

Si consideri il sistema in figura che rappresenta una guida lineare vincolata a ruotare attorno all'asse verticale r passante per uno dei suoi due estremi ed inclinata in modo tale da formare con il piano orizzontale un angolo costante α . Sulla guida è vincolata a rotolare una piccola sfera uniforme di massa m , raggio R e momento di inerzia rispetto ad uno degli assi principali baricentrici pari a J . Il suo moto relativo rispetto alla guida è caratterizzato da fenomeni di attrito di rotolamento e resistenza all'avanzamento rispettivamente modellabili tramite i coefficienti β e μ . Tramite un motore è possibile fornire una coppia di controllo τ attorno all'asse r , rispetto al quale la guida ha momento di inerzia I . La dinamica del sistema è descritta dalle seguenti equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} (I + md^2 \cos^2 \alpha) \ddot{\theta} + b\dot{\theta} + 2mdd\dot{\theta} \cos^2 \alpha &= \tau \\ \left(m + \frac{J}{R^2}\right) \ddot{d} - md\dot{\theta}^2 \cos^2 \alpha + mg \sin \alpha + \left(\mu + \frac{\beta}{R^2}\right) \dot{d} &= -F_d \sin \alpha \end{aligned}$$

dove d è la distanza (misurabile tramite un opportuno sensore) del centro di massa della sfera dall'estremo vincolato della guida; g è il modulo dell'accelerazione di gravità; F_d è una forza di disturbo agente sulla sfera in direzione verticale verso il basso.

- 1 Si determinino tutte le condizioni di equilibrio del sistema in funzione della generica distanza $d = \bar{d}$, considerando nullo il disturbo F_d . Si discuta inoltre il risultato ottenuto in funzione dell'inclinazione α della guida rispetto all'orizzontale e se ne fornisca un'interpretazione dal punto di vista fisico.
- 2 Si determini una rappresentazione del sistema linearizzato in forma di stato attorno alla configurazione di equilibrio corrispondente a valori positivi della coppia τ .
- 3 Si considerino i seguenti valori numerici per i parametri del modello: $\bar{d} = 0.4 \text{ m}$, $m = 10 \text{ kg}$, $I = 120 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $J = 0.04 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $R = 0.1 \text{ m}$, $\alpha = 0.436 \text{ rad}$, $b = 10 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{rad}^{-1}$, $\mu = 0.2 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$, $\beta = 0.1 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}$, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.
 - Si scrivano le matrici numeriche del sistema linearizzato in forma di stato;
 - si ricavano le funzioni di trasferimento tra gli ingressi (di controllo τ e di disturbo F_d) e l'uscita d ;
 - si discuta circa la stabilità del sistema.

Verificare che le funzioni di trasferimento abbiano approssimativamente la forma

$$\begin{aligned} G(s) &= 1.37 \cdot 10^{-2} \frac{1}{(s + 3.05)(s - 2.32)(s + 0.09)} \\ G_d(s) &= -3.02 \cdot 10^{-2} \frac{(s + 0.08)}{(s + 3.05)(s - 2.32)(s + 0.09)} \end{aligned}$$

in caso negativo, per i punti successivi, è possibile utilizzare le funzioni di trasferimento qui fornite.

4 Si sintetizzi un controllore stabilizzante che, agendo sull'ingresso τ , e considerando condizioni iniziali per il sistema pari a quelle di equilibrio, rispetti le seguenti specifiche:

- si desidera che, imposto un riferimento a rampa del tipo $d(t) = 0.1t$ [m], l'inseguimento si rifletta a regime in un errore massimo di posizione di 0.1 m. Si desidera inoltre che sia in grado di portare la sfera esattamente ad una distanza $d = 1.4$ m senza mai superare la distanza di 1.7 m dall'estremo vincolato. Si desidera infine che, trascorsi 5 s, la distanza d entri, senza più uscirne, nell'intervallo $[1.35, 1.45]$ m.
- A fronte di una forza di disturbo $F_d(t) = \sin(\omega_d t)$ [N] con $\omega_d < 0.01$ rad/s, le oscillazioni indotte sulla quota d siano caratterizzate da un'ampiezza minore di 0.001 m.
- In presenza di un rumore di misura caratterizzato da pulsazioni $\omega_\nu > 120$ rad/s, si richiede che l'ampiezza dell'effetto sull'uscita sia inferiore allo 1% del rumore stesso.

Si riportino quindi, giustificando opportunamente tutti i passaggi:

- le specifiche tradotte nel dominio della frequenza e visualizzate sul diagramma di Bode,
- il procedimento di progettazione del controllore illustrato con diagrammi a blocchi,
- la funzione di trasferimento del controllore progettato,
- i diagrammi di Bode delle funzioni di trasferimento nelle diverse fasi del progetto (mostrando il raggiungimento delle specifiche),
- la risposta al gradino del sistema controllato riportando le caratteristiche più significative.

Al fine di valutare quanto svolto al computer lo studente deve salvare ogni progetto del controllore effettuato con sisotool attraverso il comando "Save Session" che si trova nel sisotool stesso. Il nome del file da salvare deve essere nella forma CognomeMatricola_i.mat con "i" numero del controllore progettato. Il numero del controllore progettato deve essere coerente con quanto scritto nel foglio.

I file ottenuti devono essere inviati al docente del corso:

- Teoria dei sistemi: matteo.bianchi@centropiaggio.unipi.it
- Fondamenti di automatica: riccardo.costanzi@unipi.it

La versione elettronica del controllore verrà considerata solo nel caso di corrispondenza con quanto scritto nel foglio e pertanto NON sostituisce la descrizione cartacea del progetto del controllore richiesta nel compito.

Nota: Si riportino tutti i risultati numerici con almeno 3 cifre significative

- 1 Gli equilibri del sistema si ottengono imponendo $d = \bar{d}$ costante e quindi $\ddot{d} = \dot{d} = 0$ oltre a $\ddot{\theta} = 0$ e $F_d = 0$. Si ottiene così il sistema seguente, valutato per le condizioni di equilibrio $\dot{d}\bar{\theta}$ e $\bar{\tau}$ e $\bar{\tau}$:

$$\begin{aligned} b\bar{\theta} &= \bar{\tau} \\ -m\bar{d}\bar{\theta}^2 \cos^2 \alpha + mg \sin \alpha &= 0 \end{aligned}$$

Risolviendo il sistema di secondo grado nelle variabili incognite $\bar{\theta}$ e $\bar{\tau}$ si ottengono le espressioni seguenti in funzione di \bar{d} :

$$\begin{aligned} 1) \quad \bar{\theta}_1 &= \sqrt{\frac{g \sin \alpha}{\bar{d} \cos^2 \alpha}} & \bar{\tau}_1 &= b\sqrt{\frac{g \sin \alpha}{\bar{d} \cos^2 \alpha}} \\ 2) \quad \bar{\theta}_2 &= -\sqrt{\frac{g \sin \alpha}{\bar{d} \cos^2 \alpha}} & \bar{\tau}_2 &= -b\sqrt{\frac{g \sin \alpha}{\bar{d} \cos^2 \alpha}} \end{aligned}$$

Le due configurazioni di equilibrio corrispondono ai due moti di rotazione opposti attorno all'asse azionato tali per cui la forza centrifuga e la forza peso agenti sulla sferetta si bilanciano lungo la direzione della guida stessa. Come è possibile aspettarsi dall'esperienza, per valori di α negativi non esistono condizioni di equilibrio, infatti in tal caso le proiezioni di forza peso e forza centrifuga lungo la guida hanno lo stesso verso. Per $\alpha = 0$ (condizione di guida orizzontale) esiste un'unica condizione di equilibrio corrispondente ad una velocità di rotazione nulla. Per valori di α positivi minori di $\frac{\pi}{2}$ esistono due configurazioni di equilibrio distinte, mentre per $\alpha = \frac{\pi}{2}$ non esiste configurazione di equilibrio. Le espressioni analitiche ricavate confermano questa analisi, infatti per $\alpha = \frac{\pi}{2}$ si verifica l'annullamento dei denominatori nelle espressioni individuate.

- 2 Indicando con x il vettore di stato del sistema, vale a dire $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T := [d \ \dot{\theta} \ \ddot{d}]^T$, e con $u := [\tau \ F_d]^T$ il vettore degli ingressi, la dinamica del sistema non lineare espressa in forma di stato risulta:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{I + m\bar{x}_1^2 \cos^2 \alpha} (\tau - bx_2 - 2mx_1x_2x_3 \cos^2 \alpha) \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{m + \frac{J}{R^2}} \left(-F_d \sin \alpha - mg \sin \alpha + mx_1x_2^2 \cos^2 \alpha - \left(\mu + \frac{\beta}{R^2} \right) x_3 \right) \end{aligned}$$

$$y = x_1$$

Definendo le nuove variabili $\tilde{x} := x - \bar{x}$, $\tilde{u} := u - \bar{u}$ e $\tilde{y} := y - \bar{y}$, una approssimazione al primo ordine (lineare) del sistema dato risulta:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + B\tilde{u} \\ \tilde{y} &= C\tilde{x} + D\tilde{u} \end{cases}$$

con $A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}}$, $B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}}$, $C = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}}$, $D = \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b}{I+m\bar{x}_1^2 \cos^2 \alpha} & -\frac{2m\bar{x}_1\bar{x}_2 \cos^2 \alpha}{I+m\bar{x}_1^2 \cos^2 \alpha} \\ \frac{m\bar{x}_2^2 \cos^2 \alpha}{m+\frac{J}{R^2}} & \frac{2m\bar{x}_1\bar{x}_2 \cos \alpha}{m+\frac{J}{R^2}} & -\frac{\mu+\frac{\beta}{R^2}}{m+\frac{J}{R^2}} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{I+m\bar{x}_1^2 \cos^2 \alpha} & 0 \\ 0 & -\frac{\sin \alpha}{m+\frac{J}{R^2}} \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \ 0 \ 0]$$

$$D = [0 \ 0]$$

- 3 Sostituendo i valori numerici per le variabili coinvolte, si ottengono le seguenti espressioni (con le opportune unità di misura):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.0824 & -0.192 \\ 7.403 & 1.667 & -0.729 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8.24 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & -0.0302 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0 \quad 0]$$

$$D = [0 \quad 0]$$

Indicando con B_τ e D_τ la prima colonna delle matrici B e D , corrispondenti all'ingresso τ , e con B_d e D_d la seconda colonna, corrispondenti all'ingresso di disturbo F_d , le funzioni di trasferimento cercate si possono ottenere calcolando:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B_\tau + D_\tau = \frac{0.0137}{(s + 3.049)(s - 2.324)(s + 0.08614)}$$

$$G_d(s) = C(sI - A)^{-1}B_d + D_d = -\frac{0.030187(s + 0.08243)}{(s + 3.049)(s - 2.324)(s + 0.08614)}$$

La funzione di trasferimento del sistema presenta 1 polo a parte reale positiva. Questo permette di concludere che il sistema è instabile.

- 4 Per quanto riguarda il controllore è opportuno procedere alla progettazione di un sistema in cascata con doppio anello di retroazione - l'anello interno con il solo scopo di stabilizzare il sistema, l'anello esterno con lo scopo di soddisfare le specifiche richieste.

Si procede alla progettazione lavorando sul luogo delle radici; la forma del luogo ottenuto dalla funzione di trasferimento del sistema è riportato in figura 1 Un possibile approccio (quello più immediato) per la

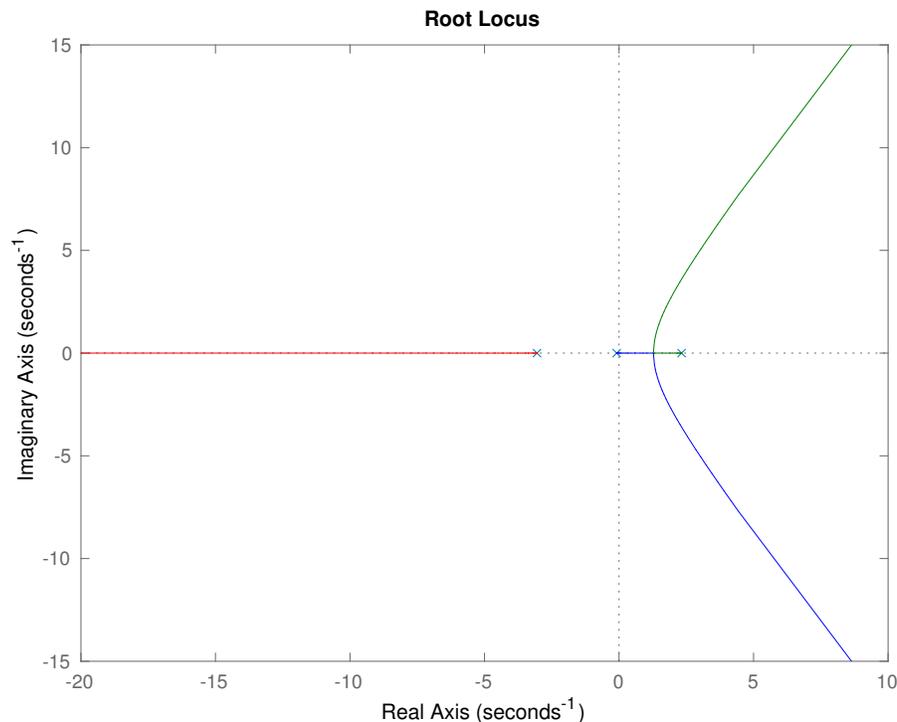


Figura 1: rlocus(G)

progettazione di un controllore stabilizzante è basato sull'inserimento di una rete anticipatrice e su un tuning opportuno del valore di guadagno per assicurare che i poli del sistema in anello chiuso appartengano al semipiano di asintotica stabilità. Un esempio (zero in $s = -0.15$, polo in $s = -100$) è quello riportato in figura 2 (dettaglio in figura 3)

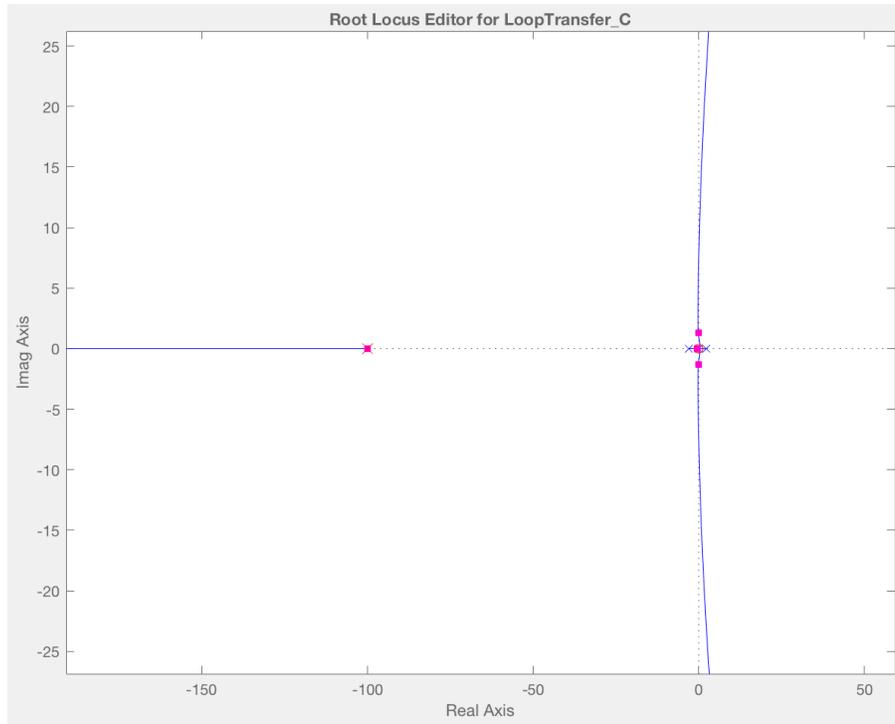


Figura 2: rlocus(G_{c1}) - con controllore

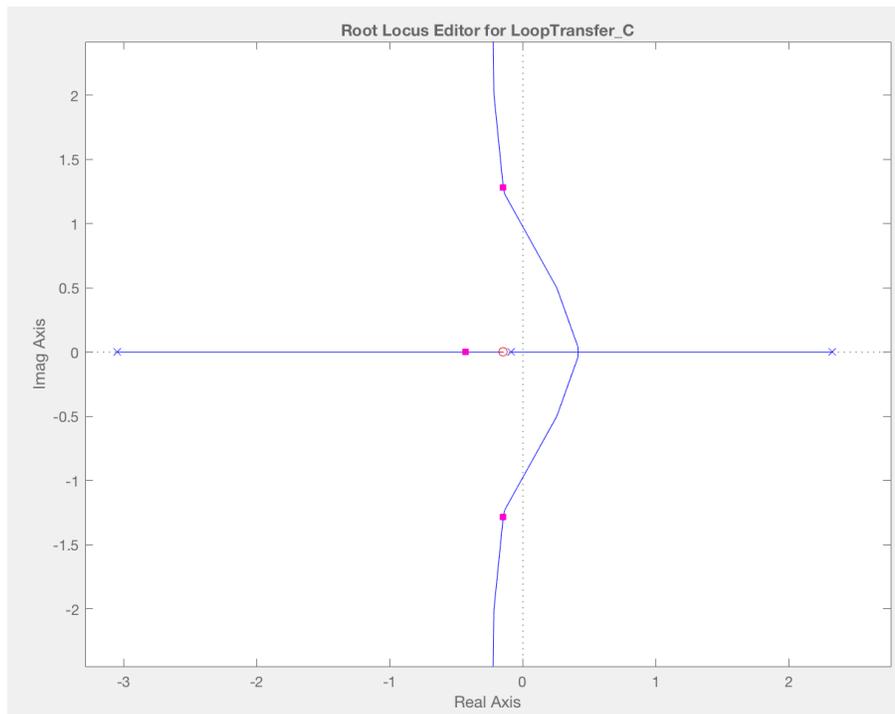


Figura 3: Dettaglio rlocus(G_{c1}) - con controllore

Il controllore risultante ha quindi la seguente espressione: $C_1(s) = 64245 \frac{s+0.15}{s+100}$. Adesso, è possibile procedere alla progettazione del controllore $C_2(s)$ per il soddisfacimento delle specifiche, con una funzione di trasferimento dell'anello interno pari a

$$G_{c1}(s) = \frac{C_1(s)G(s)}{1+C_1(s)G(s)} = 882.97 \frac{s+0.15}{(s+100.1)(s+0.4282)(s^2+0.294s+1.666)}$$

e con una funzione di trasferimento tra il disturbo e l'uscita pari a

$$G_{dc1}(s) = \frac{G_d(s)}{1+C_1(s)G(s)} = -0.030187 \cdot \frac{(s+0.08243)(s+100)}{(s+100.1)(s+0.4282)(s^2+0.294s+1.666)}$$

4.1 Si procede anzitutto a progettare un controllore che consenta di soddisfare le specifiche relative alla risposta al gradino. Si chiede che il sistema, partendo da una condizione di equilibrio pari a $\bar{d} = 0.4 m$, sia portato ad una uscita pari a $d_\infty = 1.4 m$, vale a dire un'ampiezza del gradino pari a $1 m$:

- si richiede che a fronte di riferimento a rampa corrispondente ad una velocità costante di $0.1 m/s$, l'errore massimo sulla posizione risulti, a regime, minore di $0.1 m$ che si traduce in richiedere un tipo t del sistema in anello (esterno) aperto maggiore o uguale a 1 e, nel caso di $t = 1$ un guadagno di velocità $k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sC_2(s)G_{c1}(s)$ che risulti tale da soddisfare $1/k_v < 1$ e quindi $k_v > 1$ corrispondente ad un vincolo sul guadagno di velocità espresso in dB pari a $\|k_v\|_{dB} > 0dB$. Si richiede inoltre che il valore di posizione desiderato $d_\infty = 1.4 m$ venga raggiunto esattamente, corrispondente a richiedere un tipo t del sistema in anello (esterno) aperto maggiore o uguale a 1. Le specifiche (statiche) per il sistema in anello (esterno) aperto possono essere sintetizzate in $\mathbf{t} = \mathbf{1}$ e $\|\mathbf{k}_v\|_{dB} > \mathbf{0dB}$.
- si richiede che il valore desiderato venga raggiunto senza mai superare la distanza di $d_{max} = 1.7 m$ dal suolo \Rightarrow è ammessa sovraelongazione pari a $S\% = \frac{|d_{max}-d_\infty|}{|d_\infty-\bar{d}|} \cdot 100 = \frac{0.3}{1} \cdot 100 = 30\%$. Secondo tale condizione il sistema in anello chiuso può essere approssimato da un sistema del secondo ordine (approssimazione a due poli dominanti) con smorzamento minimo ammissibile ottenuto invertendo la relazione $S = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$.

$$d > \sqrt{\frac{(\ln(S))^2}{\pi^2 + (\ln(S))^2}} \Rightarrow d > 0.357$$

Questo si traduce in una condizione sul margine di fase minimo, secondo la relazione approssimata:

$$M_f > 0.357 \cdot 100 \Rightarrow \mathbf{M_f} > \mathbf{35.7^\circ}$$

- si richiede inoltre che la distanza d dal suolo entri entro $5 s$, senza più uscirne, nell'intervallo $[1.35, 1.45]m$. Si tratta di una specifica sul tempo di assestamento al $p\% = \frac{1.45-1.4}{1} 100 = 5\%$ (considerando l'altro estremo dell'intervallo assegnato si ottiene lo stesso valore $p\% = \frac{1.4-1.35}{0.1} 100 = 5\%$) che si traduce in una specifica sulla pulsazione di taglio $\omega_t \geq \frac{3}{5 \cdot 0.357} \Rightarrow \omega_t \geq \mathbf{1.68 rad/s}$

4.2 Una volta chiuso anche l'anello esterno, l'uscita è legata al disturbo dalla funzione di trasferimento

$$\frac{Y(s)}{F_d(s)} = \frac{G_{dc1}(s)}{1 + C_2(s)G_{c1}(s)}$$

Secondo il teorema della risposta armonica, la specifica è assicurata se per le pulsazioni di interesse $\omega_d < 0.01 rad/s$, è rispettato il seguente vincolo sul modulo della funzione di trasferimento $\frac{Y(s)}{F_d(s)}$.

$$\frac{\|G_{dc1}(j\omega_d)\|}{\|1 + C_2(j\omega_d)G_{c1}(j\omega_d)\|} < \frac{10^{-3}}{1} \Rightarrow \frac{\|G_{dc1}(j\omega_d)\|}{\|1 + C_2(j\omega_d)G_{c1}(j\omega_d)\|} < 10^{-3}$$

Essendo a bassa frequenza, vale l'approssimazione $\|1 + C_2(j\omega_d)G_{c1}(j\omega_d)\| \approx \|C_2(j\omega_d)G_{c1}(j\omega_d)\|$; possiamo quindi tradurre la specifica in un vincolo sul modulo della funzione di trasferimento di anello aperto, infatti, passando ad esprimere i moduli in decibel, otteniamo:

$$\|C_2(j\omega_d)G_{c1}(j\omega_d)\|_{dB} > \|G_{dc1}(j\omega_d)\|_{dB} - 20\log_{10}(10^{-3})$$

dal diagramma di Bode del modulo della funzione di trasferimento $G_{dc1}(s)$ per le pulsazioni di interesse (figura 4) si ricava il valore ($-49.1dB$) che massimizza il modulo considerato, e quindi, la condizione che permette di soddisfare la specifica risulta:

$$\|C_2(j\omega_d)G_{c1}(j\omega_d)\|_{dB} > -49.1dB + 60dB \Rightarrow \mathbf{\|C_2(j\omega_d)G_{c1}(j\omega_d)\|_{dB} > 10.9dB}$$

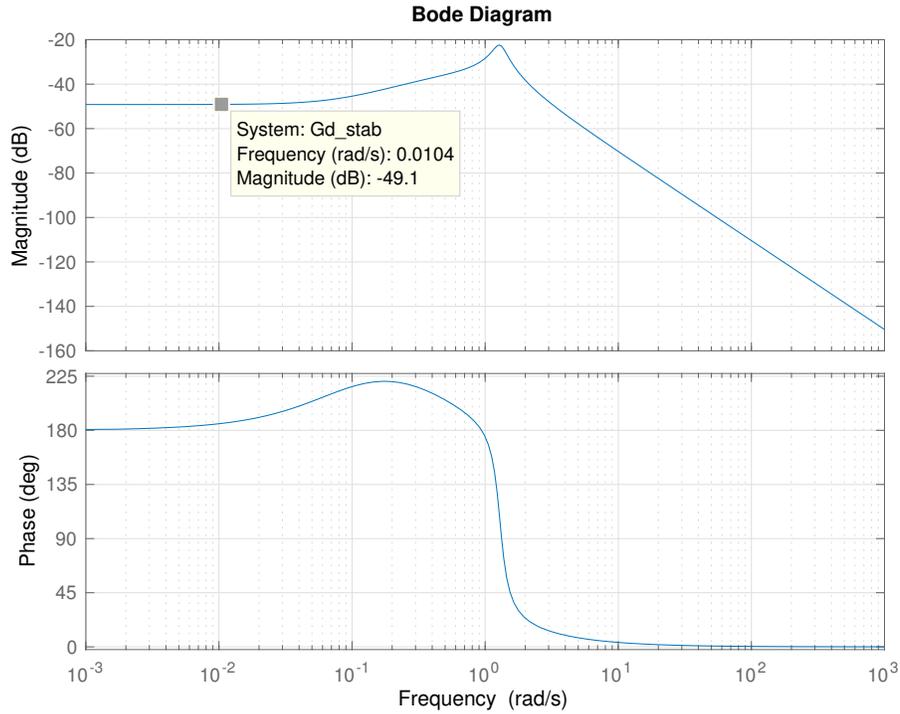


Figura 4: bode(G_{dc1})

4.3 L'uscita è legata al rumore di misura dalla funzione di sensitività complementare, cambiata di segno:

$$\frac{Y(s)}{\nu(s)} = -\frac{C_2(s)G_{c1}(s)}{1 + C_2(s)G_{c1}(s)}$$

Per un disturbo in alta frequenza $\omega_\nu > 120$ rad/s, vale l'approssimazione

$$\left\| \frac{Y(j\omega_\nu)}{\nu(j\omega_\nu)} \right\| \approx \|C_2(j\omega_\nu)G_{c1}(j\omega_\nu)\|$$

per cui, detta A_N l'ampiezza del rumore di misura, la specifica si traduce in

$$\|C(j\omega_\nu)G_1(j\omega_\nu)\| < \frac{0.01A_N}{A_N} = 0.01$$

o, in decibel, -40 dB.

Si noti che la conoscenza dell'ampiezza A_N sarebbe superflua.

Una volta tradotte tutte le specifiche, riportate sul diagramma di Bode in figura 5, è possibile procedere al progetto del controllore.

Per il soddisfacimento delle specifiche statiche è necessario inserire un polo nell'origine ed aumentare il guadagno del controllore fino ad ottenere il diagramma di Bode di figura 6, corrispondente a $C_{2statiche}(s) = \frac{0.89}{s}$.

Per il soddisfacimento della specifica sul margine di fase è opportuno inserire due zeri prima della pulsazione di taglio in modo da avere un aumento sufficiente della fase. Ottenendo il diagramma di Bode di figura 7, corrispondente a $C_{2staticheMf}(s) = 0.89 \frac{(s+1)^2}{s}$.

Infine, per soddisfare la specifica sulla reiezione del rumore di misura ad alta frequenza e per rendere il controllore CAUSALE, occorre aggiungere un polo dopo la frequenza di taglio. Ottenendo il diagramma di Bode di figura 8, corrispondente a $C_{2finale}(s) = 17.80 \frac{(s+1)^2}{s(s+20)}$.

La risposta a gradino del sistema controllato con il controllore proposto $C_{2finale}(s) = 17.80 \frac{(s+1)^2}{s(s+20)}$ risulta essere come quella riportata in figura 9. Analizzando la figura 9 si può notare che l'overshoot (sovraelevazione) massimo del sistema controllato risulta essere del 16.9% (da specifica doveva essere inferiore al 30%) e che il settling time (tempo di assestamento) è di 4.11s (da specifica doveva essere inferiore a 5s).

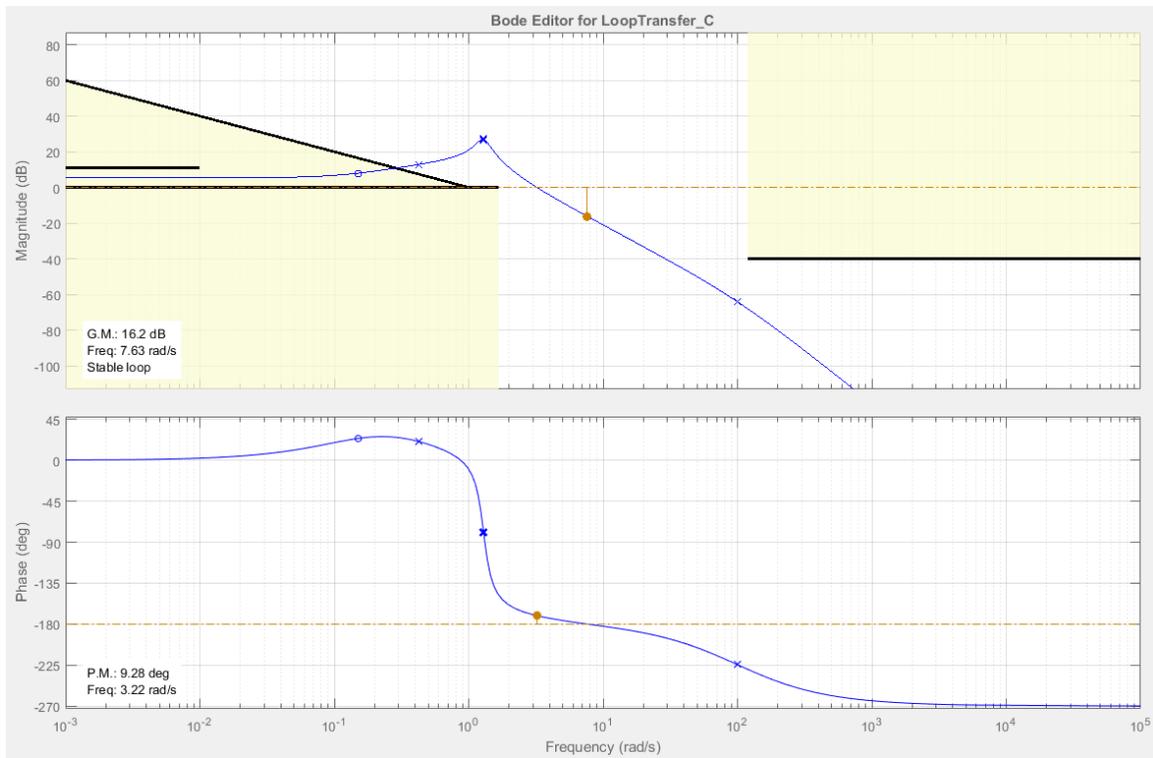


Figura 5: Diagramma di Bode di $G_{c1}(s)$ con specifiche richieste

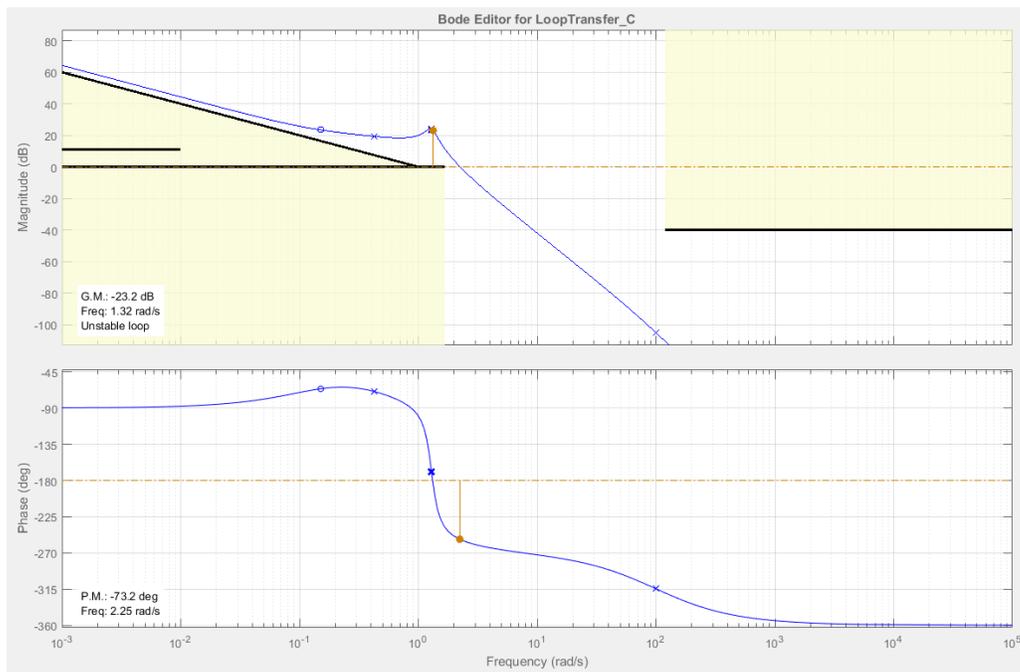


Figura 6: Diagramma di Bode del sistema controllato per il soddisfacimento delle specifiche statiche

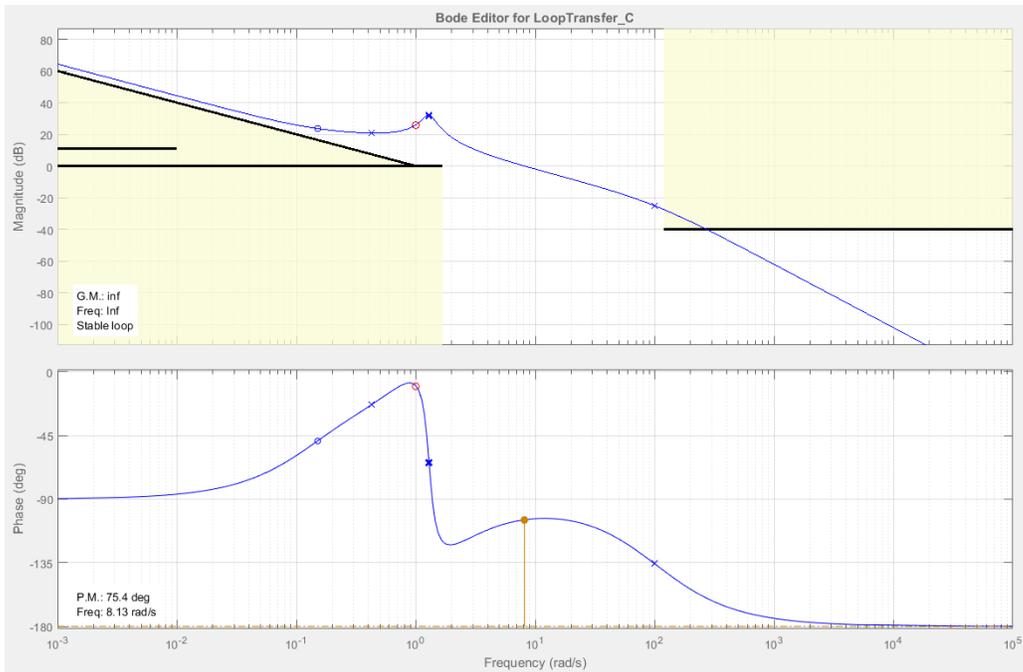


Figura 7: Diagramma di Bode del sistema controllato per il soddisfacimento delle specifiche statiche e del margine di fase

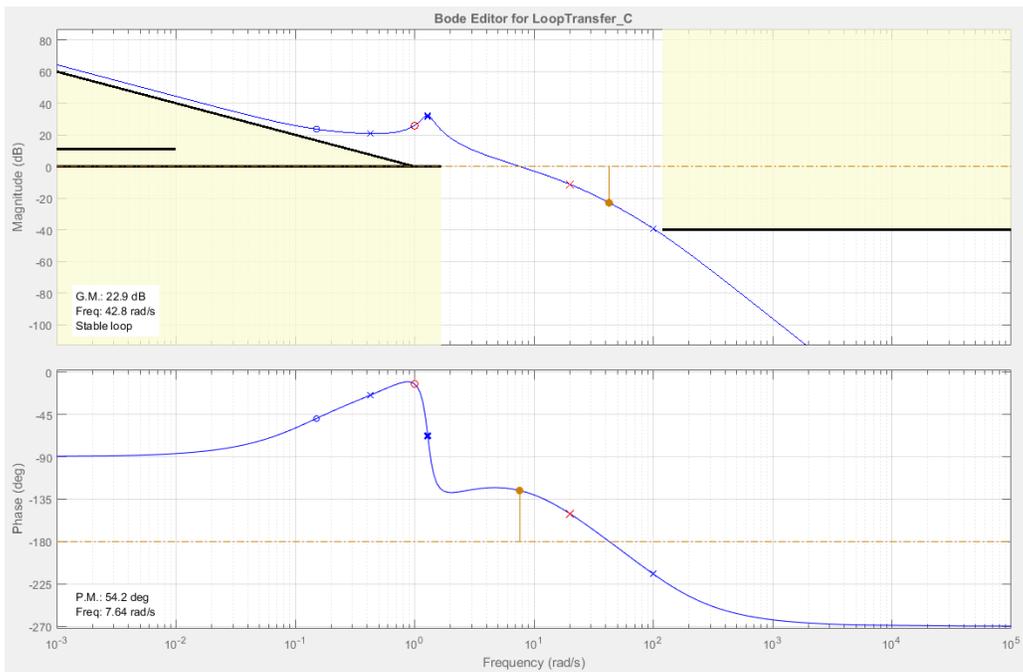


Figura 8: Diagramma di Bode del sistema controllato per il soddisfacimento di tutte le specifiche e della causalità del controllore

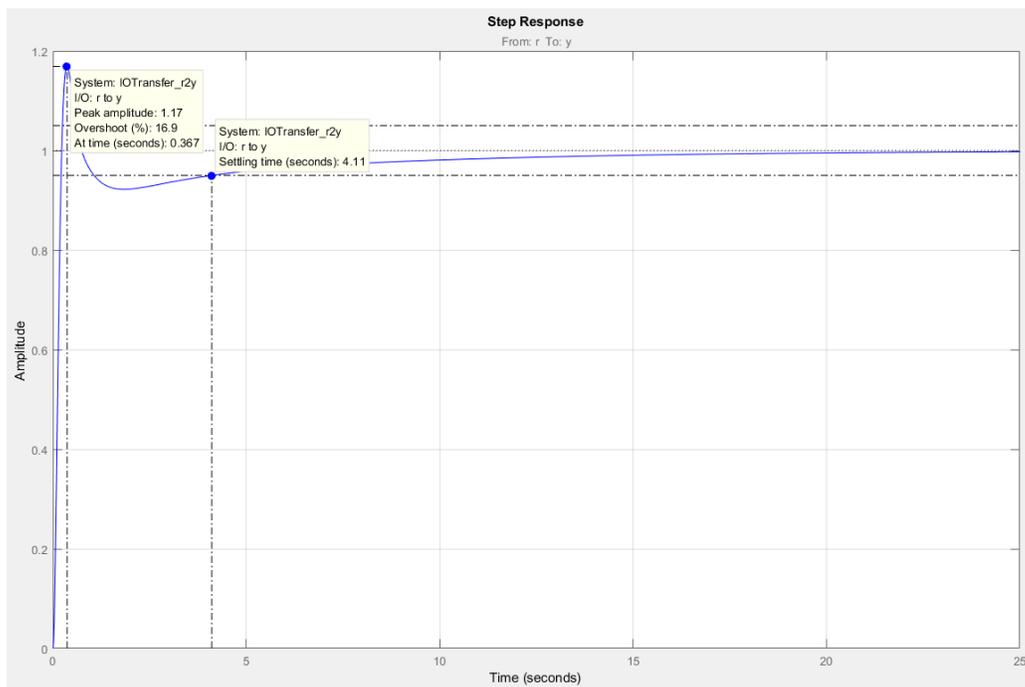


Figura 9: Risposta al gradino del sistema controllato con evidenziate l'overshoot (sovravelongazione) massimo e il settling time (tempo di assestamento)