

CAPITOLO 5

Campi elettrici nella materia: polarizzazione di dielettrici ideali e con perdite

Contenuti:

5.1 Introduzione.....	2
5.2 Dielettrici e dipoli elettrici.....	2
5.2.1 Momento di dipolo elettrico.....	2
5.2.2 Dielettrici polari e apolari.....	3
5.3 Dielettrici ideali.....	3
5.3.1 Polarizzazione di un dielettrico isotropo ed ideale.....	3
5.3.2 Descrizione fenomenologica della polarizzazione.....	4
5.3.3 Costante (o permittività o permeabilità) dielettrica relativa.....	7
5.3.4 Relazione tra polarizzazione e campo elettrico.....	7
5.3.5 Induzione elettrica (o spostamento dielettrico).....	7
5.3.6 Relazione tra carica di polarizzazione e carica libera.....	7
5.3.7 Teorema di Gauss.....	8
5.3.8 Applicazione del teorema di Gauss ad un condensatore planare.....	8
5.4 Materiali ferroelettrici.....	9
5.5 Quadro sinottico.....	10
5.6 Effetti di accoppiamento elettro-termo-meccanico nei dielettrici.....	11
5.6.1 Effetto piezoelettrico.....	11
5.6.2 Effetto piroelettrico.....	11
5.6.3 Effetto elettrocalorico.....	11
5.6.4 Ordinamento degli insiemi dei materiali dielettrici.....	11
5.7 Dielettrici reali con perdite.....	13
5.7.1 Meccanismi di polarizzazione della materia e dispersione dielettrica.....	13
5.7.2 Dielettrici con perdite per rilassamento dielettrico.....	16
5.7.3 Dielettrici con perdite ohmiche.....	23
5.7.4 Dielettrici con perdite sia per rilassamento dielettrico sia ohmiche.....	23
5.7.5 Polarizzazione interfacciale.....	24
Riferimenti bibliografici.....	32

5.1 Introduzione

Il presente capitolo ha lo scopo di presentare alcune nozioni di base relative ad interazioni elementari tra campi elettrici e materia, in relazione alle proprietà dielettriche ideali o con perdite di essa. La conoscenza degli effetti derivanti da tali interazioni risulta infatti funzionale per lo studio di differenti categorie di fenomeni bioelettrici, come sarà descritto nel corso dei capitoli seguenti.

5.2 Dielettrici e dipoli elettrici

Si definisce *dielettrico* un materiale isolante elettrico perfetto (dielettrico ideale) o debolmente conduttore (dielettrico reale, con perdite) con resistività superiore a 10^9 – 10^{10} Ωm . Sebbene un materiale dielettrico sia di norma costituito da molecole elettricamente neutre, ogni molecola i -esima o ogni elemento di volume Vol_i possono presentare, anche se elettricamente neutri, una separazione di carica $+q$ e $-q$ a distanza r , che costituisce ciò che si definisce un *dipolo elettrico* (Fig. 2.1).

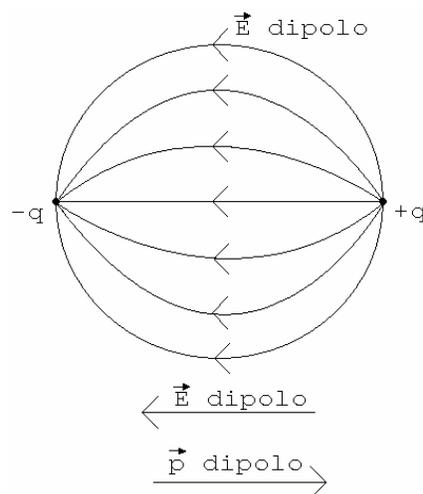


Fig. 2.1. Rappresentazione delle linee di campo di un dipolo elettrico.

Un dipolo elettrico infatti rappresenta una separazione tra i baricentri delle cariche positive e negative di una molecola o, più in generale, di un elemento di volume. La separazione di carica del dipolo genera un campo elettrico del dipolo \vec{E}_{dipolo} , le cui linee di campo sono evidenziate in Fig. 2.1.

5.2.1 Momento di dipolo elettrico

Ogni dipolo elettrico è caratterizzato da una grandezza vettoriale, chiamata *momento di dipolo elettrico*. Essendo un momento, esso è definito e calcolato rispetto ad un determinato polo (o). Tale momento gode della proprietà d'invarianza rispetto al polo scelto per definirlo, come di seguito descritto. Definendo \vec{r}_q e \vec{r}_{-q} i vettori posizione delle cariche $+q$ e $-q$, rispettivamente, rispetto al polo o scelto, il momento di dipolo rispetto ad o è così definito:

$$\vec{P}_o = q\vec{r}_q + (-q)\vec{r}_{-q} \quad (2.1a)$$

Scegliendo come polo o il baricentro della carica $-q$ si ha: $\vec{r}_q = \vec{r}$ e $\vec{r}_{-q} = \vec{0}$. Pertanto, il momento di dipolo elettrico vale:

$$\vec{P}_{dipolo} = q\vec{r} \quad (2.1b)$$

Si noti che \vec{P}_{dipolo} e \vec{E}_{dipolo} hanno versi opposti (Fig. 2.1.).

Si definisce inoltre *momento di dipolo elettrico per unità di volume di dielettrico (o vettore di polarizzazione)* il seguente vettore:

$$\vec{P} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{P}_i}{Vol} \quad (2.1c)$$

dove \vec{P}_i è il momento di dipolo del dipolo i -esimo e N è il numero dei dipoli presenti nel volume Vol .

5.2.2 Dielettrici polari e apolari

I dielettrici possono essere suddivisi nelle seguenti due classi: dielettrici con molecole *polari* e dielettrici con molecole *apolari*. Le molecole dei dielettrici polari, ad esempio H_2O (Fig. 2.2), $NaCl$, ecc., possiedono dei dipoli spontanei $\vec{P}_i \neq 0$ ma orientati casualmente, in modo che $\vec{P} = 0$.

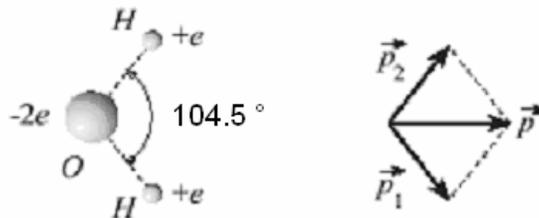


Fig. 2.2. Molecola dell'acqua e suo momento di dipolo.

I dielettrici con molecole *apolari*, ad esempio O_2 , H_2 , ecc., non possiedono dipoli spontanei ($\vec{P}_i = 0$). Tuttavia questi possono essere indotti dall'applicazione di un campo elettrico \vec{E} al dielettrico, ossia per $\vec{E} \neq 0$ si ha $\vec{P}_i \neq 0$. Il campo elettrico infatti può deformare le molecole, distanziando i baricentri della carica $+e -$ (le cariche non possono mettersi in moto perché il materiale è dielettrico, però possono "separarsi"), dando così origine a dei dipoli indotti dal campo \vec{E} applicato.

5.3 Dielettrici ideali

5.3.1 Polarizzazione di un dielettrico isotropo ed ideale

Sia i dielettrici polare che apolari subiscono, quando sottoposti ad un campo elettrico $\vec{E} \neq 0$, una polarizzazione (ossia si polarizzano), ovvero i dipoli al loro interno (propri o indotti da \vec{E}) si allineano parallelamente ad \vec{E} , tutti con lo stesso verso (Fig. 2.3); ciò dà origine ad un momento di dipolo per unità di volume (vettore di polarizzazione) non nullo:

$$\vec{P} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{P}_i}{Vol} \neq 0 \quad (2.2)$$

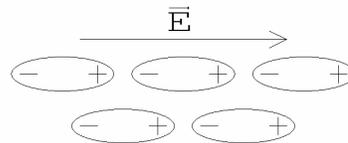


Fig. 2.3. Orientazione di dipoli indotta da un campo elettrico esterno.

5.3.2 Descrizione fenomenologica della polarizzazione

Si consideri un condensatore planare tra le cui armature sia presente il vuoto, come raffigurato in Fig. 2.4.

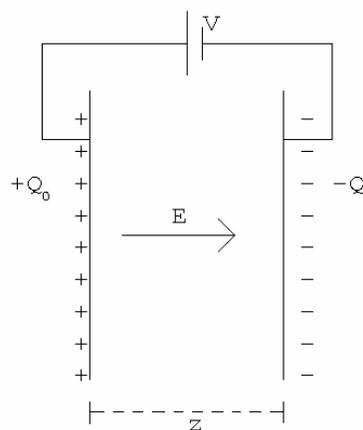


Fig. 2.4. Condensatore planare.

Siano V la differenza di potenziale (costante) stabilita tra le armature, Q_0 il valore assoluto della carica su ciascuna di esse, A l'area di ciascuna di esse, z la distanza tra di esse ed ϵ_0 la *permittività dielettrica del vuoto* ($\epsilon_0=8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m). Si ha:

$$\begin{cases} V = \int_0^z \vec{E} \cdot \vec{z} \, dz = E \int_0^z dz = Ez \\ E = \frac{Q_0}{\epsilon_0 A} \end{cases} \quad (2.3)$$

dove E indica il modulo del vettore \vec{E} . La *capacità elettrica* del condensatore vale:

$$C_0 = \frac{Q_0}{V} = \epsilon_0 \frac{A}{z} \quad (2.4)$$

Si supponga ora di immettere tra le piastre un materiale dielettrico diverso dal vuoto, mantenendo costante V . I dipoli del dielettrico, inizialmente orientati irregolarmente, si allineano sotto l'azione del campo esterno \vec{E}_{est}

applicato (Fig. 2.5). A seguito dell'allineamento, però, i dipoli creano a loro volta un campo interno al dielettrico \vec{E}_{int} di verso opposto a quello di \vec{E}_{est} (Fig. 2.5).

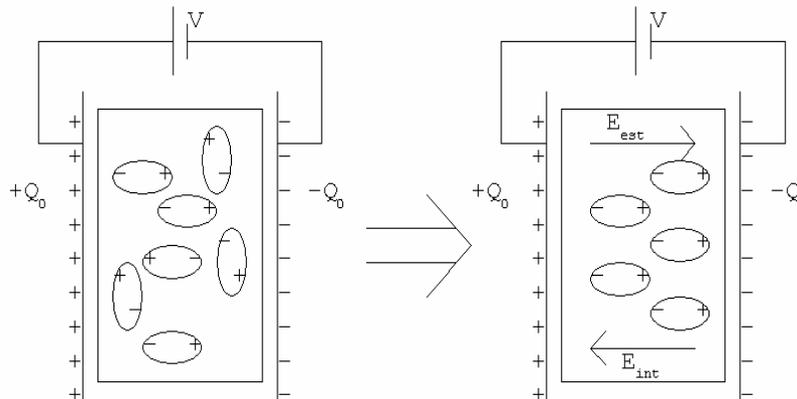


Fig. 2.5. Inserzione di un dielettrico tra le armature di un condensatore planare.

Conseguentemente, il campo elettrico risultante all'interno del dielettrico risulta inferiore rispetto a quello che si avrebbe in assenza del materiale, ossia rispetto al campo elettrico \vec{E}_{est} :

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_{est} + \vec{E}_{int} \Rightarrow |\vec{E}_{tot}| < |\vec{E}_{est}| \quad (2.5)$$

Inoltre, sulle superfici del dielettrico che si affacciano sugli elettrodi appare una *carica di polarizzazione* dovuta ai dipoli che si affacciano su tali superfici.

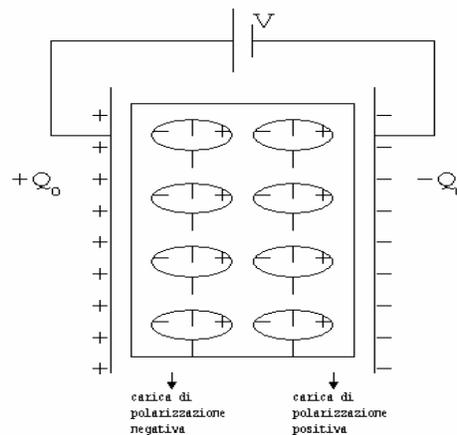


Fig. 2.6. Polarizzazione di un materiale dielettrico tra le armature di un condensatore planare.

Poiché per ipotesi V è costante, la carica di polarizzazione (sulla superficie del dielettrico) richiama altra *carica libera* (sugli elettrodi) dal generatore e nel dielettrico si stabilisce, all'equilibrio, il medesimo campo elettrico $E = V / z$ che si avrebbe in assenza del materiale. Per quantificare tale carica libera aggiuntiva, è necessario quantificare la carica di polarizzazione. A tale scopo si sfrutta il seguente risultato: per un mezzo dielettrico di forma qualsiasi, polarizzato uniformemente e interfacciato ad un conduttore ideale (che presenti un campo elettrico nullo al suo interno) o al vuoto, la *densità superficiale della carica di polarizzazione* è espressa dalla seguente relazione:

$$\frac{Q_{pol}}{A} = \vec{P} \cdot \vec{n} \quad (2.6a)$$

dove \vec{n} è il versore ortogonale alla superficie del dielettrico, nel verso uscente da esso. Una generalizzazione di tale relazione è presentata in una sezione successiva. Dalla Eq. (2.6a) si ricavano per la configurazione di tipo condensatore planare le seguenti densità di carica di polarizzazione sulle superfici del dielettrico:

$$\begin{cases} \frac{Q_{pol}}{A} = +|\vec{P}| & \text{in prossimità dellelettrodo negativo} \\ \frac{Q_{pol}}{A} = -|\vec{P}| & \text{in prossimità dellelettrodo positivo} \end{cases} \quad (2.6b)$$

Come osservazione, si noti che tale risultato può essere ricavato anche dalle considerazioni di seguito riportate, tanto semplicistiche quanto efficaci. La carica di polarizzazione interfacciale è data dalla somma delle cariche di polarizzazione presenti su ciascuna interfaccia:

$$\frac{Q_{pol}}{A} = \frac{\sum_{interf. polariz.} q_i}{A} \quad (2.7)$$

Considerando che per una configurazione di dipoli orientati nello stesso verso vale

$$\vec{P} = \frac{\vec{P}_i}{Vol_i} = \frac{q_i \vec{r}}{Vol_i} \quad (2.8)$$

si ha:

$$\frac{Q_{pol}}{A} = \frac{1}{A} \sum_{interf. polariz.} \frac{P Vol_i}{r} = \frac{1}{Ar} P \sum_{interf. polariz.} Vol_i = \frac{1}{Vol_{interf.}} P Vol_{interf.} = P \quad (\text{c.v.d.}) \quad (2.9)$$

dove P indica il modulo del vettore \vec{P} .

Dall'Eq. (2.6b) si ha che all'equilibrio sugli elettrodi si stabilisce, come rappresentato in Fig. 2.7, la seguente carica libera:

$$Q_{lib} = \pm(Q_0 + PA) \quad (2.10)$$

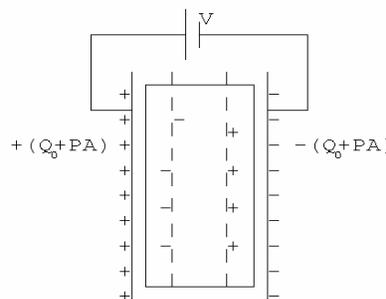


Fig. 2.7. Distribuzione di carica all'equilibrio elettrico.

Ne consegue che la capacità elettrica in presenza del dielettrico diviene:

$$C = \frac{Q_{lib}}{V} = \frac{Q_0 + PA}{V} \quad (2.11)$$

5.3.3 Costante (o permittività o permeabilità) dielettrica relativa

Tale grandezza, indicata con ε_r , può essere definita nel modo seguente:

$$\varepsilon_r = \frac{C}{C_0} = \frac{Q_0 + PA}{Q_0} = \frac{\frac{Q_0}{A} + P}{\frac{Q_0}{A}} = \frac{\varepsilon_0 E + P}{\varepsilon_0 E} \quad (2.12)$$

Si noti che $\varepsilon_r = 1$ per il vuoto, mentre $\varepsilon_r > 1$ per qualsiasi dielettrico diverso dal vuoto. Ad esempio, $\varepsilon_r \approx 80$ per l'acqua, $\varepsilon_r \approx 3-5$ per gomme siliconiche e $\varepsilon_r \approx 10000$ per alcune ceramiche. Si sottolinea che tali valori sono forniti semplicemente come un'indicazione sulle differenti proprietà elettriche di diverse tipologie di materiali. In realtà, come sarà chiarito nel corso del presente capitolo, per un qualsiasi mezzo dielettrico reale la descrizione sin qui presentata non è propriamente corretta; in particolare, si rende necessaria una ridefinizione della permittività dielettrica e, conseguentemente, del significato dei valori attribuibili a differenti mezzi.

5.3.4 Relazione tra polarizzazione e campo elettrico

Dalla Eq. (2.12) discende la seguente espressione (con notazione vettoriale):

$$\vec{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \vec{E} \quad (2.13)$$

Essendo la polarizzazione direttamente proporzionale al campo elettrico applicato, il dielettrico è detto *lineare*. Il fattore $\varepsilon_r - 1$ è definito *suscettività dielettrica* del materiale.

5.3.5 Induzione elettrica (o spostamento dielettrico)

Si definisce *induzione elettrica* (o *spostamento dielettrico*) la seguente grandezza:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow |\vec{D}| = \frac{Q_0}{A} + P = \frac{|Q_{lib}|}{A} \Rightarrow |\vec{E}| = \frac{Q_0 + PA}{A \varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{|Q_{lib}|}{A \varepsilon_0 \varepsilon_r} \quad (2.14)$$

5.3.6 Relazione tra carica di polarizzazione e carica libera

Dalle precedenti equazioni che quantificano la dipendenza della carica di polarizzazione dalla polarizzazione e di quest'ultima dal campo elettrico discende la seguente relazione tra la carica di polarizzazione Q_{pol} e la carica libera Q_{lib} in prossimità di una superficie di area A di un dielettrico:

$$Q_{pol} = \vec{P} \cdot \vec{n} A = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \vec{E} \cdot \vec{n} A = -\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \frac{Q_{lib}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r A} A \quad (2.15)$$

ossia:

$$Q_{pol} = -\frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} Q_{lib} \quad (2.16)$$

5.3.7 Teorema di Gauss

Il *teorema di Gauss* è un utile strumento di validità generale per il calcolo del campo elettrico generato da una distribuzione di carica libera Q_{lib} all'interno di un mezzo dielettrico omogeneo, isotropo e lineare di permeabilità ϵ_r , secondo la seguente relazione (si veda l'Appendice):

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{Q_{lib}}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad (2.17)$$

dove S è una qualsiasi superficie chiusa che racchiuda la carica libera e \vec{n} è il versore ortogonale alla superficie S nel verso uscente.

Dalla relazione tra Q_{pol} e Q_{lib} discende la seguente forma equivalente del teorema:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{Q_{lib} + Q_{pol}}{\epsilon_0} \quad (2.18)$$

5.3.8 Applicazione del teorema di Gauss ad un condensatore planare

Nel caso del condensatore planare analizzato in precedenza, si consideri convenientemente una superficie S a forma di parallelepipedo, che abbia due basi parallele alle armature e racchiuda una di esse, come in Fig. 2.8.

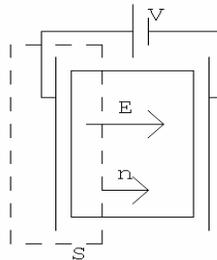


Fig. 2.8. Applicazione del teorema di Gauss ad un condensatore planare.

Poiché il campo \vec{E} è costante all'interno del dielettrico (trascurando gli effetti ai bordi) e nullo fuori, si ha:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = EA \quad (2.19)$$

Quindi:

$$E = \frac{Q_{lib}}{A\epsilon_0\epsilon_r} = \frac{Q_0 + PA}{A\epsilon_0\epsilon_r} \quad (2.20)$$

Come osservazione, si noti che la stessa espressione del campo può essere ricavata anche dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} E = \frac{V}{z} \\ C = \frac{Q_0 + PA}{V} \end{cases} \quad (2.21)$$

Infatti:

$$E = \frac{V}{z} = \frac{1}{z} \frac{(Q_0 + PA)}{C} = \frac{1}{z} \frac{(Q_0 + PA)}{\epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{z}} = \frac{Q_0 + PA}{A \epsilon_0 \epsilon_r} \quad (2.22)$$

5.4 Materiali ferroelettrici

Un materiale dielettrico si definisce ferroelettrico se possiede una polarizzazione spontanea $P \neq 0$, in assenza di campo elettrico applicato, che possa essere invertita da un campo elettrico esterno. Per i ferroelettrici \vec{P} non è proporzionale ad \vec{E} e pertanto essi non sono dielettrici lineari; inoltre, tali materiali hanno valori di ϵ_r molto maggiori di quelli dei dielettrici lineari ordinari. Esempi di tali materiali includono diversi tipi di ceramiche (ad esempio niobati di piombo e magnesio con $\epsilon_r \cong 20'000$) o copolimeri (ad esempio poli(vinilidenefluoruroesafluoropropilene) ossia P(VDF-HFP) con $\epsilon_r \cong 40$). Ad una temperatura T_c nota come *temperatura di Curie ferroelettrica*, i materiali ferroelettrici subiscono una transizione da stato ferroelettrico a dielettrico ordinario (Fig. 2.9).

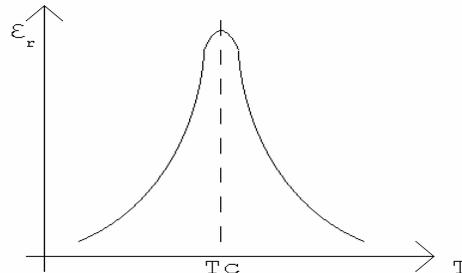


Fig. 2.9. Andamento qualitativo di ϵ_r in funzione di T per un materiale ferroelettrico.

In particolare si ha:

- 1) per $T < T_c$: $\frac{\partial \epsilon_r}{\partial T} > 0$ e il materiale mostra proprietà ferroelettriche, esibendo domini polarizzati separati;
- 2) per $T = T_c$: $\frac{\partial \epsilon_r}{\partial T} = 0$ e il materiale subisce una transizione da ferroelettrico a dielettrico ordinario;
- 2) per $T > T_c$: $\frac{\partial \epsilon_r}{\partial T} < 0$ e il materiale mostra proprietà tipiche di un dielettrico ordinario.

Un andamento analogo a quello presentato in Fig. 2.9 sussiste tipicamente anche per la relazione tra la costante dielettrica ed l'intensità E del campo elettrico applicato.

La non linearità dei ferroelettrici si manifesta in particolar modo nel diagramma di P (o D) in funzione di E con un *ciclo di isteresi* (Fig. 2.10).

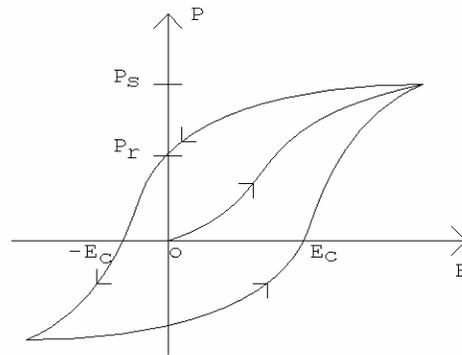


Fig. 2.10. Ciclo di isteresi per un materiale ferroelettrico.

Aumentando E , a partire dal valore nullo, si ha che P aumenta fino ad un valore di saturazione P_s . Diminuendo successivamente il campo E fino ad annullarlo nuovamente, il materiale presenta una polarizzazione residua P_r . Per depolarizzarlo completamente è necessario applicare un campo di verso opposto ($E < 0$). Aumentando l'intensità del campo in tale verso, la polarizzazione cambia verso ($P < 0$). Si definisce *campo coercitivo* il valore del campo $E = E_c$ tale che $P = 0$, mentre si definisce *polarizzazione residua* il valore della polarizzazione $P = P_r$ per $E = 0$.

5.5 Quadro sinottico

La Fig. 2.11 presenta un riepilogo degli andamenti qualitativi di P , D ed ϵ_r in funzione di E per i mezzi dielettrici sin qui descritti.

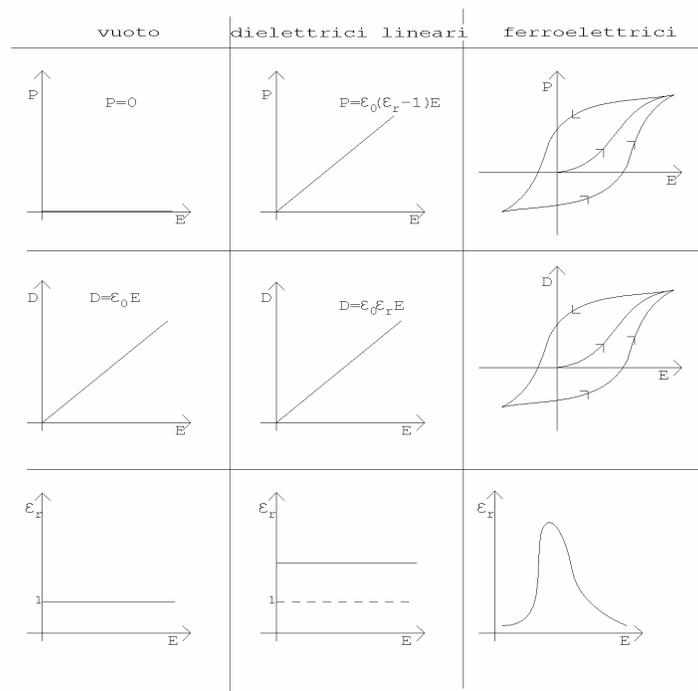


Fig. 2.11. Andamenti qualitativi di P , D ed ϵ_r in funzione di E per il vuoto, un dielettrico lineare e un ferroelettrico.

5.6 Effetti di accoppiamento elettro-termo-meccanico nei dielettrici

Si citano in questa sezione alcuni effetti di accoppiamento elettro-termo-meccanico tipici di alcune tipologie di dielettrici. Tali effetti possono essere presenti non soltanto in svariati materiali sintetici (utilizzati ad esempio per la realizzazione di sensori e attuatori), ma anche in molte tipologie di tessuti biologici e composti organici propri degli esseri viventi, come descritto in modo più approfondito nel capitolo 9.

5.6.1 Effetto piezoelettrico

L'effetto piezoelettrico si manifesta in particolari dielettrici, chiamati *piezoelettrici*, aventi una struttura cristallina non-centrosimmetrica, ossia caratterizzata dall'assenza di un centro di simmetria (ad esempio cristalli di quarzo). Il fenomeno consiste nei due seguenti effetti costitutivi:

Effetto piezoelettrico diretto: il materiale piezoelettrico manifesta una polarizzazione in seguito alla applicazione non soltanto di un campo elettrico, ma anche di uno stress (sforzo) meccanico.

Effetto piezoelettrico inverso: il materiale piezoelettrico può subire uno strain (deformazione percentuale) in seguito alla applicazione non soltanto di uno stress meccanico, ma anche di un campo elettrico.

Valgono in particolare le seguenti *equazioni costitutive piezoelettriche*:

$$D_i = \varepsilon_{ik}^T E_k + d_{ikl} T_{kl} \quad (D_i|_{E_k=0} = d_{ikl} T_{kl} : \text{effetto piezoelettrico diretto}) \quad (2.23)$$

$$S_{ij} = d_{kij} E_k + s_{ijkl}^E T_{kl} \quad (S_{ij}|_{T_{kl}=0} = d_{kij} E_k : \text{effetto piezoelettrico inverso}) \quad (2.24)$$

dove:

$i, j, k, l = x, y, z$;

s_{ijkl}^E = tensore delle cedevolezza (compliance) meccaniche a campo elettrico E costante (tipicamente nullo);

ε_{ik}^T = tensore delle permittività dielettriche a sforzo meccanico T costante;

D_i = vettore delle componenti dello spostamento dielettrico;

E_k = vettore delle componenti del campo elettrico;

S_{ij} = tensore degli strain (deformazioni percentuali) meccanici;

T_{kl} = tensore degli stress (sforzi) meccanici;

d_{ikl} e d_{kij} = tensori delle costanti piezoelettriche.

5.6.2 Effetto piroelettrico

Un materiale dielettrico si definisce *piroelettrico* (ad esempio cristalli di tormalina) se possiede una polarizzazione spontanea per $T < T_c$ = temperatura di Curie (altrimenti per $T > T_c$ la polarizzazione scompare), che dipenda dalla temperatura, ossia $\partial P / \partial T \neq 0$ per un campo elettrico costante (eventualmente nullo).

5.6.3 Effetto elettrocalorico

L'effetto *elettrocalorico* è il fenomeno inverso a quello piroelettrico e consiste in una variazione della temperatura di un dielettrico al variare del campo elettrico applicato, ossia $\partial T / \partial E \neq 0$.

5.6.4 Ordinamento degli insiemi dei materiali dielettrici

Vale la seguente proprietà fondamentale: se un materiale è *ferroelettrico*, ossia se presenta una polarizzazione spontanea (per $T < T_c$) che possa essere invertita da un campo elettrico applicato, allora esso è anche *piroelettrico* e *piezoelettrico*. La differenza tra un materiale piroelettrico ed uno ferroelettrico risiede nel fatto che, pur presentando entrambi una polarizzazione spontanea, per un piroelettrico tale polarizzazione non necessariamente

è invertibile mediante l'applicazione di un campo elettrico; qualora ciò si verifici, il materiale è anche ferroelettrico. Pertanto, l'insieme dei materiali dielettrici può essere ordinato in modo da comprendere l'insieme dei piezoelettrici, il quale a sua volta include quello dei piroelettrici, che infine racchiude quello dei ferroelettrici (Fig. 2.12).

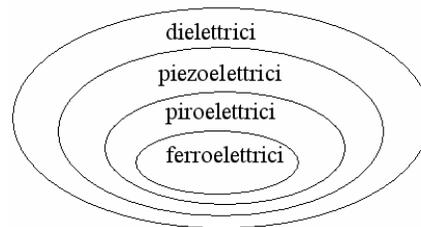


Fig.2.12. Ordinamento degli insiemi dei materiali piezoelettrici, piroelettrici e ferroelettrici.

5.7 Dielettrici reali con perdite

A differenza del caso ideale, un dielettrico *reale* soggetto ad un campo elettrico può essere percorso al suo interno da una debole corrente elettrica. Essa può essere causata da due tipi di perdite dielettriche: *perdite per rilassamento dielettrico* e *perdite ohmiche*. Le prime sono dovute al rilassamento dei dipoli del materiale, a seguito dell'applicazione del campo elettrico. Le seconde sono espressione del moto, sostenuto dal campo elettrico applicato, di cariche mobili all'interno del materiale, già presenti al suo interno o iniettabili dall'esterno. Tali fenomeni sono descritti di seguito, dopo una introduzione sui differenti meccanismi di polarizzazione della materia.

5.7.1 Meccanismi di polarizzazione della materia e dispersione dielettrica

A seconda del range di frequenze di lavoro del campo elettrico applicato, si distinguono quattro fondamentali meccanismi di polarizzazione della materia: *polarizzazione per deformazione elettronica*, *per deformazione atomica*, *per orientazione dipolare* e *polarizzazione interfacciale*. Essi sono presentati nelle sezioni seguenti.

5.7.1.1 Polarizzazione per deformazione elettronica

Tale polarizzazione risulta comune a tutti i solidi e consiste in uno spostamento della nuvola elettronica relativamente al nucleo (Fig. 2.13).

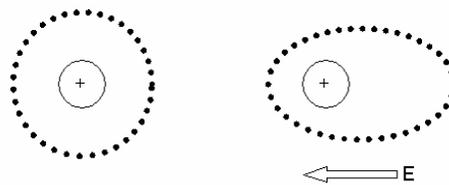


Fig. 2.13. Polarizzazione per deformazione elettronica.

Poiché tale processo coinvolge interazioni con livelli energetici discreti, la risposta in frequenza è caratterizzata da un comportamento di tipo risonante. La polarizzazione per deformazione elettronica è caratterizzata da una costante di tempo caratteristica dell'ordine di 10^{-16} s. Pertanto, tale polarizzazione è tipicamente presente a frequenze caratteristiche della luce *ultravioletta* (10^{15} Hz); per tale motivo viene anche detta *polarizzazione ottica*. Ne consegue che tale meccanismo di polarizzazione determina variazioni della costante dielettrica e manifestazioni di perdite solo nella gamma di frequenze elettromagnetiche ottiche; queste variazioni si manifestano con linee di assorbimento nello spettro di frequenza del visibile o dell'ultravioletto. Nel campo delle frequenze ottiche si fa riferimento, di regola, all'indice di rifrazione n , più che alla costante dielettrica. Tuttavia, come noto, la teoria elettromagnetica prevede che, se misurati alla stessa frequenza, n ed ϵ_r per un mezzo dielettrico siano legati dalla relazione $\epsilon_r = n^2$. Per la luce visibile l'indice di rifrazione per i solidi e i liquidi in genere varia tra 1.4 e 2.2; quindi si deduce che il contributo della polarizzazione elettronica alla costante dielettrica dei solidi e dei liquidi ha un valore compreso tra 2 e 4. Tale polarizzazione è inoltre praticamente indipendente dalla temperatura.

5.7.1.2 Polarizzazione per deformazione atomica

Secondo tale meccanismo di polarizzazione, il campo elettrico applicato distorce la disposizione dei nuclei atomici all'interno di una molecola. Pertanto, essa è resa possibile dall'elasticità dei legami chimici (Fig. 2.14). La Fig. 2.15 mostra un esempio di tale tipo di polarizzazione per il gruppo C=O.

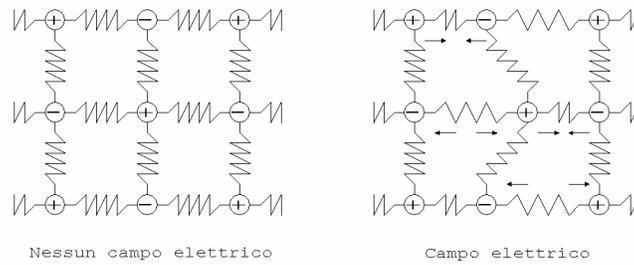


Fig. 2.14. Polarizzazione per deformazione atomica.

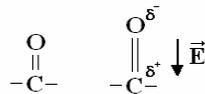


Fig. 2.15. Esempio di polarizzazione per deformazione atomica.

Analogamente alla polarizzazione per deformazione elettronica, anche tale processo coinvolge interazioni con livelli energetici discreti; pertanto, la risposta in frequenza è ancora una volta caratterizzata da un comportamento di tipo *risonante*.

Tale meccanismo di polarizzazione è caratterizzato da costanti di tempo caratteristiche dell'ordine di 10^{-14} - 10^{-13} s. Pertanto, si manifesta a frequenze dell'ordine di 10^{12} - 10^{13} Hz, ossia nell'*infrarosso*. Anche tale polarizzazione è inoltre praticamente indipendente dalla temperatura.

5.7.1.3 Polarizzazione per orientazione dipolare

Tale polarizzazione si verifica in materiali costituiti da molecole polari. I relativi dipoli possono modificare la propria orientazione spaziale e tendono ad allinearsi secondo il campo elettrico applicato (Fig. 2.16).



Fig. 2.16. Polarizzazione per orientazione dipolare.

La limitata mobilità dei dipoli permanenti dà tipicamente origine a fenomeni *dispersivi*. In particolare, la risposta in frequenza associata a tale meccanismo di polarizzazione presenta un andamento tipico di fenomeni di *rilassamento*, descritti nel seguito. Pertanto, un meccanismo di polarizzazione per orientazione si manifesta dalle basse frequenze fino ad una frequenza caratteristica, propria del mezzo. Inoltre, tale meccanismo è molto più lento dei meccanismi per deformazione e la relativa costante di tempo caratteristica può essere inclusa in un ampio range, tipicamente 10^{-11} - 10^{-3} s. Pertanto, una polarizzazione per orientazione può manifestarsi fino a frequenze dell'ordine di 10^{10} Hz, ossia fino alle *microonde*.

A seguito del movimento di orientazione dipolare, si può verificare un riscaldamento del mezzo, che evidenzia le perdite dielettriche del materiale. Un esempio comune di questo fenomeno è il riscaldamento a microonde, il quale sfrutta l'oscillazione dei dipoli delle molecole d'acqua presenti in un mezzo: il movimento di ciascun dipolo che si orienta per azione del campo elettrico applicato disturba quelli vicini e li pone in moto disordinato; conseguentemente, la temperatura all'interno dell'intero materiale cresce. A basse temperature i dipoli tendono a 'congelare' in posizioni reticolari, mentre aumentando la temperatura l'agitazione molecolare svincola i dipoli e li rende disponibili all'orientazione. A temperature eccessivamente elevate l'agitazione termica tende ad annullare il fenomeno. In particolare, P e quindi ϵ_r , risultano inversamente proporzionali alla temperatura T :

$$\frac{\partial P}{\partial T} < 0, \quad \frac{\partial \epsilon_r}{\partial T} < 0 \quad (2.26)$$

5.7.1.4 Polarizzazione interfacciale

In aggiunta ai meccanismi di polarizzazione per deformazione e per orientazione, è possibile ottenere contributi alla polarizzazione dovuti a spostamenti limitati (diffusioni) di eventuali cariche spaziali presenti nel mezzo, che vanno a localizzarsi in prossimità di interfacce di discontinuità interne al mezzo stesso. Ciò dà adito alla cosiddetta *polarizzazione interfacciale*, nota anche come *polarizzazione di Maxwell-Wagner*. Essa si verifica in materiali in cui può avvenire una migrazione di cariche su distanze macroscopiche. Quando tale effetto è consistente, il materiale può degenerare in un conduttore ionico o in un elettrolita solido. Si possono misurare in questo caso costanti dielettriche relative dell'ordine di grandezza di 10^6 o 10^7 , che però, a rigore, non dipendono dalla natura dielettrica del materiale, ma piuttosto dalla mobilità di alcune cariche mobili interne. Tali cariche tendono a migrare sotto l'influenza del campo elettrico applicato, concentrandosi attorno a superfici di discontinuità della struttura. Su queste interfacce viene quindi a crearsi una differenza di potenziale, che determina un'alterazione della polarizzazione. Ne consegue che anche la permittività dielettrica subisce una variazione, risultando tipicamente accresciuta rispetto al valore posseduto dalla struttura del materiale in sé. Ciò giustifica gli alti valori della permittività dielettrica che possono essere riscontrati in materiali particolarmente soggetti alla presenza di interfacce di discontinuità al loro interno. E' questo ad esempio il caso dei tessuti biologici, come sarà descritto nel capitolo 7.

La limitata mobilità delle cariche spaziali dà tipicamente origine a fenomeni *dispersivi*, analogamente a quanto avviene per la polarizzazione orientazionale. Pertanto, la risposta in frequenza associata ad una polarizzazione interfacciale presenta ancora una volta un andamento tipico di fenomeni di *rilassamento*. Un meccanismo di polarizzazione interfacciale si manifesta quindi dalle basse frequenze fino ad una frequenza caratteristica, propria del mezzo. Inoltre, essendo questo meccanismo legato a migrazioni di cariche e polarizzazioni presso interfacce, esso è tendenzialmente il più lento a manifestarsi fra tutti i meccanismi presi in esame. In particolare, esso tipicamente esibisce costanti di tempo caratteristiche dell'ordine di 10^{-3} - 10^{-1} s. Alcuni aspetti della polarizzazione interfacciale sono affrontati in modo più approfondito in una sezione successiva.

5.7.1.5 Distribuzione spettrale dei differenti meccanismi di polarizzazione

Come menzionato, ciascuno dei meccanismi di polarizzazione della materia è caratterizzato da una propria costante di tempo caratteristica. La Tab. 2.1 riassume gli ordini di grandezza di tali tempi caratteristici.

Tab. 2.1. Valori tipici (ordini di grandezza) della costante di tempo e della frequenza caratteristiche per i differenti meccanismi di polarizzazione.

Polarizzazione	τ [s]	f_r [Hz]	Banda
Def. elettronica	10^{-16}	10^{15}	UV
Def. atomica	10^{-14} - 10^{-13}	10^{13} - 10^{12}	IR
Orient. dipolare	10^{-11} - 10^{-3}	10^{10} - 10^2	fino alle MicroOnde
Interfacciale	10^{-3} - 10^{-1}	10^2 - 10^0	--

Per ogni generica frequenza del campo elettrico applicato, la polarizzazione effettiva del materiale è data dalla risultante dei contributi che ciascun meccanismo di polarizzazione può dare a quella frequenza. Pertanto, essendo la permittività dielettrica un'espressione della polarizzazione del materiale, risulta che il valore effettivo della permittività dipende in realtà dalla frequenza. La dipendenza dalla frequenza esibita dalla permittività è nota come *dispersione dielettrica* ed il mezzo dielettrico è detto *dispersivo*.

La polarizzazione per deformazione elettronica è il meccanismo che si manifesta a frequenze più elevate, dell'ordine dell'ultravioletto. Oltre tale soglia, quindi, in pratica ogni meccanismo di polarizzazione tende a svanire e per qualsiasi tipo di materiale la permittività dielettrica relativa ϵ_r tende ad 1 e la permittività assoluta tende a coincidere con il valore ϵ_0 del vuoto.

La Fig. 2.17 mostra qualitativamente la distribuzione in frequenza dei diversi meccanismi di polarizzazione.

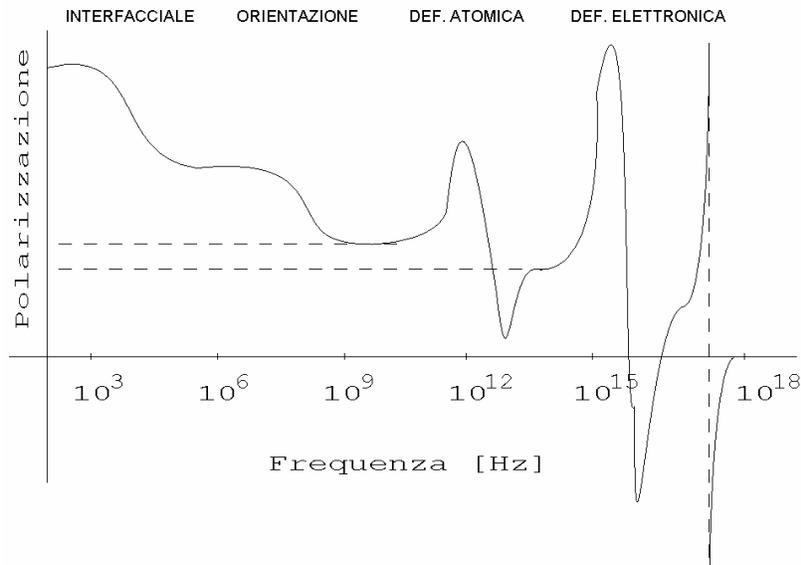


Fig. 2.17. Distribuzione spettrale dei meccanismi di polarizzazione.

Si osservi che la polarizzazione per orientazione dipolare è stata rappresentata con un andamento caratteristico idealmente di fenomeni dispersivi, che prevede una diminuzione della polarizzazione in funzione della frequenza secondo un flesso obliquo. Tale andamento è previsto dal modello di Debye, descritto nel seguito. Si noti inoltre che anche l’andamento corrispondente alla polarizzazione interfacciale è stato rappresentato in modo analogo. Ciò è dovuto al fatto che tipicamente tale meccanismo si manifesta con caratteristiche analoghe a quelle della polarizzazione per orientazione (anche se i due fenomeni hanno una differente origine, come precedentemente discusso). Infine, si sottolinea che gli andamenti relativi alle due tipologie di polarizzazione per deformazione sono stati rappresentati con un comportamento a picco, caratteristico di tutti i fenomeni risonanti,

5.7.2 Dielettrici con perdite per rilassamento dielettrico

5.7.2.1 Rilassamento dielettrico

Genericamente, il termine *rilassamento* definisce un fenomeno per mezzo del quale un sistema perturbato tende all’equilibrio. Nel caso di un materiale dielettrico non ideale, la polarizzazione non è in grado di seguire istantaneamente ogni variazione del campo elettrico applicato. In particolare, si definisce *rilassamento dielettrico* il processo secondo il quale un materiale dielettrico sollecitato da un campo elettrico tende a raggiungere il valore di equilibrio della propria polarizzazione. Ad esempio, nel caso in cui la polarizzazione avvenga mediante un’orientazione dipolare, il processo di rilassamento dielettrico rappresenta la progressiva orientazione dei dipoli del materiale. Il raggiungimento della polarizzazione di equilibrio, ossia del valore massimo della polarizzazione (e quindi anche della costante dielettrica) avviene durante un determinato intervallo temporale. Pertanto, il fenomeno è caratterizzato da una propria *costante di tempo di rilassamento dielettrico* τ , alla quale inoltre corrisponde una *frequenza di rilassamento* $f_{\tau} = 1/2\pi\tau$.

Si supponga ad esempio di applicare ad un dielettrico un campo elettrico costante $E = E_0$ in un certo istante $t=0$, ossia si supponga di applicare una funzione campo elettrico $E(t)$ a gradino:

$$E(t) = E_0 u(t) \quad \text{con} \quad u(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1 & \text{per } t \geq 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

A seguito del rilassamento dielettrico, la polarizzazione del materiale aumenterà gradatamente, con una costante di tempo τ , da un valore istantaneo P_∞ (per $t \rightarrow 0$, ossia per frequenza $f \rightarrow \infty$), detto *polarizzazione istantanea*, ad un valore di regime P_S (per $t \rightarrow \infty$, ossia per frequenza $f \rightarrow 0$), detto *polarizzazione statica* (Fig. 2.18). Conseguentemente, la costante dielettrica relativa passerà da un valore istantaneo ϵ_∞ (per $t \rightarrow 0$, ossia per $f \rightarrow \infty$), detto *costante dielettrica ad alta frequenza*, ad un valore di regime ϵ_s (per $t \rightarrow \infty$, ossia per $f \rightarrow 0$), detto *costante dielettrica statica*.

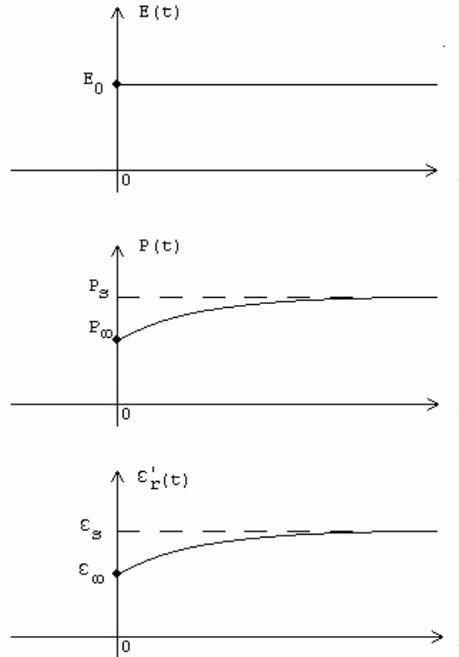


Fig. 2.18. Evoluzione temporale qualitativa della polarizzazione e della permittività dielettrica per un dielettrico sollecitato da un gradino di campo elettrico.

Il rilassamento dielettrico è una sorgente di perdite dielettriche all'interno del mezzo, come di seguito descritto.

5.7.2.2 Permittività dielettrica complessa

Al fine di descrivere le proprietà di un dielettrico con perdite dovute a rilassamento dielettrico, si consideri l'applicazione del seguente campo elettrico alternato:

$$E = E_0 \cos(\omega t) \quad (2.27)$$

A causa del rilassamento dielettrico del materiale, la polarizzazione segue il campo elettrico con un certo *ritardo* τ_{rit} , che si manifesta con uno *sfasamento* $\delta(\omega) = \omega \tau_{rit}$ dell'induzione D rispetto ad E :

$$D = D_0 \cos(\omega(t - \tau_{rit})) = D_0 \cos(\omega t - \delta(\omega)) \quad (2.28)$$

Richiamo: Notazione fasoriale

Data una grandezza sinusoidale $x(t) = X_0 \cos(\omega t + \Phi)$ si definisce *fasore rotante* $\dot{X}(\omega, t)$ associato ad $x(t)$ il numero complesso $\dot{X}(\omega, t) = X_0 e^{j(\omega t + \Phi)} = X_0 \cos(\omega t + \Phi) + j X_0 \sin(\omega t + \Phi)$ con j tale che $j^2 = -1$.

Pertanto, si ha $x(t) = \text{Re} \{ \dot{X}(\omega, t) \}$

Indicando con $\dot{E}(\omega, t)$ e $\dot{D}(\omega, t)$ i fasori rotanti associati alle funzioni $E(t)$ e $D(t)$ si ha:

$$\begin{cases} \dot{E}(\omega, t) = E_0 e^{j\omega t} \Rightarrow E = \text{Re} \{ \dot{E}(\omega, t) \} \\ \dot{D}(\omega, t) = D_0 e^{j(\omega t - \delta(\omega))} \Rightarrow D = \text{Re} \{ \dot{D}(\omega, t) \} \end{cases} \quad (2.29)$$

Si definisce *permittività (o permeabilità) dielettrica relativa complessa* di un dielettrico con perdite per rilassamento dielettrico il numero complesso

$$\varepsilon_r^*(\omega) = \varepsilon_r'(\omega) - j\varepsilon_r''(\omega) \quad (2.30)$$

tale che

$$\dot{D}(\omega, t) = \varepsilon_0 \varepsilon_r^*(\omega) \dot{E}(\omega, t) \quad (2.31)$$

Sostituendo, si ha:

$$D_0 e^{j\omega t} e^{-j\delta(\omega)} = \varepsilon_0 \left(\varepsilon_r'(\omega) - j\varepsilon_r''(\omega) \right) E_0 e^{j\omega t} \quad (2.32)$$

ossia

$$D_0 \cos \delta(\omega) - jD_0 \sin \delta(\omega) = \varepsilon_0 E_0 \varepsilon_r'(\omega) - j\varepsilon_0 E_0 \varepsilon_r''(\omega) \quad (2.33)$$

Da tale equazione discendono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \varepsilon_r'(\omega) = \frac{D_0 \cos \delta(\omega)}{\varepsilon_0 E_0} \\ \varepsilon_r''(\omega) = \frac{D_0 \sin \delta(\omega)}{\varepsilon_0 E_0} \end{cases} \quad (2.34)$$

La parte immaginaria $\varepsilon_r''(\omega)$ è chiamata *fattore di perdita dielettrica* in relazione al suo significato fisico, presentato nella sezione seguente.

Si noti che per un campo statico, ossia in continua si ha:

$$\delta(\omega = 0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_r'(0) = \varepsilon_r = \frac{D_0}{\varepsilon_0 E_0} \\ \varepsilon_r''(0) = 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

Analogamente, se il dielettrico è privo di perdite si ha:

$$\delta(\omega) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_r'(\omega) = \varepsilon_r = \frac{D_0}{\varepsilon_0 E_0} \\ \varepsilon_r''(\omega) = 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

Si definisce *fattore di dissipazione dielettrica* (o *tangente di perdita dielettrica*) la seguente grandezza:

$$\tan \delta(\omega) = \frac{\varepsilon_r''(\omega)}{\varepsilon_r'(\omega)} \quad (2.37)$$

Si definisce *fattore di qualità* del dielettrico la seguente grandezza:

$$Q(\omega) = \frac{1}{\tan \delta(\omega)} \quad (2.38)$$

5.7.2.3 Significato fisico di $\varepsilon_r'(\omega)$, $\varepsilon_r''(\omega)$ e $\tan \delta(\omega)$

Si supponga di applicare una tensione alternata ad un condensatore planare con elettrodi aventi area A e distanza z (Fig. 2.19):

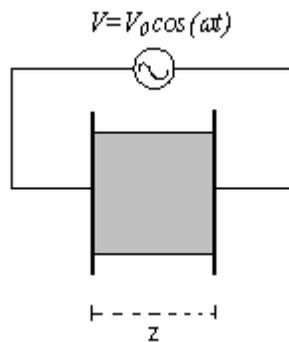


Fig. 2.19. Condensatore planare sollecitato in alternata.

Nel dielettrico si instaura pertanto un campo alternato del tipo:

$$E = \frac{V}{z} = E_0 \cos(\omega t) \quad (2.39)$$

Si definisce *capacità complessa* del condensatore planare la seguente grandezza:

$$C^*(\omega) = \varepsilon_r^*(\omega) C_0 \quad (2.40)$$

con $C_0 = \varepsilon_0 \frac{A}{z}$ capacità del condensatore avente come dielettrico il vuoto.

I fasori rotanti della tensione e della corrente relative al condensatore sono dati dalle seguenti espressioni:

$$\dot{V}(\omega, t) = V_0 e^{j\omega t} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned}
 \dot{i}(\omega, t) &= \frac{\dot{V}(\omega, t)}{1/C^*(\omega)j\omega} = C^*(\omega)j\omega\dot{V}(\omega, t) = \varepsilon_r^*(\omega)C_0j\omega\dot{V}(\omega, t) = \\
 &= j\omega C_0(\varepsilon_r'(\omega) - j\varepsilon_r''(\omega))\dot{V}(\omega, t) = \omega C_0(\varepsilon_r''(\omega) + j\varepsilon_r'(\omega))\dot{V}(\omega, t) = \\
 &= \omega C_0\varepsilon_r''(\omega)\dot{V}(\omega, t) + j\omega C_0\varepsilon_r'(\omega)\dot{V}(\omega, t)
 \end{aligned}
 \tag{2.42}$$

L'espressione del fasore della corrente è compatibile con un *circuito elettrico equivalente* costituito dal parallelo tra un resistore ed un condensatore ideali (Fig. 2.20).

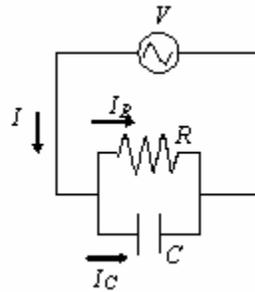


Fig. 2.20. Circuito elettrico equivalente per un condensatore con dielettrico con perdite per rilassamento dielettrico.

Tale circuito presenta la seguente ammettenza parallelo:

$$Y = \frac{1}{R} + j\omega C \tag{2.43}$$

e i seguenti fasori delle correnti:

$$\begin{cases} \dot{I}_R(\omega, t) = \frac{1}{R}\dot{V}(\omega, t) \\ \dot{I}_C(\omega, t) = j\omega C\dot{V}(\omega, t) \end{cases} \tag{2.44}$$

con:

$$\dot{I}(\omega, t) = \dot{I}_R(\omega, t) + \dot{I}_C(\omega, t) \tag{2.45}$$

Confrontando le espressioni di $\dot{I}_R(\omega, t)$ ed $\dot{I}_C(\omega, t)$ con quelle della parte reale ed immaginaria di $\dot{I}(\omega, t)$, si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{I}_R(\omega, t) = \omega C_0\varepsilon_r''(\omega)\dot{V}(\omega, t) \\ \dot{I}_C(\omega, t) = j\omega C_0\varepsilon_r'(\omega)\dot{V}(\omega, t) \end{cases} \tag{2.46}$$

Pertanto, valgono le seguenti espressioni:

Resistenza equivalente:

$$R(\omega) = \frac{1}{\omega C_0\varepsilon_r''(\omega)} \tag{2.47}$$

Conducibilità equivalente:

$$\sigma_{ac}(\omega) = \frac{1}{R(\omega)} \frac{z}{A} = \frac{1}{R(\omega)} \frac{\varepsilon_0}{C_0} = \omega \varepsilon_0 \varepsilon_r''(\omega) \quad (2.48)$$

Capacità equivalente:

$$C(\omega) = C_0 \varepsilon_r'(\omega) \quad (2.49)$$

Sussistono quindi le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \varepsilon_r'(\omega) = \frac{C(\omega)}{C_0} \\ \varepsilon_r''(\omega) = \frac{\sigma_{ac}(\omega)}{\omega \varepsilon_0} \end{cases} \quad (2.50)$$

Si noti che $\varepsilon_r'(\omega) > 1$ per ogni dielettrico diverso dal vuoto, mentre per il vuoto essa vale 1. Si sottolinea inoltre che poiché la componente I_R della corrente dissipa energia nel dielettrico mentre la componente I_C della corrente accumula energia nel dielettrico si ha che:

$$\tan \delta(\omega) = \frac{\varepsilon_r''(\omega)}{\varepsilon_r'(\omega)} = \frac{\text{Energia dissipata / ciclo}}{\text{Energia immagazzinata / ciclo}} \quad (2.51)$$

Come ulteriore osservazione, è utile mettere in evidenza che il modello elettrico equivalente proposto non è l'unico possibile. Ad esempio, da un punto di vista puramente concettuale, sarebbe possibile schematizzare il dielettrico anche con un resistore ed un condensatore in serie e determinare $\varepsilon_r'(\omega)$ e $\varepsilon_r''(\omega)$ in funzione della resistenza e capacità in serie. Tuttavia, il modello parallelo adottato è, pur nella sua semplicità, più indicativo delle effettive proprietà fisiche del sistema.

5.7.2.4 Modelli di rilassamento dielettrico

La prima trattazione teorica degli effetti del rilassamento dielettrico fu proposta da Debye. Il *modello di Debye* (non trattato in questa sede) porta alla formulazione della seguente espressione:

$$\varepsilon_r^*(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + j\omega\tau} \quad (2.52)$$

ossia:

$$\begin{cases} \varepsilon_r'(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{(1 + \omega^2\tau^2)} \\ \varepsilon_r''(\omega) = \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{(1 + \omega^2\tau^2)} \omega\tau \end{cases} \quad (2.53)$$

dove ϵ_s e ϵ_∞ rappresentano la costante dielettrica rispettivamente *statica* ($\epsilon_r' \rightarrow \epsilon_s$ per $\omega \rightarrow 0$) e ad *alta frequenza* ($\epsilon_r' \rightarrow \epsilon_\infty$ per $\omega \rightarrow \infty$), mentre τ è la costante di tempo di rilassamento dielettrico del materiale, alla quale corrisponde la frequenza caratteristica di rilassamento $f_r = 1/(2\pi\tau)$.

Un'espressione più accurata di quella relativa al modello di Debye si deve ai fratelli Cole, i quali introdussero nell'espressione della permittività dielettrica un esponente empirico α , dando luogo alla cosiddetta *equazione di Cole-Cole*:

$$\epsilon_r^*(\omega) = \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{1 + (j\omega\tau)^{(1-\alpha)}} \quad (2.54)$$

con $0 \leq \alpha < 1$. Si noti che per $\alpha=0$ si ritrova la legge di Debye.

Un'ulteriore modifica all'equazione di Debye è rappresentata dalla cosiddetta *equazione di Cole-Davidson*:

$$\epsilon_r^*(\omega) = \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{(1 + j\omega\tau)^\beta} \quad (2.55)$$

con $0 < \beta \leq 1$.

Applicando entrambe tali modifiche all'equazione originale di Debye, si ottiene la cosiddetta *equazione di Havriliak-Negami*:

$$\epsilon_r^*(\omega) = \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{[1 + (j\omega\tau)^{(1-\alpha)}]^\beta} \quad (2.56)$$

con $0 \leq \alpha < 1$ e $0 < \beta \leq 1$. I due esponenti α e β consentono di modificare la forma del rilassamento ed in particolare caratterizzano gli andamenti "di coda", ossia gli andamenti di alta e bassa frequenza rispetto alla frequenza del picco di ϵ_r'' . In particolare, l'esponente α controlla la larghezza del picco mentre β ne controlla l'asimmetria. Fissando i valori $\alpha=0$ e $\beta=1$ nell'Eq.(2.56) ritroviamo l'equazione di Debye. Lasciando libero α e fissando $\beta=1$, si ottiene l'equazione di Cole-Cole, una equazione fenomenologica utile per descrivere picchi di rilassamento molto allargati. Per β libero e $\alpha=0$ si trova l'equazione di Cole-Davidson, appropriata per rappresentare picchi asimmetrici (Fig. 2.21a). La rappresentazione dei valori di ϵ_r'' in funzione di ϵ_r' fornisce in generale il cosiddetto *diagramma di Cole-Cole*. Per l'equazione di Debye tale diagramma coincide con una semicirconfenza, che invece degenera in forme asimmetriche nel caso dell'equazione di Havriliak-Negami (Fig. 2.21b).

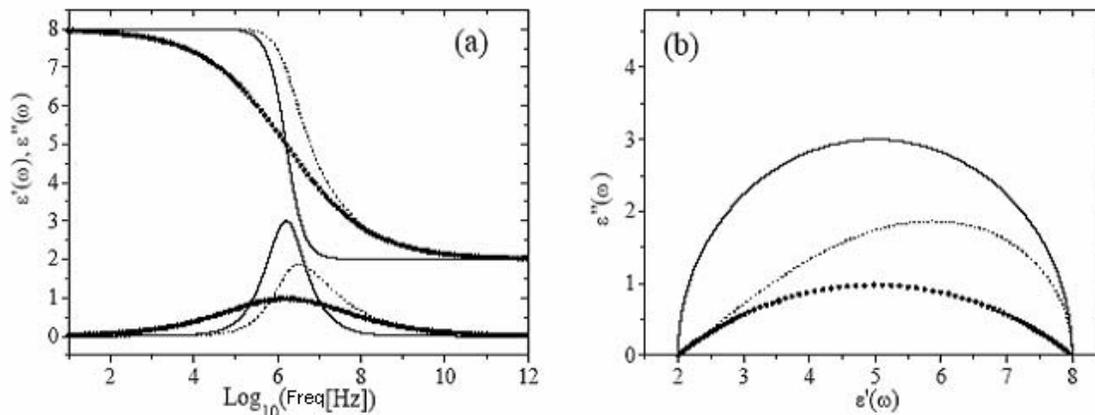


Fig. 2.21. (a) Andamento delle parti reale e immaginaria della permittività dielettrica in funzione della frequenza e (b) diagramma di Cole-Cole. In entrambe le figure, l'equazione di Debye è rappresentata da linee continue, mentre due esempi di applicazione dell'equazione di Havriliak-Negami corrispondono a cerchi pieni ($\alpha=0.6, \beta=1$) o linee tratteggiate ($\alpha=0, \beta=0.4$).

5.7.3 Dielettrici con perdite ohmiche

In un dielettrico reale eventuali cariche mobili possono essere accelerate dal campo elettrico applicato per essere trasportate all'interno del dielettrico. Tale effetto dà luogo ad una conducibilità in regime continuo σ_{dc} , così chiamata perché si manifesta anche in continua e non soltanto in regime sinusoidale, a differenza di quanto accade per la conducibilità $\sigma_{ac}(\omega)$ derivante da perdite per rilassamento dielettrico. Ne consegue che per un dielettrico con perdite ohmiche vale un *circuito elettrico equivalente* costituito dal parallelo tra un condensatore e un resistore avente resistenza R_0 indipendente dalla frequenza (Fig. 2.22):

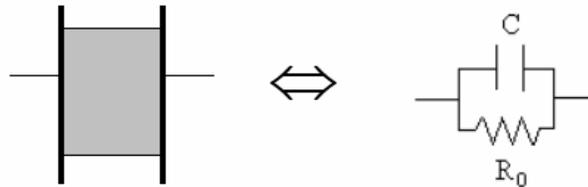


Fig. 2.22. Circuito elettrico equivalente per un dielettrico con perdite puramente ohmiche.

Indicando con z e A rispettivamente la distanza e l'area degli elettrodi, vale la relazione:

$$\sigma_{dc} = \frac{1}{R_0} \frac{z}{A} = \frac{\epsilon_0}{R_0 C_0} \quad (2.56b)$$

5.7.4 Dielettrici con perdite sia per rilassamento dielettrico sia ohmiche

Nel caso più generale, un dielettrico può presentare contemporaneamente perdite per rilassamento dielettrico e perdite ohmiche. Assumendo un circuito elettrico equivalente di tipo resistore-condensatore in parallelo, il resistore deve essere ritenuto a sua volta come il parallelo tra un resistore $R(\omega)$, derivante dalla schematizzazione delle perdite per puro rilassamento dielettrico, ed un resistore R_0 , derivante dalla schematizzazione delle perdite puramente ohmiche. La Fig. 2.23 mostra tale situazione.

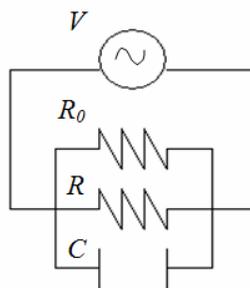


Fig. 2.23. Circuito elettrico equivalente per un dielettrico con perdite sia per rilassamento dielettrico, sia ohmiche.

La resistenza parallelo è data da:

$$R_{//}(\omega) = R(\omega) // R_0 = \frac{1}{\frac{1}{R(\omega)} + \frac{1}{R_0}} \quad (2.57)$$

Per tale dielettrico si introduce la cosiddetta *permittività (o permeabilità) dielettrica relativa complessa efficace*:

$$\varepsilon_{eff}^*(\omega) = \varepsilon_{eff}'(\omega) - j\varepsilon_{eff}''(\omega) \quad (2.58)$$

Eseguendo una trattazione analoga a quella condotta per il caso di perdite per puro rilassamento dielettrico, si ottengono le seguenti espressioni per la parte reale e quella immaginaria della permittività efficace:

$$\begin{cases} \varepsilon_{eff}'(\omega) = \frac{C}{C_0} \\ \varepsilon_{eff}''(\omega) = \frac{1}{R_{//}(\omega)\omega C_0} = \frac{1}{\omega C_0} \left(\frac{1}{R(\omega)} + \frac{1}{R_0} \right) \end{cases} \quad (2.59)$$

ossia:

$$\begin{cases} \varepsilon_{eff}'(\omega) = \varepsilon_r'(\omega) \\ \varepsilon_{eff}''(\omega) = \varepsilon_r''(\omega) + \frac{\sigma_{dc}}{\omega \varepsilon_0} \end{cases} \quad (2.60)$$

Vale quindi la seguente espressione generale:

$$\varepsilon_{eff}^*(\omega) = \varepsilon_r'(\omega) - j \left(\varepsilon_r''(\omega) + \frac{\sigma_{dc}}{\omega \varepsilon_0} \right) \quad (2.61)$$

ossia:

$$\varepsilon_{eff}^*(\omega) = \varepsilon_r'(\omega) - j \left(\frac{\sigma_{ac}(\omega) + \sigma_{dc}}{\omega \varepsilon_0} \right) \quad (2.62)$$

Si osservi che in tale caso generale la somma $\sigma_{ac} + \sigma_{dc}$ esprime la *conducibilità equivalente complessiva*.

5.7.5 Polarizzazione interfacciale

Il meccanismo della polarizzazione interfacciale, o *polarizzazione di Maxwell-Wagner*, è stato precedentemente introdotto per identificare fenomeni di polarizzazione che non dipendono dalla natura dielettrica del materiale, ma piuttosto dalla mobilità di alcune cariche mobili interne ad esso. Tali cariche tendono a migrare sotto l'influenza di un campo elettrico applicato, concentrandosi attorno a superfici di discontinuità della struttura. Su queste interfacce viene quindi a crearsi una differenza di potenziale, con conseguente alterazione della polarizzazione. In generale, gli effetti Maxwell-Wagner si manifestano in presenza di interfacce di tipo sia dielettrico/dielettrico che dielettrico/conduttore. Tali interfacce possono essere presenti a livello microscopico in

un ogni dielettrico reale. Esse, infatti, possono derivare dalla presenza ad esempio di regioni di non omogeneità o di impurezze. Entrambi tali fattori di discontinuità concorrono a modificare le proprietà dielettriche del materiale. In particolare, in prossimità di un'interfaccia tra due materiali dielettrici e/o conduttori, aventi differenti permittività e/o conducibilità, possono accumularsi cariche di polarizzazione ed eventualmente anche cariche libere, come descritto nel seguito.

5.7.5.1 *Interfaccia dielettrico/dielettrico*

Si consideri la raffigurazione schematica in Fig. 2.24 di un'interfaccia di separazione tra due dielettrici.

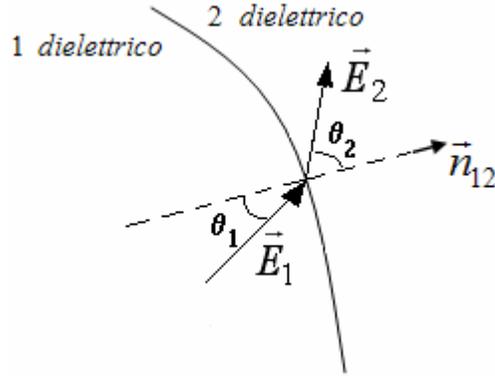


Fig. 2.24. Rappresentazione di un'interfaccia tra due dielettrici.

A seguito di una polarizzazione, sull'interfaccia di area A si stabilisce, come noto, almeno una *carica di polarizzazione* Q_{pol} . In particolare, Per tale interfaccia valgono le seguenti relazioni (valide sia nel caso di campi statici che nel caso di campi dinamici):

$$\frac{Q_{pol}}{A} = (\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \cdot \vec{n}_{12} = P_{1\perp} - P_{2\perp} = \epsilon_0(\epsilon'_{r1} - 1)E_{1\perp} - \epsilon_0(\epsilon'_{r2} - 1)E_{2\perp} \quad (2.63)$$

$$\frac{Q_{lib}}{A} = (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n}_{12} = D_{2\perp} - D_{1\perp} = \epsilon_0 \epsilon'_{r2} E_{2\perp} - \epsilon_0 \epsilon'_{r1} E_{1\perp} \quad (2.64)$$

$$E_{1\parallel} = E_{2\parallel} \Rightarrow E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2 \quad (2.65)$$

dove \vec{n}_{12} è il versore normale all'interfaccia, orientato dal mezzo 1 al mezzo 2 (Fig. 2.24).

Si osservi che nel caso in cui uno dei due dielettrici coincida con il vuoto, dall'Eq. (2.63) si ottiene la seguente espressione:

$$\frac{Q_{pol}}{A} = \vec{P} \cdot \vec{n} \quad (2.63b)$$

dove \vec{n} è il versore ortogonale all'interfaccia tra il determinato mezzo dielettrico e il vuoto, orientato nel verso uscente dal mezzo.

Si osservi inoltre che:

$$Q_{lib} = 0 \Leftrightarrow \epsilon'_{r2} E_{2\perp} = \epsilon'_{r1} E_{1\perp} \quad (2.66)$$

Condensatore planare contenente due strati dielettrici

Il risultato precedente può essere ricavato facilmente anche nella configurazione particolare costituita da un condensatore planare con armature di area A , contenente due dielettrici, ciascuno di uguale spessore $z/2$, separati da un'interfaccia parallela agli elettrodi (Fig. 2.25).

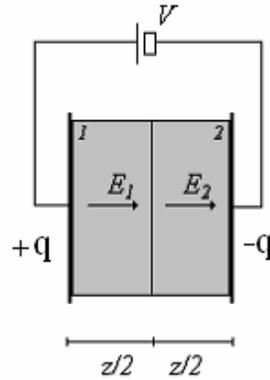


Fig. 2.25. Condensatore planare contenente due dielettrici di uguale spessore.

Applicando il teorema di Gauss si ottiene:

$$E_1 = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon'_{r1} A} \quad (2.67)$$

$$E_2 = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon'_{r2} A} \quad (2.68)$$

si evince quindi che:

$$\epsilon'_{r2} E_2 = \epsilon'_{r1} E_1 \quad (\text{cvd}) \quad (2.69)$$

Come osservazione, si ricorda che la *densità di energia elettrica (energia per unità di volume) immagazzinata nei due dielettrici* è data da:

$$u_1 = \frac{1}{2} \bar{D}_1 \cdot \bar{E}_1 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon'_{r1} E_1^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{\epsilon_0 \epsilon'_{r1} A^2} \quad (2.70)$$

$$u_2 = \frac{1}{2} \bar{D}_2 \cdot \bar{E}_2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon'_{r2} E_2^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{\epsilon_0 \epsilon'_{r2} A^2} \quad (2.71)$$

Si analizzano inoltre di seguito due casi particolari, corrispondenti a dielettrici aventi o meno una conducibilità in continua.

Caso I: Dielettrici con conducibilità in continua (perdite ohmiche)

In tal caso la configurazione ammette il circuito elettrico equivalente di Fig. 2.26.

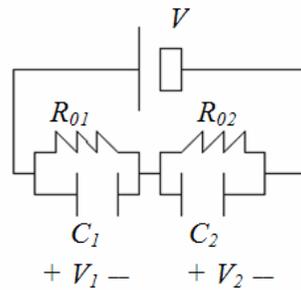


Fig. 2.26. Circuito elettrico equivalente per un condensatore planare con due dielettrici in serie.

Si ha in tal caso:

$$\begin{cases} \sigma_{dc1} = \frac{1}{R_{01}} \frac{z/2}{A} \\ \sigma_{dc2} = \frac{1}{R_{02}} \frac{z/2}{A} \end{cases} \quad (2.72)$$

ed inoltre:

$$\begin{cases} V_1 = \frac{R_{01}}{R_{01} + R_{02}} V = \frac{1/\sigma_{dc1}}{(1/\sigma_{dc1}) + (1/\sigma_{dc2})} V = \frac{\sigma_{dc2}}{\sigma_{dc1} + \sigma_{dc2}} V \\ V_2 = \frac{R_{02}}{R_{01} + R_{02}} V = \frac{1/\sigma_{dc2}}{(1/\sigma_{dc1}) + (1/\sigma_{dc2})} V = \frac{\sigma_{dc1}}{\sigma_{dc1} + \sigma_{dc2}} V \end{cases} \quad (2.73)$$

Pertanto:

$$\begin{cases} E_1 = \frac{V_1}{z/2} = \frac{\sigma_{dc2}}{\sigma_{dc1} + \sigma_{dc2}} \frac{V}{z/2} \\ E_2 = \frac{V_2}{z/2} = \frac{\sigma_{dc1}}{\sigma_{dc1} + \sigma_{dc2}} \frac{V}{z/2} \end{cases} \quad (2.74)$$

Quindi vale:

$$E_1 \sigma_{dc1} = E_2 \sigma_{dc2} \quad (2.74b)$$

Inoltre, applicando per tale configurazione il teorema di Gauss ad una superficie chiusa S di tipo parallelepipedo che includa l'interfaccia, di area A , tra i due dielettrici, si ottiene:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q_{lib} + Q_{pol}}{\epsilon_0} \quad (2.75)$$

ossia:

$$-E_1 + E_2 = \frac{Q_{lib} + Q_{pol}}{\epsilon_0 A} \quad (2.76)$$

Quindi, la somma della carica di polarizzazione e della carica libera presenti sull'interfaccia è data da:

$$Q_{lib} + Q_{pol} = \varepsilon_0 A \frac{\sigma_{dc1} - \sigma_{dc2}}{\sigma_{dc1} + \sigma_{dc2}} \frac{V}{z/2} \quad (2.77)$$

La carica di polarizzazione presente sull'interfaccia è data da:

$$\begin{aligned} \frac{Q_{pol}}{A} &= \varepsilon_0 (\varepsilon'_{r1} - 1) E_1 - \varepsilon_0 (\varepsilon'_{r2} - 1) E_2 = \frac{V}{z/2} \varepsilon_0 \left[(\varepsilon'_{r1} - 1) \frac{\sigma_{dc2}}{\sigma_{dc1} + \sigma_{dc2}} - (\varepsilon'_{r2} - 1) \frac{\sigma_{dc1}}{\sigma_{dc1} + \sigma_{dc2}} \right] = \\ &= \frac{V}{z/2} \varepsilon_0 \frac{\varepsilon'_{r1} \sigma_{dc2} - \sigma_{dc2} - \varepsilon'_{r2} \sigma_{dc1} + \sigma_{dc1}}{\sigma_{dc1} + \sigma_{dc2}} \end{aligned} \quad (2.78)$$

La carica libera presente sull'interfaccia può essere ottenuta sia come:

$$\frac{Q_{lib}}{A} = D_{2\perp} - D_{1\perp} \quad (2.79)$$

sia come:

$$\frac{Q_{lib}}{A} = \frac{Q_{lib} + Q_{pol}}{A} - \frac{Q_{pol}}{A} = \frac{V}{z/2} \varepsilon_0 \frac{-\varepsilon'_{r1} \sigma_{dc2} + \varepsilon'_{r2} \sigma_{dc1}}{\sigma_{dc1} + \sigma_{dc2}} \quad (2.80)$$

Quindi, per un'interfaccia tra due dielettrici con perdite ohmiche ($\sigma_{dc1}, \sigma_{dc2}$) si ha:

$$Q_{lib} \neq 0 \Leftrightarrow \varepsilon'_{r1} \sigma_{dc2} \neq \varepsilon'_{r2} \sigma_{dc1} \quad (2.81)$$

Tale carica può giungere sull'interfaccia grazie alla conducibilità (perdita) dei dielettrici.

Caso II: Dielettrici privi di conducibilità in continua

Nel caso in cui i due dielettrici non presentino una conducibilità in continua, il circuito elettrico equivalente di Fig. 2.26 si riduce a quello di Fig. 2.27.

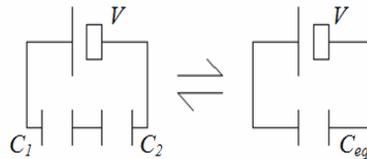


Fig. 2.27. Circuito elettrico equivalente per un condensatore planare con due dielettrici privi di conducibilità ohmica

Valgono dunque le seguenti espressioni:

$$\begin{cases} \sigma_{dc1} = 0 \\ \sigma_{dc2} = 0 \end{cases} \quad (2.82)$$

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad (2.82b)$$

$$q = C_{eq}V = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} V = \frac{A^2 \varepsilon_0^2 \left(\frac{\varepsilon'_{r1}}{z/2} \frac{\varepsilon'_{r2}}{z/2} \right)}{A \varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon'_{r1}}{z/2} + \frac{\varepsilon'_{r2}}{z/2} \right)} V = A \varepsilon_0 V \frac{\varepsilon'_{r1} \varepsilon'_{r2}}{\varepsilon'_{r1} z/2 + \varepsilon'_{r2} z/2} \quad (2.83)$$

$$\begin{cases} E_1 = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon'_{r1} A} = \frac{\varepsilon'_{r2}}{(\varepsilon'_{r1} + \varepsilon'_{r2})} \frac{V}{z/2} \\ E_2 = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon'_{r2} A} = \frac{\varepsilon'_{r1}}{(\varepsilon'_{r1} + \varepsilon'_{r2})} \frac{V}{z/2} \end{cases} \quad (2.84)$$

Si ricorda che per calcolare la *densità di energia elettrica* immagazzinata nei due dielettrici, alternativamente all'espressione $\frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$ è possibile usare le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{U_1}{Vol_1} = \frac{\frac{1}{2} C_1 V_1^2}{A z/2} = \frac{1}{2} \frac{1}{A z/2} \frac{q^2}{C_1} = \frac{1}{2} \frac{1}{A z/2} \frac{q^2}{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon'_{r1} A}{z/2}} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{\varepsilon_0 \varepsilon'_{r1} A^2} \\ u_2 = \frac{U_2}{Vol_2} = \frac{\frac{1}{2} C_2 V_2^2}{A z/2} = \frac{1}{2} \frac{1}{A z/2} \frac{q^2}{C_2} = \frac{1}{2} \frac{1}{A z/2} \frac{q^2}{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon'_{r2} A}{z/2}} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{\varepsilon_0 \varepsilon'_{r2} A^2} \end{cases} \quad (2.85)$$

5.7.5.2 Interfaccia dielettrico/conduttore

Si consideri un'interfaccia di area A di separazione tra un conduttore ed un dielettrico (Fig. 2.28).

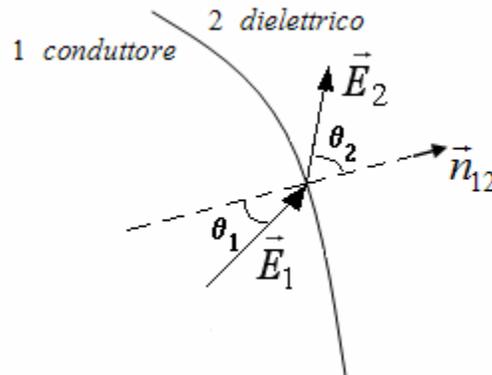


Fig. 2.28. Interfaccia tra un conduttore e un dielettrico.

Anche per tale tipo di interfaccia continuano a sussistere, da un punto di vista generale, le seguenti relazioni:

$$\frac{Q_{pol}}{A} = (\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \cdot \vec{n}_{12} = P_{1\perp} - P_{2\perp} = \varepsilon_0 (\varepsilon'_{r1} - 1) E_{1\perp} - \varepsilon_0 (\varepsilon'_{r2} - 1) E_{2\perp} \quad (2.86a)$$

$$\frac{Q_{lib}}{A} = (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n}_{12} = D_{2\perp} - D_{1\perp} = \varepsilon_0 \varepsilon'_{r2} E_{2\perp} - \varepsilon_0 \varepsilon'_{r1} E_{1\perp} \quad (2.86b)$$

$$E_{1\parallel} = E_{2\parallel} \Rightarrow E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2 \quad (2.86c)$$

dove \vec{n}_{12} è il versore normale all'interfaccia, orientato dal mezzo 1 al mezzo 2 (Fig. 2.28).

Se il dielettrico è omogeneo, isotropo e lineare vale (come ricavato in precedenza):

$$\frac{Q_{pol}}{A} = -\frac{\varepsilon'_{r2} - 1}{\varepsilon'_{r2}} \frac{Q_{lib}}{A} \quad (2.87)$$

Quindi, affinché sulla superficie di un dielettrico (diverso dal vuoto) in prossimità dell'interfaccia con un conduttore possa stabilirsi una carica di polarizzazione non nulla, è necessario che il conduttore presenti su tale interfaccia una carica libera non nulla. Quest'ultima può essere dovuta ad esempio ad un generatore di forza elettromotrice connesso al conduttore (come nel caso di un elettrodo in un condensatore) o ad una perdita ohmica del dielettrico. Inoltre si osserva che in condizione di campo nullo all'interno del conduttore ($E_I=0$) risulta:

$$\frac{Q_{pol}}{A} = (\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \cdot \vec{n}_{12} = -P_{2\perp} = -\varepsilon_0 (\varepsilon'_{r2} - 1) E_{2\perp} \quad (2.88)$$

Tale relazione è stata utilizzata nelle sezioni precedenti per determinare la densità superficiale di carica di polarizzazione per un dielettrico inserito tra le armature di un condensatore.

Ulteriori osservazioni risultano da una distinzione tra i casi di seguito riportati.

Caso I: Condizione di equilibrio elettrostatico

L'equilibrio elettrostatico è caratterizzato dall'assenza di moto delle cariche elettriche. In tali condizioni, il campo elettrico interno ad un conduttore è nullo e le eventuali cariche libere presenti su di esso si dispongono sempre sulla sua superficie, che diviene equipotenziale. Pertanto dalle Eq. (2.86) si ha:

$$E_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} E_{1\perp} = 0 \\ E_{2\parallel} = E_{1\parallel} = 0 \end{cases} \quad (2.89)$$

Il potenziale elettrico in tutti i punti del conduttore è costante e quindi anche la superficie di separazione fra i due mezzi è equipotenziale.

Caso II: Campi statici (condizione di regime stazionario)

Nel caso di campi statici, alle Eq. (2.86) si affianca una ulteriore condizione, relativa alla conservazione delle componenti normali del vettore densità di corrente elettrica ($\vec{J} = \sigma \vec{E}$):

$$(\vec{J}_2 - \vec{J}_1) \cdot \vec{n}_{12} = 0 \Rightarrow \sigma_1 E_1 \cos \theta_1 = \sigma_2 E_2 \cos \theta_2 \quad (2.90)$$

Pertanto, combinando le Eq. (2.86c) e (2.90) si ha:

$$\sigma_1 \tan \theta_2 = \sigma_2 \tan \theta_1 \quad (2.91)$$

Se il mezzo 1 è un buon conduttore (conduttore ideale) rispetto al dielettrico, ossia $\sigma_1/\sigma_2 \rightarrow \infty$, risulta $\theta_2 \rightarrow 0$. Quindi, il campo nel dielettrico tende ad orientarsi ortogonalmente alla superficie dell'interfaccia e il campo all'interno del conduttore tende ad avere componente parallela nulla (Eq. (2.86c)):

$$\sigma_1 / \sigma_2 \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} \vec{E}_2 \rightarrow E_{2\perp} \vec{n}_{12} \\ E_{1\parallel} \rightarrow 0 \end{cases} \quad (2.92)$$

Si ne deduce quindi che, in tale condizione, analogamente al caso precedente, il potenziale elettrico in tutti i punti del conduttore è costante e quindi la superficie di separazione fra i due mezzi è equipotenziale.

Caso III: Campi dinamici

In tale caso continuano a sussistere le relazioni relative al caso precedente. Tuttavia, poichè i campi dinamici implicano la presenza di *onde elettromagnetiche*, in tale caso risulta utile anticipare alcune considerazioni che saranno specificate nel seguito (capitolo 7). Si definisce *profondità di penetrazione* δ di un'onda elettromagnetica in un mezzo la distanza dalla sorgente del campo alla quale l'intensità di esso si riduce di un fattore $1/e$. Per un mezzo conduttore ideale, ossia per $\sigma_1 \rightarrow \infty$, si ha $\delta \rightarrow 0$. Se quindi un'onda elettromagnetica generata nel mezzo dielettrico 2 incide sulla superficie del mezzo conduttore ideale 1, essa non penetra all'interno del mezzo, ossia quest'ultimo ha un effetto schermante nei confronti dell'onda. Inoltre, per un mezzo conduttore reale caratterizzato da una conducibilità finita si ha il cosiddetto *effetto pelle*: la profondità di penetrazione di un'onda elettromagnetica incidente sul mezzo tende a diminuire all'aumentare della frequenza e l'onda tende quindi a rimanere sempre più confinata nella porzione superficiale (pelle) del mezzo.

5.7.5.3 Modello di Wagner di dielettrici con inclusioni conduttrici

Il modello di Wagner di dielettrici contenenti inclusioni conduttrici è un valido strumento di analisi delle proprietà dielettriche di tali tipi di mezzi, spiccatamente predisposti a subire polarizzazioni di tipo interfacciale. Si consideri un sistema costituito da sfere parzialmente conduttrici ($\epsilon'_{r2}, \sigma_{dc2}$) immerse, secondo una frazione volumetrica ν_2 , in una matrice dielettrica (ϵ'_{r1}) avente conducibilità trascurabile ($\sigma_{dc1} \ll \sigma_{dc2}$). Il *modello di Wagner* prevede la seguente espressione della permittività complessa relativa del materiale composito risultante:

$$\epsilon_r^* = \epsilon'_r - j\epsilon_r'' \quad (2.93)$$

con:

$$\begin{cases} \epsilon'_r = \epsilon'_{r\infty} \left(1 + \frac{k}{1 + \omega^2 \tau^2} \right) \\ \epsilon_r'' = \epsilon'_{r\infty} \left(\frac{k\omega\tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \right) \end{cases} \quad (2.94)$$

dove:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon'_{r\infty} = \varepsilon'_{r1} \left[1 + \frac{3v_2(\varepsilon'_{r2} - \varepsilon'_{r1})}{2\varepsilon'_{r1} + \varepsilon'_{r2}} \right] \\ k = \frac{9v_2\varepsilon'_{r1}}{2\varepsilon'_{r1} + \varepsilon'_{r2}} \\ \tau = \frac{\varepsilon_0(2\varepsilon'_{r1} + \varepsilon'_{r2})}{\sigma_{dc2}} \end{array} \right. \quad (2.95)$$

Confrontando tali espressioni con quelle relative al modello di Debye del rilassamento dielettrico, si osserva che la permittività dielettrica di un mezzo composito costituito da un dielettrico con inclusioni conduttrici mostra una dispersione in frequenza con caratteristiche analoghe a quelle dovute al rilassamento dielettrico. Può accadere pertanto che un dielettrico che non possieda un accentuato rilassamento, in realtà possa presentare ugualmente un effetto di rilassamento apparente, che in realtà è però dovuto a fenomeni di polarizzazione interfacciale in presenza delle inclusioni conduttrici.

Inoltre, si osserva che nel caso di inclusioni aventi permittività maggiore di quella della matrice dielettrica, la costante dielettrica del composito risulta accresciuta rispetto a quella della matrice. L'incremento inoltre aumenta al crescere del quantitativo di conduttore. Tale fenomeno è particolarmente evidente nel caso dei tessuti biologici, costituiti da mezzi tipicamente ricchi di acqua, come descritto nel capitolo 7. Si noti infine che la presenza delle inclusioni conduttrici accresce sia la parte reale che quella immaginaria della permittività; ciò significa che ad un aumento dell'energia immagazzinata corrisponde anche un aumento dell'energia persa per dissipazione.

5.7.5.4 Polarizzazione agli elettrodi

Nel caso in cui l'interfaccia su cui il fenomeno di polarizzazione interfacciale si manifesta non sia interna al materiale, bensì corrisponda alla regione di contatto tra la sua superficie e un elettrodo che applica il campo elettrico, il fenomeno prende il nome particolare di *polarizzazione agli elettrodi*. Un campione dielettrico inserito tra le armature di un condensatore non risulta "perfettamente connesso" agli elettrodi; pertanto, si possono presentare fenomeni legati a meccanismi di polarizzazione interfacciale, derivanti dalla inevitabile imperfezione del contatto elettrodo/materiale. Infatti, tale imperfezione implica l'esistenza di uno strato interfacciale (elettrodo/materiale) che presenta un'alta impedenza elettrica, specialmente a bassa frequenza, in quanto tipicamente dovuta alla formazione di capacità parassite tra l'elettrodo e il materiale polarizzato. Durante la misura della permittività, la capacità complessiva misurata può risultare notevolmente accresciuta. Pertanto, la permittività dielettrica misurata (apparente) può essere molto maggiore di quella effettiva, propria del materiale, ossia la misura può risultare "falsata". Per ridurre gli effetti di tale inconveniente, è buona norma metallizzare, preventivamente, le superfici del campione di materiale di cui si vuole misurare la permittività.

Riferimenti bibliografici

[1] Blythe A. R., *Electrical properties of polymers*, Cambridge: Cambridge University Press (1979).