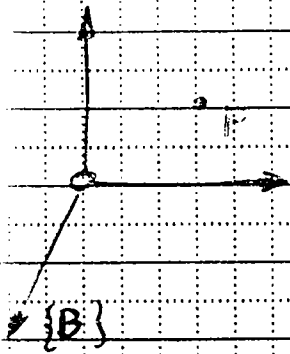


# Cinematica (Differenziale)

(1)



Consideriamo un punto in moto rispetto alla terna fissa  $\{B\}$ , descritto dalle coordinate  ${}^3p(t): \mathbb{R}_t \rightarrow \mathbb{R}^3$

La sua velocità è definita come

$${}^B\dot{p}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}^Bp(t+\Delta t) - {}^Bp(t)}{\Delta t}$$

quindi è un vettore (differenza di punti).

Per quanto alle trasformazioni rigide il gruppo  $SE(3)$  agisce in modo diverso sui punti e sui vettori:

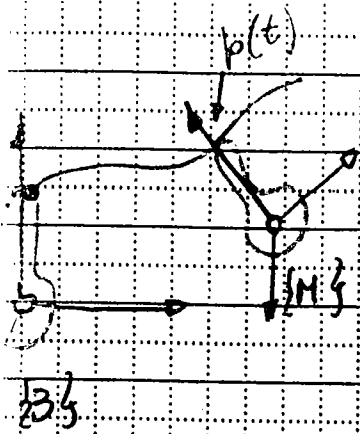
$$g_{Rd}(p) = R p + \underline{d}$$

$$g_{Rd}\left(\begin{pmatrix} v \\ - \end{pmatrix}\right) = R \underline{v}$$

In coordinate omogenee, i punti sono rappresentati con qualche coordinata non nulla, mentre i vettori hanno qualche coordinata = 0. Per questo, strettamente, l'azione di  $SE(3)$  sui punti e sui vettori è scritta nello stesso modo come mostrato per una matrice di transf. omogenea

$$\begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} p_0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si noti però che, mentre l'azione di  $T$  su un punto ha la usualissima interpretazione - come moto rigido e come cambiamento di coordinate - solo la seconda interpretazione fisica (con un vettore unitario  $\hat{v}$ )



Consideriamo dunque la velocità di un punto che si muove con un corpo rigido rispetto ad una terza fissa.

Il corpo rigido si trovi all'istante  $t$  nella configurazione descritta dalla terza mobile  $\{M\}$  con origine in  $\underline{M}(t)$  e orientazione  $R_M(t)$ .

$$\underline{p}(t) = R_M(t) \underline{p}_0 + \underline{M}(t) \quad (\text{tutto espresso in } \{B_0\})$$

Differenziando

$$\begin{aligned} \dot{\underline{p}}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(R_M(t+\Delta t) \underline{p}_0 + \underline{M}(t+\Delta t) - R_M(t) \underline{p}_0 - \underline{M}(t))}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{R_M(t+\Delta t) - R_M(t)}{\Delta t} \underline{p}_0 + \frac{\underline{M}(t+\Delta t) - \underline{M}(t)}{\Delta t} \right) \\ &\triangleq \dot{R}_M \underline{p}_0 + \dot{\underline{M}}(t) \end{aligned}$$

Il secondo addendo  $\dot{\underline{M}}$ , derivata di un vettore è un vettore esso stesso (la differenza di vettori è un vettore), detta la velocità di traslazione del corpo rigido coincide con la velocità del punto-origine di  $\{M\}$ .

Il termine  $\dot{R}$  NON è una rotazione rigida:  $\dot{R} \notin SO(3)$ . Infatti, la differenza di due rotazioni non soddisfa le equazioni tra i suoi elementi che determinano l'ortogonalità delle matrici.

Esempio ( $\dot{R} \in \mathfrak{so}(3)$ ):

Rotazione rigida

$$p_1 = R p_0$$

Se  $R = R(t)$ ,  $p_1(t) = R(t) p_0$   
considero

$$\dot{p}_1(t) = \frac{d}{dt} R(t) p_0 = \dot{R}(t) p_0$$

Es.  $Rot(z, \alpha t) = \begin{pmatrix} \cos \alpha t & -\sin \alpha t & 0 \\ \sin \alpha t & \cos \alpha t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\frac{d}{dt} Rot(z, \alpha t) = \alpha \begin{pmatrix} -\sin \alpha t & -\cos \alpha t & 0 \\ \cos \alpha t & -\sin \alpha t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\frac{d}{dt} Rot(z, \alpha t)\right) = 0;$$

Cosa è  $\dot{R}$ ? Si osserva che

$$RR^T = I \quad \text{derivando} \rightarrow \dot{R}R^T + R\dot{R}^T = 0 \Rightarrow \dot{R}R^T = -R\dot{R}^T = -(\dot{R}R^T)$$

Def.  $S = \dot{R}R^T$ ,  $S = -S^T$  antisimmetrica

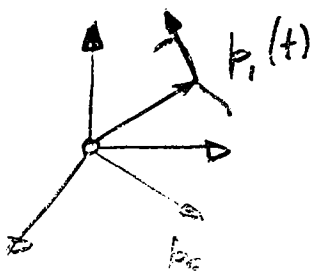
Dunque,  $S$  ha la forma  $S = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} = \hat{\omega}$

Il vettore  $\omega$  tale che  $S(\omega) = \dot{R}R^T$  è detto velocità angolare, e si ha

$$\dot{R} = S(\omega)R = \hat{\omega}R$$

Quindi,  $\dot{p}(t) = \dot{R}(t)p(0) + \dot{m} = \hat{\omega}R(t)p(0) + \dot{m} = \omega \wedge p(t) + \dot{m}$

La velocità angolare ha il significato fisico di rotazione di  $\|\omega\|$  unità angolari nell'unità di tempo, attorno ad un asse parallelo a  $\omega$ .  
Nell'Esempio di cui sopra,



$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Rot(z, \alpha t) &= \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha t & -\sin \alpha t & 0 \\ \sin \alpha t & \cos \alpha t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \hat{\omega} R(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \wedge R(t) \end{aligned}$$

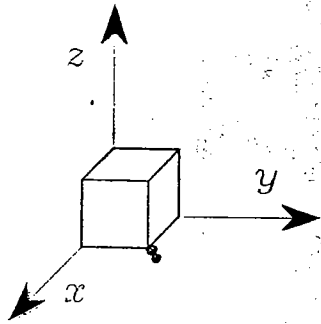
• Significato fisico di  $\omega$

$$\begin{bmatrix} \pi/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad 0 \leq t \leq 1$$

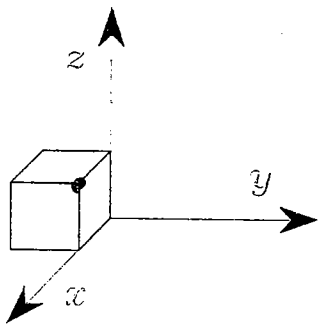
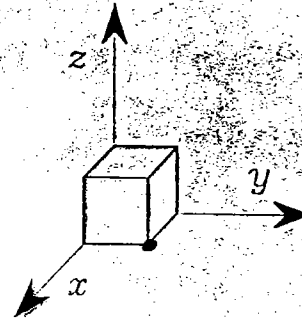
$$\begin{bmatrix} 0 & \pi/2 & 0 \end{bmatrix}^T \quad 1 < t \leq 2$$

$$\omega = \begin{bmatrix} 0 & \pi/2 & 0 \end{bmatrix}^T \quad 0 \leq t \leq 1$$

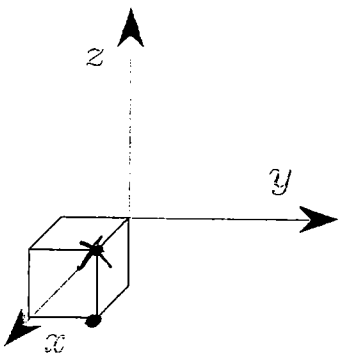
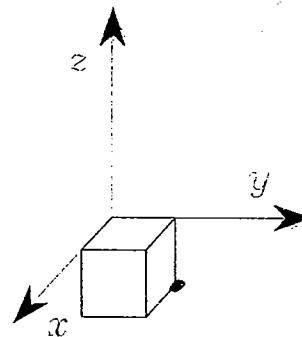
$$\omega = \begin{bmatrix} \pi/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad 1 < t \leq 2$$



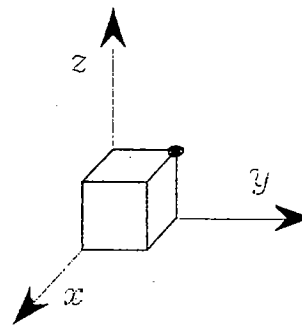
$t = 0$



$t = 1$



$t = 2$

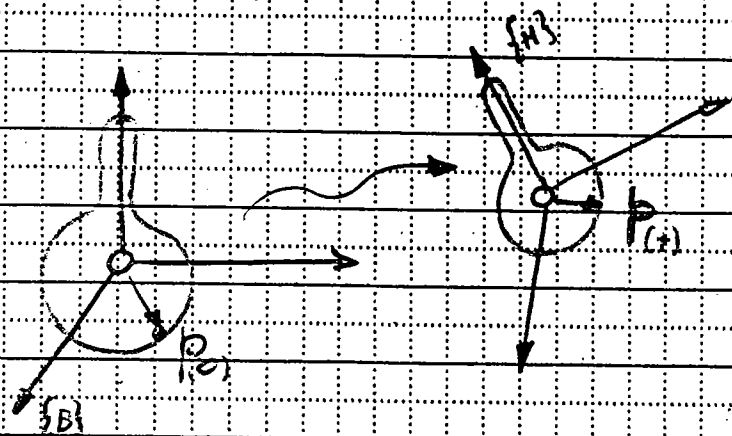


$$\int_0^2 \omega dt = \begin{bmatrix} \pi/2 & \pi/2 & 0 \end{bmatrix}^T$$

# Velocità di un corpo rigido

(4)

Dato un corpo rigido, la sua configurazione in  $SE(3)$  permette di stabilire univocamente la posizione di tutti i punti del corpo rigido in quella conf.



Esempio:

dati  $R_n(t), m(t)$   
trovo la posizione  
del punto che all'istante iniziale è in  $p(0)$   
con la

$$p(t) = R_n^{(t)} p_0 + m(t)$$

Altre possibili coordinate usano, invece di  $R$  e  $S$  altre altre rappresentazioni delle orientazioni. Ad esempio, se uso la terna di angoli di Eulero  $\Phi$   $\Phi = (\varphi, \theta, \psi)$ , si saranno funzioni

$$p(t) = F(\Phi(t), m(t))$$

Il cui calcolo può essere fatto, ad esempio, usando la forma nota delle matrici  $R(\Phi)$ .

Per le velocità, desideriamo in modo analogo avere grandezze "comuni" a tutto il corpo rigido, mediante le quali calcolare agevolmente le velocità di qualsiasi punto del corpo.

Per il caso di una rappresentazione  $p(t) = R_H(t) p_0 + M(t)$ ,  
abbiamo già trovato  $\dot{p} = \omega \wedge R(t) p_0 + \dot{M} = -p(t) \wedge \omega + \dot{M}$

In altri termini, noti i parametri  $\omega_H$  (velocità angolare)  
e  $\dot{M}$  (velocità di traslazione) per un qualsiasi sistema  
di riferimento  $\{H\}$  solidale al corpo, le velocità di  
traslazione e angolare per qualsiasi altro riferimento  
 $\{P\}$  centrato in  $p$  sono date da

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \omega_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -\hat{p} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{M} \\ \omega_H \end{pmatrix} \quad \text{dove } \underset{M}{p} \text{ è il vettore} \\ \text{da } M \text{ a } p$$

La relazione matriciale sopra vista vale in ogni sistema  
di coordinate in cui si decida di proiettare le componenti  
dei vettori - pertanto, si è omissa l'apice sinistro.

Come si può osservare da questa relazione, la relazione  
tra i vettori di velocità composti (impilando velo-  
cità lineari e angolari) è lineare.

Anche se questi vettori composti hanno caratteristiche  
particolari (quali ad esempio la disomogeneità delle  
dimensioni fisiche delle componenti), essi sono molto  
utili, e si utilizza per essi il termine inglese di twist.  
Un twist rappresenta quindi completamente l'atto di moto  
(cioè il moto istantaneo) di un corpo rigido, quando  
naturalmente ne sia noto il punto di applicazione.  
È interessante notare che, poiché l'espressione del twist varia con  
il punto di applicazione, è possibile trovare un punto  $C$  in  
cui  $\dot{c}$  e  $\omega$  sono paralleli: basta risolvere in  $c$  l'eq.:

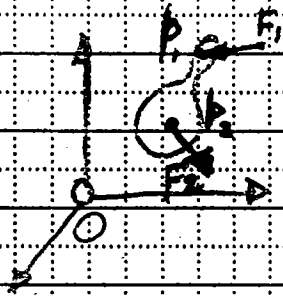
$$\dot{c} = \omega \wedge c = \dot{M} + \omega \wedge c \Rightarrow c = \frac{(\dot{M} - c') \wedge \omega}{\omega \cdot \omega} + c' = \frac{\dot{M} \wedge \omega}{\omega \cdot \omega} + c'$$



# Statica dei corpi rigidi

(4)

Si dice "sistema di forze" applicate ad un corpo rigido un insieme di coppie  $(F_i, p_i) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  di forze e punti di applicazione



Un corpo rigido è in equilibrio se il sistema di forze esterne ad esso applicato ha le proprietà

$$\sum_i F_i \equiv F = \mathcal{O} \quad \bullet \text{ Risultante nulla}$$

$$\sum_i \overrightarrow{Op_i} \wedge F_i \equiv M_0 = \mathcal{O} \quad \bullet \text{ Momento risultante ( attorno al punto O ) nulla}$$

Si nota subito che, se la seconda relazione vale per una particolare origine del sistema di riferimento O, o vale anche la prima, allora la seconda vale qualsiasi sia O.

$$\begin{aligned} \sum_i \overrightarrow{Op_i} \wedge F_i &= \sum_i (\overrightarrow{Oo} + \overrightarrow{Op_i}) \wedge F_i = \sum_i \overrightarrow{Oo} \wedge F_i + \sum_i \overrightarrow{Op_i} \wedge F_i \\ &= \overrightarrow{Oo} \wedge \sum_i F_i + M_o = \overrightarrow{Oo} \wedge F + M_o = M_o \text{ se } F = \mathcal{O} \end{aligned}$$

Due sistemi di forze si dicono equivalenti se hanno la stessa risultante e momento risultante rispetto allo stesso punto. Come sopra si vede facilmente che se due sistemi sono equivalenti per un punto, lo sono per tutti.

Si consideri un sistema di forze applicato ad un corpo rigido equivalente ad una risultante  $F_p$  applicata in  $p$  ed una coppia  $M_p$ , ed un secondo sistema costituito da una forza  $F_m$  applicata in  $m$  e una coppia  $M_m$ . Calcoliamo  $F_m$  e  $M_m$  tali che il secondo sistema sia equivalente al primo.

$$F_m = F_p$$

$$M_m = M_p + mp \wedge F_p$$



Analogamente al caso cinematico, possiamo riassumere questa relazione tra sistemi di forze equivalenti in forma compatta

$$\begin{pmatrix} F_m \\ M_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \uparrow & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_p \\ M_p \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{con } \uparrow \text{ matrice anti-} \\ \text{simmetrica costruita s.} \\ \text{vettore da } m \text{ a } p. \end{array} \right.$$

che vale a prescindere dal sistema di coordinate in cui si proiettano i vettori.

I vettori composti da forze e momenti che appaiono in questa relazione lineare hanno proprietà geometriche simili a quelle viste per i "twists": sono infatti anch'essi delle "screws" detti in parlata "wrenches".

Rassumiamo qui le relazioni tra twists della cinematica:

$$t_p = M t_m \quad t_p = \begin{pmatrix} p \\ \omega_p \end{pmatrix}; \quad t_m = \begin{pmatrix} m \\ \omega_m \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} I & \uparrow \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

e quelle tra wrenches della statica:

$$w_m = N w_p \quad w_p = \begin{pmatrix} F_p \\ H_p \end{pmatrix}; \quad w_m = \begin{pmatrix} F_m \\ H_m \end{pmatrix};$$

$$N = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \uparrow & I \end{pmatrix}$$

per osservare che  $N = M^T$

Questo discende anche da una considerazione di più generale portata: se due sistemi di forze sono staticamente equivalenti, il loro lavoro virtuale - cioè compiuto su spostamenti congrui all'ipotesi di rigidità - è uguale. Questo, che è una conseguenza del principio dei lavori virtuali (vedi avanti).

Si applica ovviamente anche alle potenze meccaniche:

$$\left. \begin{array}{l} w_m^T t_m = w_p^T t_p \\ \left\{ \begin{array}{l} w_p, w_m \text{ equivalenti} \\ t_m, t_p \text{ rigidam. collegati} \end{array} \right\} \end{array} \right\} \Rightarrow w_p^T N^T t_m = w_p^T M t_m \quad \forall w_p, \forall t_m$$

$$\Rightarrow N^T = M$$

# Cinematica Differenziale dei Manipolatori

Si è studiata la cinematica diretta dei manipolatori: come la scrittura di funzioni che esprimono le configurazioni di un corpo rigido del manipolatore (come l'end-effector) in termini delle configurazioni dei giunti.

Esempi: •  ${}^0T_n = {}^0A_1(q_1) {}^1A_2(q_2) \dots {}^{n-1}A_n(q_n) = T_n(q_1, \dots, q_n)$

è la rap. con transf. omoge. di  $\mathbb{R}^3$  uspa  $\mathbb{R}^3$

•  ${}^0R_n(q)$ ,  $\underline{x}(q)$  possono essere facilmente estratte da  ${}^0T_n = \begin{pmatrix} {}^0R_n & \underline{x}_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

•  $\Phi(q)$  e avv.  $\underline{x}(q)$  possono a loro volta essere ottenute per inversione di  $R(\Phi)$ .

La cinematica differenziale dei manipolatori studia la relazione tra le velocità dei punti dell'end-effector, e quelle dei giunti. Questa relazione, che assume forme diverse in relazione alla rappresentazione usata per le configurazioni dell'end-effector, è rappresentata dai cosiddetti Jacobie del manipolatore

Richiamo:  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ;  $f \in C^1$ ;  
 $x \rightarrow y = f(x)$

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

$J_f(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$

Per quanto riguarda le posizioni dell'end-effector, la definizione analitica è applicabile direttamente.

$$X = X(q); \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad q \in \mathbb{R}^m$$

$$\dot{x} = \frac{\partial X(q)}{\partial q} \dot{q} \triangleq J_p(q) \dot{q}$$

È possibile anche applicare questa definizione ad una rappresentazione minima delle orientazioni:

$$\underline{\Phi} = \underline{\Phi}(q); \quad \underline{\Phi} = (\phi, \theta, \psi) \in \mathbb{R}^3, \quad q \in \mathbb{R}^m$$

$$\dot{\underline{\Phi}} = \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial q} \dot{q} \triangleq J_o(q) \dot{q}$$

È spesso più facile rappresentare le velocità non sovraccaricate in molti problemi. // Descrizione Cinematica  
 Poiché sappiamo esprimere le velocità di ogni punto dell'end-effector se conosciamo le sue velocità angolare  $\underline{\omega}$  (e  $\underline{\dot{x}}$ ), cerchiamo la relazione tra  $\underline{\omega}$  e  $\dot{q}$ .

Ricordiamo che  $\underline{\hat{\omega}} = \dot{R} R^T$  e  $\underline{\omega} = (R R^T)^V$

Nella cinematica diretta  $R = R(q)$  quindi  $\dot{R} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial R}{\partial q_k} \dot{q}_k$

Sostituendo si ha  $\underline{\hat{\omega}} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial R}{\partial q_k} R^T \dot{q}_k \triangleq \sum_{k=1}^m \hat{J}_{\omega k} \dot{q}_k$

ove  $\hat{J}_{\omega k} = \frac{\partial R}{\partial q_k} R^T$ ; estraendo  $\hat{J}_{\omega k} = \left( \frac{\partial R}{\partial q_k} R^T \right)^V$  si ha

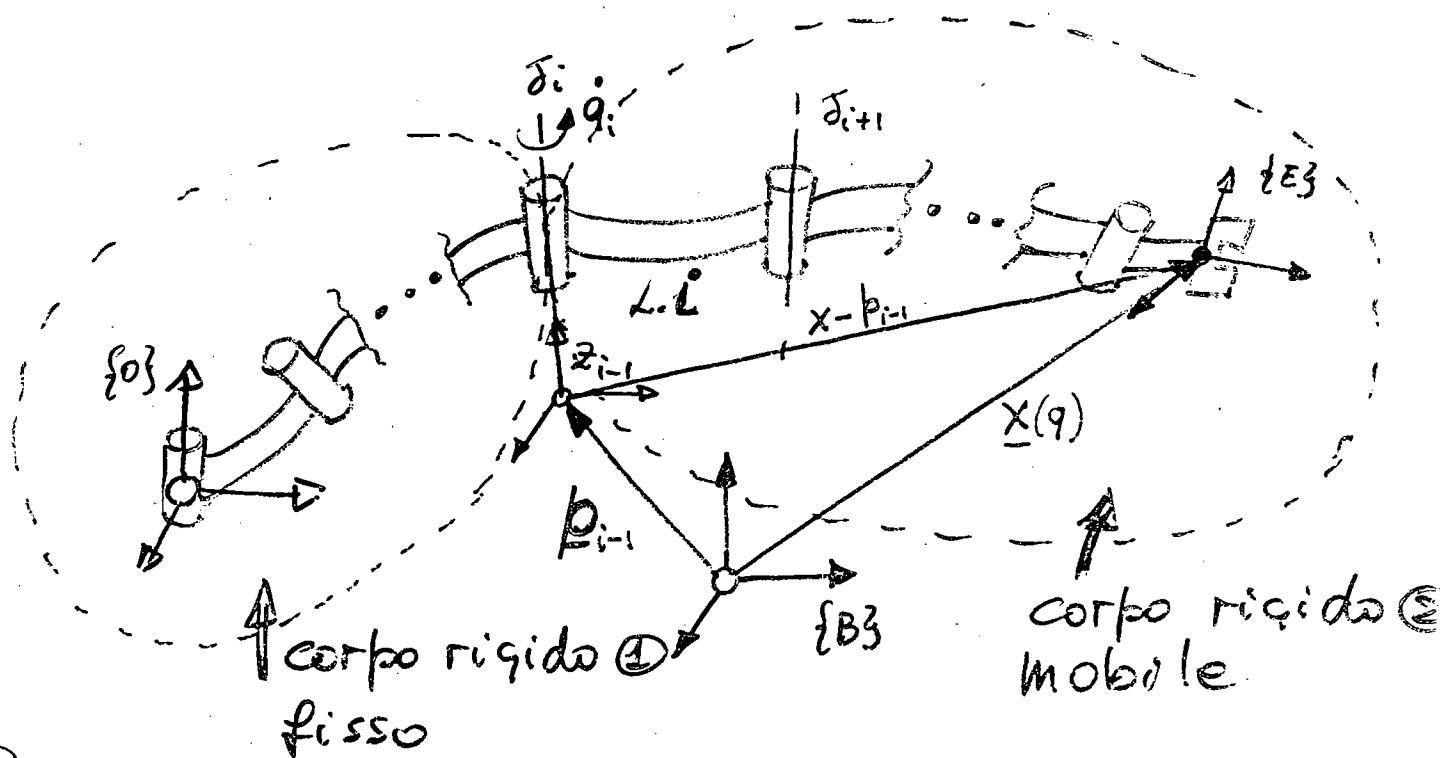
$$\underline{\omega} = \sum_{k=1}^m \hat{J}_{\omega k} \dot{q}_k = \begin{pmatrix} \hat{J}_{\omega 1} & \dots & \hat{J}_{\omega m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_m \end{pmatrix} \triangleq J_{\omega} \dot{q}$$

ovvero  $\underline{\omega} = J_{\omega} \dot{q}$ , in cui  $\underline{\omega} \in \mathbb{R}^3$

## Descrizione Geometrica

Dalla descrizione cinematica del Jacobiano, sappiamo che la funzione  $\underline{\omega}(\dot{q})$  è lineare, quindi posso calcolarla per sovrapposizione degli effetti.

Il contributo a  $\underline{\omega}$  di  $\dot{q}_i$ , che già conosco per via analitica essere  $\underline{J}\omega_i = \left(\frac{\partial R}{\partial q_i} R\right)^V$ , lo posso anche trovare geometricamente ponendo  $q_i = 1$  e  $\dot{q}_j = 0, \forall j \neq i$ : quindi guardando al moto di un solo corpo rigido, costituito dall'end-effector e dai link da  $L_{i-1}$  a  $L_n$  (l'end-effector).



Posizione:

Scrivendo  ${}^B \underline{X}(q) = \underline{p}_{i-1} + ({}^B \underline{X} - {}^B \underline{p}_{i-1}) = {}^B \underline{p}_{i-1} + R_E^E ({}^E \underline{X} - {}^E \underline{p}_{i-1})$

e derivando,

se  $J_i$  è rotoidale:  ${}^B \dot{\underline{X}} = \dot{\underline{p}}_{i-1} + \dot{\omega}_E^E R_E^E ({}^E \underline{X} - {}^E \underline{p}_{i-1}) + R_E^E (\dot{\underline{X}} - \dot{\underline{p}}_{i-1}) = \dot{\omega}_E^E ({}^E \underline{X} - {}^E \underline{p}_{i-1}) + R_E^E \dot{\underline{X}} = \dot{\omega}_E^E ({}^E \underline{X} - {}^E \underline{p}_{i-1}) + R_E^E \dot{\underline{X}}$

se  $J_i$  è prismatico  ${}^B \dot{\underline{X}} = \dot{\underline{p}}_{i-1} + R_E^E (\dot{\underline{X}} - \dot{\underline{p}}_{i-1}) = R_E^E \dot{\underline{X}}$

mentre, per quel che riguarda la velocità angolare del corpo  $\mathcal{B}$ , si ha

se  $J_i$  è rotoidale 
$${}^B \hat{\omega}_B = R_E^B R_E^A = R_{z_{i-1}} R_E R_{z_{i-1}} R_B = R_{z_{i-1}} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_i & -\dot{\theta}_i & 0 \\ 0 & \dot{\theta}_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R_B = \hat{z}_{i-1} \dot{\theta}_i$$

se  $J_i$  è prismatico 
$${}^B \hat{\omega}_B = 0$$

Si è dunque trovata una espressione sia per  $J_{p_i}$  che per  $J_{r_i}$ :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{p_i} \\ J_{r_i} \end{pmatrix} \dot{q}_i = \begin{cases} \begin{pmatrix} \hat{z}_{i-1} (x - p_{i-1}) \\ \hat{z}_{i-1} \end{pmatrix} & J_i \text{ ROT} \\ \emptyset & J_i \text{ PRISM} \end{cases}$$

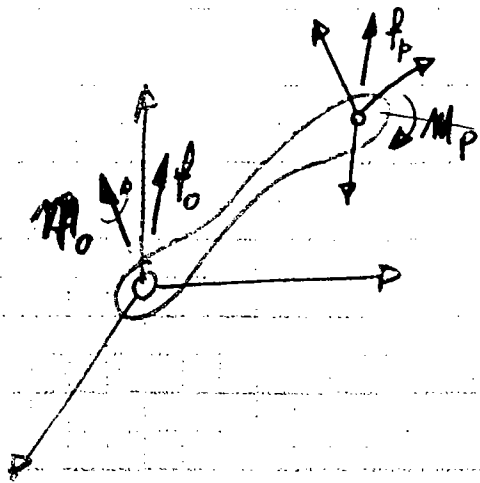
Questa espressione non hanno bisogno di effetti e alcuna derivata delle funzioni della cinematica diretta. Per calcolare le colonne dello Jacobiano geometrico, è sufficiente calcolare

$$T_i = \begin{pmatrix} * & | & x \\ 0 & 0 & 0 & | & z \end{pmatrix} \text{ e } A_{z_{i-1}} = \begin{pmatrix} * & * & z_{i-1} & | & b \\ * & * & z_{i-1} & | & b \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \quad \forall i=1, 2$$

NON

\* da cui,  ${}^B \hat{\omega}_B = \hat{z}_{i-1} \dot{\theta}_i$ . Per l'ultimo passo è o, si ricordi che  $R \hat{\omega} R^T = (\hat{R}\omega)$ . Quindi, nel nostro caso, si ha  ${}^B R_{z_{i-1}} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R_{z_{i-1}}^T = \dot{\theta}_i \begin{pmatrix} \hat{R}_{z_{i-1}} & 0 \end{pmatrix} = \dot{\theta}_i \hat{z}_{i-1}$

# Trasformazioni di forze e coppie

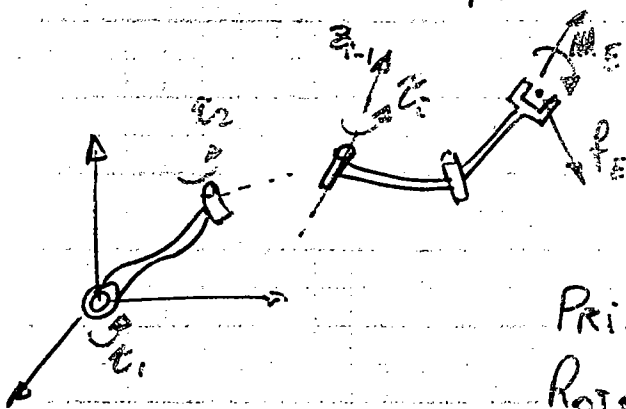


Ricostruzione di una forza  
 L'effetto di una forza  $f_p$  e di un momento  $M_p$  applicati in  $p$  è staticamente equivalente ad una forza  $f_o$  e ad una coppia (o momento)  $M_o$  applicate in  $o$ , se la risultante ed il momento risultante di  $(f_p, M_p)$  e  $(f_o, M_o)$  si eguagliano

\* Nota: tutti i vettori in coordinate base. I cambiamenti di coordinate sono trattati come per vettori qualsiasi, e.g.  ${}^o f_p = {}^o R_i f_p$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_o = f_p \\ M_o = M_p + d_{op} \times f_p \end{cases}$$

## Relazione coppie - wrench



$$z = A \begin{pmatrix} f_E \\ M_E \end{pmatrix} = A w$$

$$z_i = A_i w$$

PRISMATICO:  $z_i = z_{i-1}^T f_E$

ROTOIDALE:  $z_i = z_{i-1}^T ((p_E - p_{i-1}) \times f_E + M_E)$

$$A_i = \begin{cases} [z_{i-1}^T, 000] & \text{PRISM.} \\ [z_{i-1}^T(x - p_{i-1}), z_{i-1}^T] & \text{ROTOID.} \end{cases}$$

\* Wrench: vettore  $\begin{pmatrix} f \\ M \end{pmatrix}$  6-dimensionale fisicamente disomogeneo

- Osservazione: la matrice  $A$  che lega le forze/coppie sull'end-effector, alle forze-coppie sui giunti  $\tau = A w$ , è pari alla trasposta del Jacobiano geometrico

$$A = J^T$$

per cui scriveremo  $\tau_{AR} = J^T w_{RE}$  ( $w_{RE}$ : forze/coppie esercitate dal robot sull'ambiente)

- La relazione non è certo casuale. Infatti, il Principio dei lavori virtuali (P.L.V) stabilisce che, se un sistema è in equilibrio statico, la somma dei lavori svolti da tutte le forze esterne agenti sul sistema, in relazione a qualsiasi movimento virtuale (cioè soddisfacente i vincoli) del sistema stesso, è nullo.

- Nel caso di un manipolatore abbiamo due "ingressi" per le azioni esterne: i giunti (forze/coppie  $\tau$ , spostamenti  $\delta q$ ) e l'end-effector (forze/coppie  $w_{ER}$ , spostamenti  $\delta x$ ). Inoltre, abbiamo vincoli cinematici tra gli spostamenti, espressi da  $\delta x = J \delta q$

- Applicando il PLV al braccio, otteniamo dunque

$$\tau_{AR}^T \delta q + w_{ER}^T \delta x = 0 \quad \forall \delta x = J \delta q$$

$$\Rightarrow w_{RE}^T A^T \delta q + w_{ER}^T J \delta q = 0 \quad w_{RE} = -w_{ER}$$

$$\Rightarrow A^T = J \quad \text{c.v.d.}$$

Si sono date quattro differenti caratterizzazioni della cinematica differenziale: analitica, cinematica, geometrica, e statica.

In quale rapporto stanno tra di loro?

Per la parte di posizione

$$\dot{x}_i = \sum_p \dot{q}_p$$

tutte le caratterizzazioni sono equivalenti, cambiando al più il modo di calcolare il Jacobiano; per derivazione (analitico e cinematico) delle grandezze geometriche all'end-effector, ovvero per calcolo algebrico sulle grandezze geometriche dell'intero braccio (geometrico e statico).

Per la parte di orientazione vi sono differenze più sostanziali: mentre le descrizioni cinematica, geometrica, e statica si riferiscono al rapporto tra velocità angolari e velocità dei giunti, la descrizione analitica è necessariamente legata ad una particolare parametrizzazione minima delle orientazioni.

Esempio: per una parametrizzazione con angoli di Eulero  $\Phi(\varphi, \theta, \psi)$ , si ha  $\dot{\Phi} = \sum_{A_0} \dot{q}$  mentre il Jacobiano geometrico, calcolato (e meno di diversità nel calcolo, come sopra) con le caratterizzazioni cinematica e statica, sarà  $\dot{\omega} = \sum_{\omega} \dot{q}$ .

•  $\omega$  è una quasi-velocità: il suo integrale non ha nessun significato fisico, per cui  $\omega$  non è la derivata di nulla.

•  $\Phi$  dell'angolo si riferisce a descrizioni di rotazione intuitive delle orientazioni, ed è legata alla statica in modo



Relazione tra Jacobiano di orientazione analitico e cinematico:

per una data rappresentazione minima  $\Phi$ , conosco la matrice di rotazione corrispondente,  $R(\Phi)$ .

Per cui, procedendo cinematicamente, si ha

$$\dot{R}(\Phi) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial R(\Phi)}{\partial \Phi_k} \dot{\Phi}_k = \hat{\omega} R(\Phi)$$

$$\rightarrow \hat{\omega} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial R(\Phi)}{\partial \Phi_k} R^T(\Phi) \dot{\Phi}_k$$

definendo  $\hat{T}_{A,k} = \frac{\partial R(\Phi)}{\partial \Phi_k} R^T(\Phi)$ , e quindi i vettori  $T_{A,k} = \left( \frac{\partial R}{\partial \Phi_k} R^T \right)^T$ ,

si ha

$$\rightarrow \underline{\omega} = [T_{A,1} \ T_{A,2} \ T_{A,3}] \begin{pmatrix} \dot{\Phi}_1 \\ \dot{\Phi}_2 \\ \dot{\Phi}_3 \end{pmatrix} = T_A(\Phi) \dot{\Phi}$$

esempio: nella rappres. RPY,

$$R(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = \begin{pmatrix} c_1 c_2 & c_1 s_2 s_3 - s_1 c_3 & c_1 s_2 c_3 + s_1 s_3 \\ s_1 c_2 & s_1 s_2 s_3 + c_1 c_3 & s_1 s_2 c_3 - c_1 s_3 \\ -s_2 & c_2 s_3 & c_2 c_3 \end{pmatrix}; \dots$$

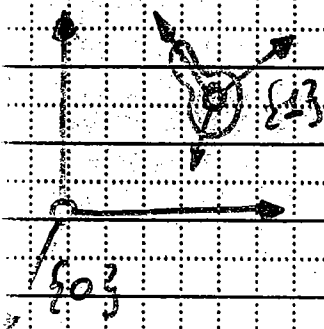
• Si ha quindi  $\mathcal{J}\omega = T_A(\Phi) \mathcal{J}_A \dot{\alpha}$  ovvero

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_3 & 0 \\ 0 & T_A(\Phi) \end{pmatrix} \mathcal{J}_A, \text{ dove } \mathcal{J} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_P \\ \mathcal{J}_\omega \end{pmatrix}, \mathcal{J}_A = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_P \\ \mathcal{J}_{A0} \end{pmatrix}$$

È naturalmente possibile anche una caratterizzazione geometrica di  $T(\Phi)$

# Jacobiani in Terza di Verse

Talvolta è utile, noto il Jacobiano geometrico che mette in relazione velocità di tras. e rotaz. di una terna solida ad un link, trovare altri Jacobiani correlati.

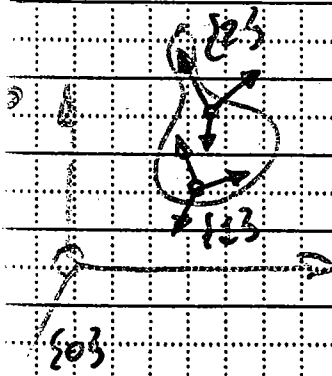


Sia ad esempio  ${}^0J$  il Jacobiano che fornisce le velocità  $\dot{p}_1$  e  $\omega_1$  della terna  $\{1\}$  rispetto a un osservatore in  $\{0\}$ , proiettate in  $\{0\}$ :

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_1 \\ \omega_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_0^T \\ 0 \end{pmatrix} \dot{q} = {}^0J \dot{q}$$

Se desidero esprimere le stesse velocità in coordinate  $\{1\}$ , basterà ricordare che  $\dot{p}_1 = R_0 \dot{p}_0$ ,  $\omega_1 = R_0 \omega_0$  quindi:

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_1 \\ \omega_1 \end{pmatrix} = R_0 \begin{pmatrix} \dot{p}_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_0 & 0 \\ 0 & R_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{p}_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} = {}^1J \dot{q}$$



Se invece, noto  ${}^0J$ , voglio trovare  ${}^2J$ , cioè le velocità della terna  $\{2\}$ , ancora solide allo stesso link, ma ruotata di  $R_2$  e traslata di  ${}^2p_2 = ({}^2p_2 - {}^2p_1)$ , avrò:

$${}^0\dot{p}_2 = {}^0\dot{p}_1 + R_1 {}^1\dot{p}_2 \Rightarrow {}^0\dot{p}_2 = {}^0\dot{p}_1 + R_0 {}^1\dot{p}_2 = {}^0J \dot{q} + R_0 {}^1\dot{p}_2$$

$${}^0R_2 = R_1 R_2 \Rightarrow \omega_2 = \sum_i \left( \frac{\partial R_1 R_2}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i = \sum_i \left( \frac{\partial R_1}{\partial q_i} R_2 + R_1 \frac{\partial R_2}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i$$

$$\text{quindi } \omega_2 = \sum_i \left( \frac{\partial R_1}{\partial q_i} R_2 + R_1 \frac{\partial R_2}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i = {}^2J \dot{q} = {}^2\omega_2$$

$$\text{e } {}^0\dot{p}_2 = {}^0J \dot{q} + R_0 {}^1\dot{p}_2 \Rightarrow {}^2J = \begin{pmatrix} J_2 & R_0^T \\ 0 & J_2 \end{pmatrix} {}^0J$$

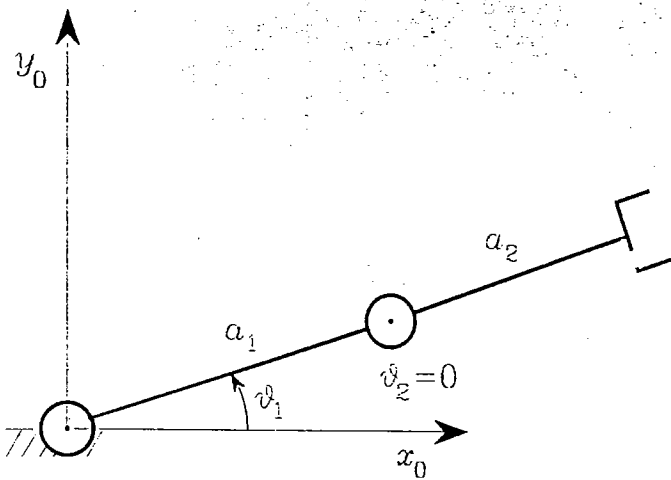
- Manipolatore planare a due bracci

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{J}) = a_1 a_2 s_2$$

⇓

$$\vartheta_2 = 0 \quad \vartheta_2 = \pi$$



\*  $[-(a_1 + a_2)s_1 \quad (a_1 + a_2)c_1]^T$  parallelo a  $[-a_2s_1 \quad a_2c_1]^T$   
 (componenti di velocità dell'organo terminale non indipendenti)