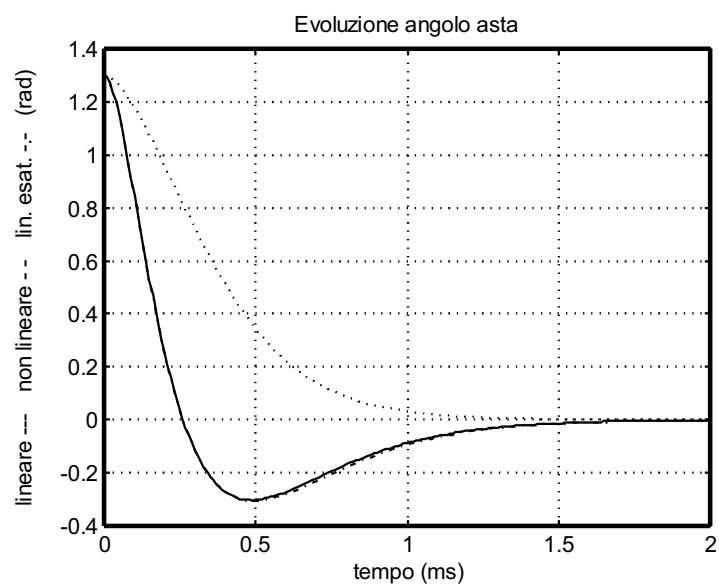


Figura 7.13: Simulazione con  $k=12.5$  e angolo 1.3

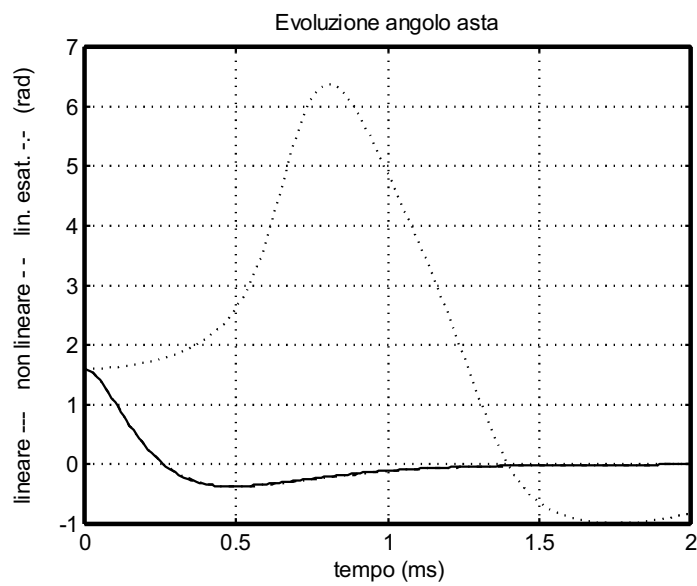


Figura 7.14: Simulazione con  $k=12.5$  e angolo 1.6

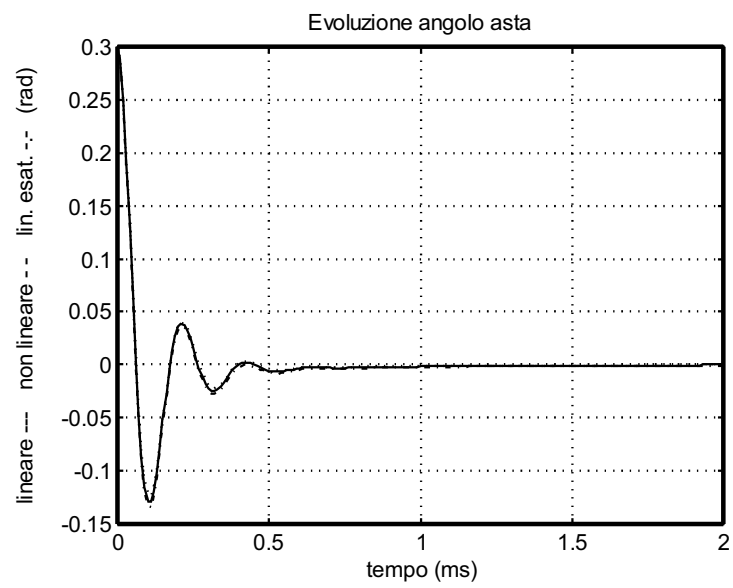


Figura 7.15: Simulazione con  $k=100$  e angolo  $0.3$

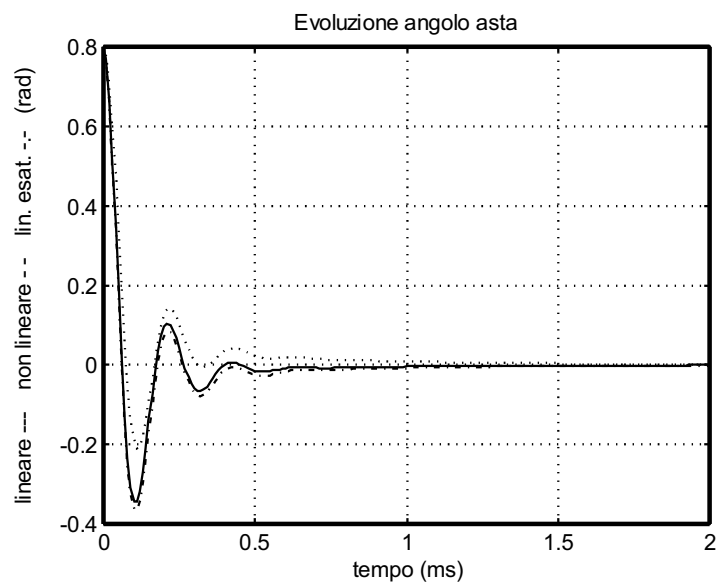


Figura 7.16: Simulazione con  $k=100$  e angolo 0.8

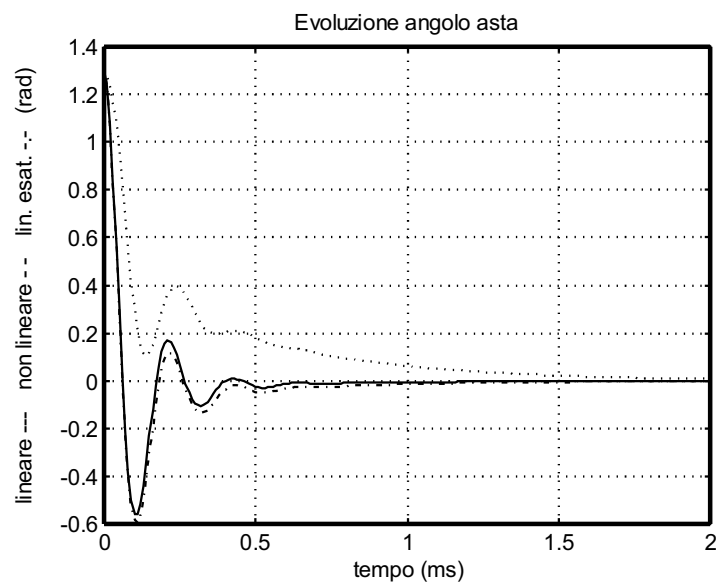


Figura 7.17: Simulazione con  $k=100$  e angolo 1.3



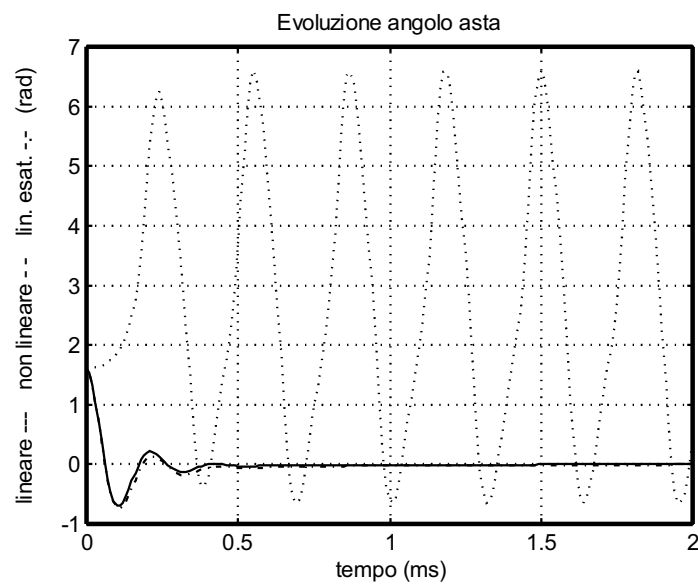


Figura 7.18: Simulazione con  $k=100$  e angolo 1.6



# Appendice A

## Appendice: Richiami di Algebra Lineare

- Si consideri il sistema di equazioni lineari

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

1. Il sistema ha soluzione se e solo se  $\mathbf{b} \in \text{Im } \mathbf{A}$ ;
2. Il sistema ha soluzione  $\forall \mathbf{b}$  se e solo se  $\text{Im } \mathbf{A} = \mathbb{R}^n$ , quindi se  $\text{rank } \mathbf{A} = n$  (si dice che  $\mathbf{A}$  ha pieno rango righe). E' necessario perciò che  $m \geq n$ ;
3. Il sistema ha al più un'unica soluzione se  $\ker \mathbf{A} = \{0\}$ ;

- Per  $n = m$ , si ha ovviamente una soluzione per ogni  $\mathbf{b}$ , che è anche unica, se e solo se  $\mathbf{A}$  è invertibile:  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ .

- Consideriamo il caso 2, in cui la soluzione di  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  esiste ma non è unica. Poniamoci il problema di trovare, tra le soluzioni, quella di lunghezza minima. Vogliamo in altri termini risolvere il problema di minimo vincolato

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Questo problema è risolto facilmente col metodo dei moltiplicatori di Lagrange, definendo  $L = \mathbf{x}^T \mathbf{x} + \lambda^T (\mathbf{Ax} - \mathbf{b})$  e imponendo  $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$ . Dalla prima condizione si ha

$$\mathbf{x} = -\frac{\mathbf{A}^T \lambda}{2},$$

quindi

$$-\mathbf{AA}^T \lambda = 2\mathbf{b}$$

• Dalla ipotesi che  $\mathbf{A}$  abbia pieno rango righe, segue che  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$  è invertibile: infatti, questa matrice è quadrata, ed essendo le righe di  $\mathbf{A}$  indipendenti, tali sono anche le colonne di  $\mathbf{A}^T$ , che quindi non ha spazio nullo (cioè, non esiste alcun  $\mathbf{y}$  tale che  $\mathbf{A}^T\mathbf{y} = 0$ ). Inoltre, poichè sappiamo dal teorema fondamentale dell'algebra che  $\text{Im}(\mathbf{A}^T) = \ker^\perp(\mathbf{A})$ , nessun vettore nell'immagine di  $\mathbf{A}^T$  può appartenere al kernel di  $\mathbf{A}$ . Quindi si ha che la soluzione di minima lunghezza è

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{b}$$

Si osservi che la matrice  $\mathbf{A}^R \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}$  è una *inversa destra* di  $\mathbf{A}$ :  $\mathbf{A}\mathbf{A}^R = \mathbf{I}_n$ .

• Se la lunghezza del vettore  $\mathbf{x}$  fosse stata misurata in un'altra metrica,  $\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^T\mathbf{W}\mathbf{x}$  (con  $\mathbf{W}$  simmetrica e positiva definita), la soluzione sarebbe risultata  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A})^T\mathbf{b}$ . La matrice  $\mathbf{A}_W^R \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A})^T$  è anch'essa una inversa destra, *pesata* in  $\mathbf{W}$  (quindi, le inverse destre non sono uniche).

• È interessante anche osservare come una metrica considerata su uno spazio si trasformi cambiando le coordinate. Siano  $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$  le nuove coordinate. Si ha:  $\mathbf{x}^T\mathbf{W}\mathbf{x} = \mathbf{z}^T\mathbf{T}^T\mathbf{W}\mathbf{T}\mathbf{z}$ . La matrice della metrica si trasforma quindi per congruenza. Essendo  $\mathbf{W}$  simmetrica e positiva definita (non avrebbe senso altrimenti), esiste sempre un sistema di coordinate nel quale la matrice della metrica è diagonale: basterà prendere per  $\mathbf{T}$  la matrice ortogonale diagonalizzante  $\mathbf{Q}$  ( $\mathbf{Q}^T\mathbf{W}\mathbf{Q} = \Lambda$ ). Scegliendo poi  $\mathbf{T} = \mathbf{Q}\Lambda^{-1/2}$ , si ha  $\mathbf{x}^T\mathbf{W}\mathbf{x} = \mathbf{z}^T\mathbf{z}$ , cioè la matrice metrica è identica.

• Si consideri adesso invece il caso (3) in cui una soluzione (in generale) non esista, ma che  $\dim \ker(\mathbf{A}) = 0$ . Ha senso in questo caso cercare la miglior approssimazione, cioè la  $\mathbf{x}$  che minimizza la norma del residuo

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2$$

Ponendo

$$\frac{\partial(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})^T(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})}{\partial\mathbf{x}} = 2(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}^T\mathbf{b})^T = 0$$

si ha la soluzione ai minimi quadrati

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b}.$$

L'invertibilità è garantita dall'ipotesi che  $\mathbf{A}$  non abbia spazio nullo.

La matrice  $\mathbf{A}^L = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$  è una *inversa sinistra*:  $\mathbf{A}^L\mathbf{A} = \mathbf{I}_m$ . Se si considera una metrica  $\mathbf{W}_b$  sullo spazio dei residui, si ottiene  $\mathbf{A}_{W_b}^L = (\mathbf{A}^T\mathbf{W}_b\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{W}_b$ .

- Chiaramente, inverse destre e sinistre sono diverse in generale (anche nelle dimensioni). Se una inversa destra e una sinistra coincidono, allora questa è l'unica inversa  $\mathbf{A}^{-1}$  di una matrice quadrata  $\mathbf{A}$ .

- Ci chiediamo ora se esiste una espressione unica per una “inversa” di una matrice  $\mathbf{A}$  (chiamiamola  $\mathbf{A}^+$ ) che fornisca, nei diversi casi, le soluzioni viste. Cioè,  $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}$  se esiste l'inversa;  $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^R$  se esiste l'inversa destra sopra definita (cioè se  $\mathbf{A}$  ha pieno rango righe);  $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^L$  se esiste l'inversa sinistra sopra definita (cioè se  $\mathbf{A}$  ha pieno rango colonne).

- Desideriamo anche considerare i casi dove non esista né inversa destra né sinistra, cioè dove il sistema  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  non abbia alcuna soluzione in generale, ma per i particolari  $\mathbf{b}$  per cui ha soluzione, questa non è unica. In questo caso, vorremmo che  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^+\mathbf{b}$  fornisse, tra le soluzioni che approssimano la soluzione con minima norma del residuo, quella che possiede norma minima.

- Consideriamo dunque una matrice  $\mathbf{A}$   $n \times m$ , e  $\text{rank}(\mathbf{A}) = r \leq m$ . Consideriamo la diagonalizzazione delle matrici simmetriche e semi-definite positive ottenute per prodotto con la trasposta:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{A}^T &= \mathbf{U}\mathbf{M}\mathbf{U}^T \\ \mathbf{A}^T\mathbf{A} &= \mathbf{V}\mathbf{N}\mathbf{V}^T\end{aligned}$$

dove  $\mathbf{U}$  è  $n \times n$ , composta da  $n$  autovettori ortonormali di  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$  ordinati in modo che in  $\mathbf{M}$  si trovino gli autovalori di  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$  decrescenti in modulo lungo la diagonale; e  $\mathbf{V}$  è  $m \times m$ , composta da  $m$  autovettori ortonormali di  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$  ordinati in modo che in  $\mathbf{N}$  si trovino gli autovalori di  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$  decrescenti in modulo lungo la diagonale.

- Naturalmente, si ha che le ultime  $n - r$  colonne di  $\mathbf{U}$ , e le ultime  $m - r$  colonne di  $\mathbf{V}$ , sono contenute rispettivamente nel  $\ker(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = \ker \mathbf{A}^T$  e nel  $\ker(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = \ker \mathbf{A}$ , e formano una base ortogonale di questi sottospazi. Infatti, gli elementi sulla diagonale di  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{N}$  sulle righe e colonne di indice superiore a  $r$  sono nulli.

- Si osservi che i primi  $r$  valori diagonali (non nulli) di  $\mathbf{M}$  e di  $\mathbf{N}$  sono eguali e positivi:  $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, r$ . Entrambe le matrici hanno poi  $\min(n, m) - r$  autovalori nulli sulla diagonale. Infine, se  $n > m$ , la matrice  $\mathbf{N}$  ha  $n - m$  altri autovalori nulli sulla diagonale; se  $n < m$ , è la matrice  $\mathbf{M}$  ad avere  $m - n$  altri autovalori nulli sulla diagonale.

- Questa è una conseguenza del fatto che gli autovalori di un prodotto quadrato di matrici rettangolari, ad esempio  $\mathbf{BC}$ , coincidono con quelli del prodotto commutato,  $\mathbf{CB}$ , eccetto che per un numero di autovalori nulli pari alla differenza di dimensioni tra le due matrici quadrate.

- Possiamo quindi scrivere  $\mathbf{M} = \Sigma\Sigma^T$  e  $\mathbf{N} = \Sigma^T\Sigma$ , con  $\Sigma$   $n \times m$ , e

$$\begin{aligned}\Sigma_{ii} &= \sqrt{\lambda_i} \stackrel{def}{=} \sigma_i, & i = 1, \dots, r \\ \Sigma_{jk} &= 0, & \text{altrimenti}\end{aligned}$$

Gli  $r$  numeri positivi  $\sigma_i$  sono detti *valori singolari* di  $\mathbf{A}$ .

- Le matrici  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  sinora considerate rappresentano basi ortonormali arbitrariamente scelte (eccetto per il fatto che le ultime colonne sono una base di  $\ker \mathbf{A}^T$  e  $\ker \mathbf{A}$ , e le prime colonne sono una base di  $\text{Im } \mathbf{A}$  e  $\text{Im } \mathbf{A}^T$ , rispettivamente). Possiamo quindi scegliere una base, o meglio una relazione tra le basi dei quattro sottospazi, particolarmente utile. Faremo ora vedere che è possibile fare questo in modo che si possa scrivere

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T$$

cioè in modo da ottenere quella che viene chiamata *Decomposizione ai Valori Singolari* (S.V.D.) di  $\mathbf{A}$ .

- Per far questo, fissiamo ad esempio arbitrariamente una base ortonormale di  $\text{Im } \mathbf{A}^T$  nelle prime  $r$  colonne di  $\mathbf{V}$ , e cerchiamo le corrispondenti colonne di  $\mathbf{U}$  risolvendo  $\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{U}\Sigma$ , ovvero

$$\mathbf{U}(:, i) = \frac{1}{\sigma_i} \mathbf{A}\mathbf{V}(:, i), \quad i = 1, \dots, r$$

- È facile verificare che queste soluzioni sono effettivamente colonne ortonormali ( $\mathbf{U}(:, i)^T \mathbf{U}(:, j) = \delta_{ij}$ ) e che formano una base di  $\text{Im } \mathbf{A}$ : sono quindi legittime scelte per le prime  $r$  colonne di  $\mathbf{U}$ . Per le altre colonne di  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$ , basterà prendere i complementi ortonormali (usando ad esempio Gram-Schmidt).

- Per costruire la SVD di una matrice  $\mathbf{A}$   $n \times m$  (qualunque!) basta dunque:

1. Costruire  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  e trovarne gli  $r$  autovalori non nulli  $\lambda_i$ . Porre  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$  e costruire  $\Sigma$   $n \times m$  con  $\sigma_i$  sulla diagonale;
2. Costruire una matrice ortonormale  $m \times m$   $\mathbf{V}$  le cui prime  $r$  colonne siano una base di  $\text{Im } \mathbf{A}^T$ ;
3. Porre  $\mathbf{U}(:, i) = \frac{1}{\sigma_i} \mathbf{A}\mathbf{V}(:, i)$  per le prime  $r$  colonne di  $\mathbf{U}$ ;
4. Estendere queste  $r$  colonne di  $\mathbf{U}$  ad una base ortonormale di  $\mathbb{R}^n$ .
5. Scrivere  $\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}$ .

- Si noti che quanto sopra si applica sia al caso  $n \geq m$  che  $m \geq n$ . Nel secondo caso però, è più conveniente trovare gli autovalori di  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ , in numero di  $n$ , e quindi applicare la procedura alla matrice  $\mathbf{A}^T$ . La procedura non è d'altronde numericamente efficiente né stabile: per algoritmi migliori, si vedano testi di analisi numerica.

- Mediante la SVD, il problema di ottenere la soluzione di un sistema lineare  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  qualunque, nel senso di trovare la miglior approssimazione di minima norma, ha soluzione immediata. Riscriviamo infatti  $\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , e cambiamo le coordinate in entrambe gli spazi dominio e codominio ponendo  $\mathbf{x} = \mathbf{V}\bar{\mathbf{x}}$  e  $\mathbf{b} = \mathbf{U}\bar{\mathbf{b}}$ . Si ha, nelle nuove coordinate  $\Sigma\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{b}}$ , cioè

$$\begin{aligned}\sigma_1\bar{\mathbf{x}}_1 &= \bar{\mathbf{b}}_1 \\ \vdots &= \vdots \\ \sigma_r\bar{\mathbf{x}}_r &= \bar{\mathbf{b}}_r \\ 0\bar{\mathbf{x}}_{r+1} &= \bar{\mathbf{b}}_{r+1} \\ \vdots &= \vdots \\ 0\bar{\mathbf{x}}_n &= \bar{\mathbf{b}}_n\end{aligned}$$

La soluzione che minimizza la somma dei quadrati dei residui è dunque  $\mathbf{x}_1 = \frac{\bar{\mathbf{b}}_1}{\sigma_1}, \dots, \mathbf{x}_r = \frac{\bar{\mathbf{b}}_r}{\sigma_r}$ , con le altre componenti di  $\bar{\mathbf{x}}$  che non influenzano il residuo e che quindi sono arbitrarie. Ovviamente, d'altronde, per minimizzare  $\mathbf{x}^T\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}^T\mathbf{V}^T\mathbf{V}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}^T\bar{\mathbf{x}}$ , tali componenti si dovranno scegliere nulle. Tornando alle vecchie coordinate, si trova così la soluzione desiderata.

- La matrice  $\mathbf{A}^+$  che risolve il problema  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  nel senso suddetto è dunque

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}\Sigma^+\mathbf{U}^T$$

dove  $\Sigma^+$  è una matrice  $m \times n$  che ha sulla diagonale gli inversi dei valori singolari di  $\mathbf{A}$ , e zeri altrove.

### A.0.9 Altre applicazioni della SVD

- Compressione di dati. Si consideri per esempio una immagine di dimensione  $N \times N$ , con  $N$  grande, e si desideri isolare (per limiti di risorse) i dati di maggior rilievo contenuti nella matrice. Scrivendo la SVD della matrice dei dati,

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T = \mathbf{U}(:,1)\sigma_1\mathbf{V}(:,1)^T + \mathbf{U}(:,2)\sigma_2\mathbf{V}(:,2)^T + \dots$$

ogni termine della sommatoria contiene solo  $2N$  dati. Troncando la sommatoria quando i valori singolari (ordinati in senso decrescente) diminuiscono al di sotto di un certo valore  $\epsilon$ , si ottengono approssimazioni dell'immagine di crescente risoluzione per  $\epsilon \rightarrow 0$ .

• Il massimo valor singolare di una matrice è pari alla sua norma due, cioè alla massima “amplificazione” prodotta da  $\mathbf{A}$  su un vettore  $\mathbf{x}$ :

$$\max_{\mathbf{x}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \max_{\mathbf{x}} \frac{\sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x}}}{\sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}} = \sigma_1$$

Questa coincide col massimo autovalore solo se  $\mathbf{A}$  è simmetrica.

Una misura di quanto una matrice sia “vicina” alla singolarità è il minimo valore singolare (e NON il minimo autovalore, in generale): si consideri ad esempio  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1/\epsilon \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , in cui gli autovalori sono sempre 1, ma i valori singolari sono invece dell'ordine di  $\epsilon$  e  $1/\epsilon$  per  $\epsilon$  piccoli (la matrice tende chiaramente alla singolarità per  $\epsilon \rightarrow 0$ ).