

Si consideri il sistema meccanico rappresentato in figura 1.

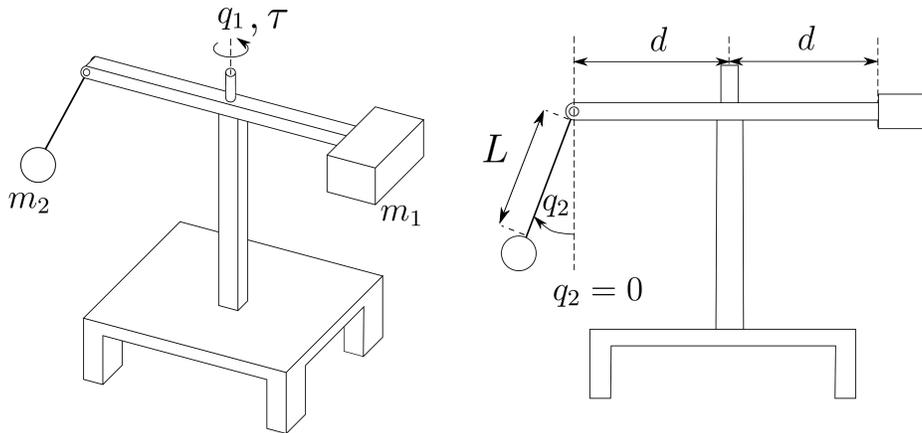


Figura 1: Schema di una fionda a rotazione

La Fig.1 rappresenta lo schema meccanico di una fionda a rotazione a due gradi di libertà.

Un corpo sferico di massa  $m_2$  viene posto al termine di un'asticella di lunghezza  $L$  collegata tramite una cerniera ad una barra orizzontale di lunghezza  $2d$ ; entrambe le aste si considerano indeformabili e di massa ed inerzia trascurabili. Al capo opposto della barra è altresì presente una massa di contrappeso  $m_1$ .

La barra è posta in rotazione rispetto al suo punto medio tramite una coppia  $\tau$  ed è soggetta ad uno smorzamento viscoso cubico di coefficiente  $b$ .

La posizione angolare della barra è detta  $q_1$ , mentre quella dell'asticella è detta  $q_2$  e viene misurata attraverso un encoder posto sulla cerniera; si noti che  $q_2 = 0$  identifica la posizione verticale con massa posta al di sotto della cerniera e che il verso positivo di  $q_2$  è quello rappresentato in figura.

Sul sistema può inoltre agire il vento, i cui effetti vengono in questa sede modellati come due forze:  $F_1$  agente sulla massa  $m_1$  e  $F_2$  agente sulla massa  $m_2$ .

Le equazioni che regolano la dinamica del sistema sono:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = \frac{-2Lm_2q_2\dot{q}_1\cos(q_2)(d+L\sin(q_2)) - b\dot{q}_1^3 + dF_1 + \tau}{d^2m_1 + m_2(d+L\sin(q_2))^2} \\ \ddot{q}_2 = \frac{(d+L\sin(q_2))\dot{q}_1^2\cos(q_2)}{L} - \frac{g\sin(q_2)}{L} + \frac{F_2\cos(q_2)}{Lm_2} \end{cases}$$

Il lancio della massa si suddivide in due fasi: nella prima la massa  $m_2$  viene portata ad una posizione di equilibrio  $\bar{q}_2$ , mentre nella seconda viene comandato un aumento di velocità per raggiungere una configurazione limite prima del lancio.

**A.1** Si trovi un'espressione simbolica dell'equilibrio del sistema per una posizione  $\bar{q}_2$  costante della massa  $m_2$ ,  $\bar{q}_2 \in [-\frac{\pi}{2} \div \frac{3}{2}\pi]$ , in assenza di disturbi ( $\bar{F}_1 = \bar{F}_2 = 0$ ), discutendo per quali valori delle variabili in gioco questo sia ammissibile e dandone una motivazione fisica.

**A.2** Si riporti simbolicamente il sistema in forma di stato linearizzato attorno al punto di equilibrio trovato precedentemente (si consiglia di non sostituire le soluzioni simboliche calcolate al punto precedente, mantenendo la notazione  $\bar{q}_2, \bar{F}_1, \bar{F}_2 \dots$ ).

**A.3** Considerando i seguenti valori numerici

$$\begin{aligned} \bar{q}_2 = \pi/4; \quad b = 1 \text{ N m s}^3; \quad m_1 = 1.5 \text{ Kg}; \quad m_2 = 0.5 \text{ Kg}; \\ g = 9.81 \text{ m/s}^2; \quad d = 0.75 \text{ m}; \quad L = 0.25 \text{ m} \end{aligned}$$

e supponendo di avere accesso all'uscita di misura  $y = q_2$ , si determini la funzione di trasferimento tra la coppia  $\tau$  e l'uscita e quelle fra i disturbi  $F_1$  ed  $F_2$  e l'uscita. Se ne discuta inoltre la stabilità, dandone un'interpretazione fisica.

**A.4** Si sintetizzi un controllore per la coppia  $\tau$  tale da:

- portare il sistema ad un valore di  $q_2$  pari a  $75^\circ$ , senza mai superarlo ed entrando in un intervallo di  $\pm 1.5^\circ$  rispetto al valore di regime entro al più 0.5 sec;
- ottenere a regime un errore inferiore a  $0.5^\circ$  per inseguire un riferimento del tipo  $q_2 = \overline{q_2} + 0.08 t$  [rad];
- reiettare un disturbo  $F_1 = 12 \sin(2\pi 0.25t + \phi)$  N affinché in uscita non si abbia un errore superiore a 0.025 rad
- reiettare un disturbo  $F_2 = 0.4 \sin(2\pi 0.5 t + \varphi)$  N affinché in uscita non si abbia un errore superiore a 0.02 rad.

Si riportino quindi

- le specifiche tradotte nel dominio della frequenza e visualizzate sul diagramma di Bode;
- il procedimento di progetto del controllore che si intende seguire illustrato con diagrammi a blocchi;
- il controllore progettato;
- i diagrammi di Bode del sistema nelle diverse fasi del progetto, mostrando il raggiungimento delle specifiche;
- la risposta al gradino del sistema controllato con le caratteristiche significative.

**A.5** Si discretizzi la dinamica del controllore e si effettui la simulazione di una risposta al gradino del sistema controllato usando SIMULINK; si discuta la scelta del tempo di campionamento e si riportino:

- il codice MATLAB che implementa il controllore discreto;
- lo schema a blocchi SIMULINK utilizzato per la simulazione;
- l'andamento simulato dell'uscita del sistema con le caratteristiche significative.

## Soluzione

**A.1** Definendo  $x = [q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2]^T$  come vettore di stato ed imponendo le condizioni di equilibrio,  $\dot{q}_2 = 0$ ,  $\ddot{q}_1 = 0$ ,  $\ddot{q}_2 = 0$ ,  $\dot{h} = 0$  con  $F_1 = F_2 = 0$  e  $q_2 = \bar{q}_2$  si ottiene

$$\begin{cases} 0 = \frac{-b \dot{q}_1^3 + \tau}{d^2 m_1 + m_2 (d + L \sin(q_2))^2} \\ 0 = \frac{(d + L \sin(q_2)) \dot{q}_1^2 \cos(q_2)}{L} - \frac{g \sin(q_2)}{L} \end{cases} \quad (1)$$

da cui si ottiene l'equilibrio

$$\begin{cases} \bar{\dot{q}}_1 \triangleq \bar{\omega} = \sqrt{\frac{g \tan(\bar{q}_2)}{L \sin(\bar{q}_2) + d}} \\ \bar{\tau} = b \bar{\omega}^3 \end{cases} \quad (2)$$

Si noti come  $q_1$  non faccia parte del vettore di stato in quanto, per l'equilibrio richiesto, la velocità di rotazione  $\dot{q}_1$  dovrà assumere un valore costante, mentre il valore di  $q_1$  non comporta nessun interesse in questa trattazione (a differenza di una trattazione in cui si debba mantenere una posizione costante).

**A.2** Indicando con  $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3]^T = [q_2 - \bar{q}_2, \dot{q}_1 - \bar{\omega}, \dot{q}_2]^T$ , il vettore delle variabili di stato traslate nell'equilibrio e con  $\tilde{u} = [\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3]^T = [\tau - \bar{\tau}, F_1, F_2]^T$  il vettore degli ingressi anch'esso traslato, il sistema non lineare scritto in forma di stato traslato attorno all'equilibrio è

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_3 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \frac{-b(\bar{\omega} + \tilde{x}_2)^3 - 2L \cos(\bar{q}_2 + \tilde{x}_1) (d + L \sin(\bar{q}_2 + \tilde{x}_1)) m_2 \tilde{x}_3 (\bar{\omega} + \tilde{x}_2) + \bar{\tau} + \tilde{u}_1 + d \tilde{u}_2}{m_1 d^2 + (d + L \sin(\bar{q}_2 + \tilde{x}_1))^2 m_2} \\ \dot{\tilde{x}}_3 = \frac{\cos(\bar{q}_2 + \tilde{x}_1) (d + L \sin(\bar{q}_2 + \tilde{x}_1)) m_2 (\bar{\omega} + \tilde{x}_2)^2 + \tilde{u}_3 \cos(\bar{q}_2 + \tilde{x}_1) - g \sin(\bar{q}_2 + \tilde{x}_1) m_2}{L m_2} \end{cases} \quad (3)$$

Linearizzando il sistema attorno all'origine, essendo questo l'equilibrio delle nuove variabili  $\tilde{x}$  e  $\tilde{u}$ , si ottiene il sistema linearizzato approssimato nella consueta forma di stato

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (4)$$

dove,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{2L \cos(\bar{q}_2) (\bar{\tau} - b \bar{\omega}^3) (d + L \sin(\bar{q}_2)) m_2}{(m_1 d^2 + (d + L \sin(\bar{q}_2))^2 m_2)^2} & -\frac{3b \bar{\omega}^2}{m_1 d^2 + (d + L \sin(\bar{q}_2))^2 m_2} & -\frac{2L \cos(\bar{q}_2) \bar{\omega} (d + L \sin(\bar{q}_2)) m_2}{m_1 d^2 + (d + L \sin(\bar{q}_2))^2 m_2} \\ \frac{\bar{\omega}^2 (L \cos(2\bar{q}_2) - d \sin(\bar{q}_2)) - g \cos(\bar{q}_2)}{L} & \frac{2 \cos(\bar{q}_2) \bar{\omega} (d + L \sin(\bar{q}_2))}{L} & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1 d^2 + (d + L \sin(\bar{q}_2))^2 m_2} & \frac{d}{m_1 d^2 + (d + L \sin(\bar{q}_2))^2 m_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\cos(\bar{q}_2)}{L m_2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$C = [1 \quad 0 \quad 0] \quad (7)$$

$$D = [0 \quad 0 \quad 0] \quad (8)$$

**A.3** Sostituendo i valori numerici riportati si ottengono le seguenti matrici:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -24.9411 & -0.4186 \\ -50.2012 & 17.0568 & 0 \end{bmatrix}, \\
 B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.7854 & 0.5891 & 0 \\ 0 & 0 & 5.6569 \end{bmatrix}, \\
 C &= [1 \ 0 \ 0], \\
 D &= [0 \ 0 \ 0],
 \end{aligned} \tag{9}$$

La funzione di trasferimento tra l'ingresso  $\tau$  e l'uscita  $y = q_2$  é:

$$G = \frac{13.397}{(s + 24.67)(s^2 + 0.2674s + 50.75)} \tag{10}$$

mentre le due funzioni di trasferimento  $G_{d1}$  e  $G_{d2}$  rispettivamente fra il disturbo  $F_1$  e l'uscita ed il disturbo  $F_2$  e l'uscita sono

$$G_{d1} = \frac{10.048}{(s + 24.67)(s^2 + 0.2674s + 50.75)} \tag{11}$$

$$G_{d2} = \frac{5.6569(s + 24.94)}{(s + 24.67)(s^2 + 0.2674s + 50.75)} \tag{12}$$

Essendo tutti i poli del sistema a parte reale strettamente negativa (verificabile direttamente con la regola di Cartesio per il termine di secondo grado) il sistema è asintoticamente stabile. Di fatti, se ci si sposta lievemente dall'equilibrio con un aumento di  $q_2$  l'inerzia del sistema aumenta e questo tenderà di nuovo a scendere, e viceversa. Considerazioni analoghe valgono per incrementi di velocità che portano incrementi dell'attrito e viceversa.

In figura 2 è riportato il diagramma a blocchi rappresentante il sistema con tre ingressi (di controllo  $\tau$  e di disturbo  $F_1$  ed  $F_2$ ) e l'uscita di misura  $y = q_2$ .

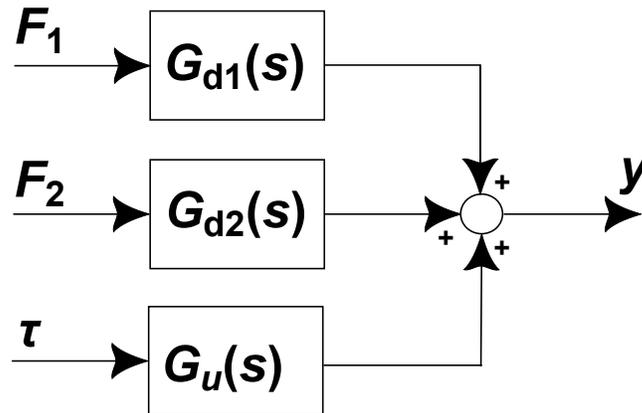


Figura 2: Diagramma a blocchi del sistema.

**A.4** Poiché il sistema risulta essere asintoticamente stabile è possibile procedere direttamente alla sintesi di un controllore  $C(s)$  che permetta il rispetto delle specifiche utilizzando il diagramma di Bode (vedi la figura 2 per una rappresentazione a blocchi del sistema con l'ingresso di controllo  $u$  e l'uscita di misura  $y = q_u$ , ed il montaggio di figura 3 per il sistema controllato).

In controllore per soddisfare le specifiche sarà del tipo

$$C_2(s) = \frac{K}{s^t} C_0(s), \text{ con } C_0(0) \geq 1.$$

Le specifiche di inseguimento del riferimento da rispettare sono:

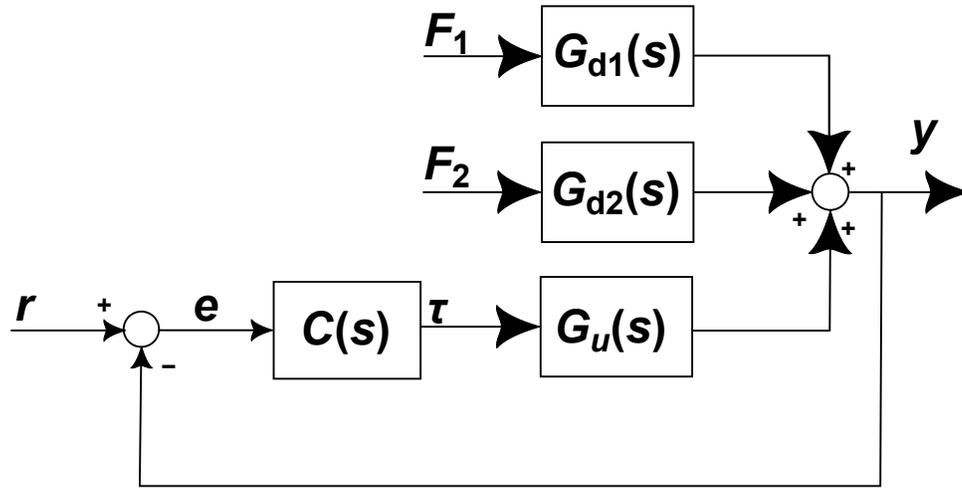


Figura 3: Diagramma a blocchi del sistema con controllore.

- non superare mai il valore di regime (assenza di sovraelongazione);
- assestamento entro un intervallo di  $\pm 1.5^\circ$  (5% essendo il gradino di  $30^\circ$ ) entro un tempo di 0.5 sec;
- errore a regime per ingresso a rampa con coefficiente 0.08 limitato a  $0.5^\circ$ .

Si può cercare di rispettare tali specifiche con un controllo che punti ad approssimare il sistema in ciclo chiuso con un sistema ad un polo dominante, in modo da non avere sovraelongazione; la specifica sull'assestamento si traduce come segue:

$$T_{a5} \simeq \frac{3}{\omega_T} \quad \Rightarrow \quad \omega_T > 6 \text{ rad/s}.$$

Per quanto riguarda l'errore a regime limitato per un riferimento a rampa, serve che il sistema possieda un polo nell'origine in catena aperta ed un guadagno di velocità sufficientemente elevato: poiché il sistema non possiede poli in zero serve aggiungerne uno nel controllore che diverrà dunque di tipo 1; inoltre il guadagno minimo si può scegliere considerando il teorema del valore finale applicato all'errore per l'inseguimento di un ingresso a rampa

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{K C_0(s)}{s} G(s)} \frac{0.08}{s^2} < 0.5^\circ = 0.0087 \text{ rad} \quad (13)$$

da cui, invertendo la relazione ed esplicitando il valore del guadagno di velocità di anello, si ha

$$K C_0(0) G(0) > \frac{0.08}{0.0087} \simeq 9.16 \quad (14)$$

ovvero il sistema in anello aperto dovrà, in bassa frequenza, stare al di sopra di una retta con pendenza  $-1$  ( $-20$  dB/dec) e intercetta  $20 \log_{10} 9.16 = 19.24$  dB per  $\omega = 1$  rad/s.

**A.4.2** Si richiede che un disturbo di forza del tipo  $F_1 = 12 \sin(2\pi 0.25t + \phi)$  N non produca a regime uno spostamento superiore a  $0.025$  rad.

Applichiamo dunque il teorema della risposta armonica. La funzione di trasferimento fra la trasformata  $D_1(j\omega)$  del disturbo  $F_1$  e la trasformata  $Y(j\omega)$  dell'uscita è data da

$$Y(j\omega) = \frac{G_{d1}(j\omega)}{1 + C(j\omega)G(j\omega)} D_1(j\omega) = \bar{G}_1(j\omega) D(j\omega). \quad (15)$$

La componente dell'uscita dovuta ad un disturbo sinusoidale ad una frequenza generica  $\omega_k$  sarà quindi del tipo

$$y(t) = |\bar{G}(j\omega_k)| |D_1(j\omega_k)| \sin(\omega_k t + \angle \bar{G}(j\omega_k)). \quad (16)$$

Facendo riferimento al caso cautelativo in cui  $\sin(\omega_k t + \angle \bar{G}(j\omega_k)) = 1$ , e considerando di aumentare il modulo  $|\bar{G}(j\omega)|$  con il suo valore massimo nel range di frequenze d'interesse, il modulo della componente sinusoidale del disturbo da considerare è pari a  $1.2$  N.

Il controllo deve dunque essere scelto in modo tale che

$$|\bar{G}(j\omega)| = \frac{|G_{d1}(j\omega)|}{|1 + C(j\omega)G(j\omega)|} \leq \frac{0.025}{12} \quad \forall \omega \leq \omega_d, \quad (17)$$

dove  $\omega_d$  viene scelta come la frequenza del disturbo, ovvero  $0.25 * 2\pi \simeq 1.57$  rad/s.

Poiché a bassa frequenza è ragionevole applicare l'approssimazione  $|1 + C(j\omega)G(j\omega)| \approx |C(j\omega)G(j\omega)|$ , il controllore deve soddisfare

$$|C(j\omega)G(j\omega)| \geq \frac{|G_{d1}(j\omega)|}{0.002} = 500 |G_{d1}(j\omega)|. \quad (18)$$

Notando infine che nel campo frequenziale d'interesse (vedi figura 4) si ha  $|G_{d1}(j\omega)| < -41.4$  dB e  $20 \log_{10}(500) \approx 54$  dB, il guadagno d'anello per soddisfare questa specifica deve essere superiore a  $-41.4 + 54 = 12.6$  dB per frequenze minori di 1.57 rad/s.

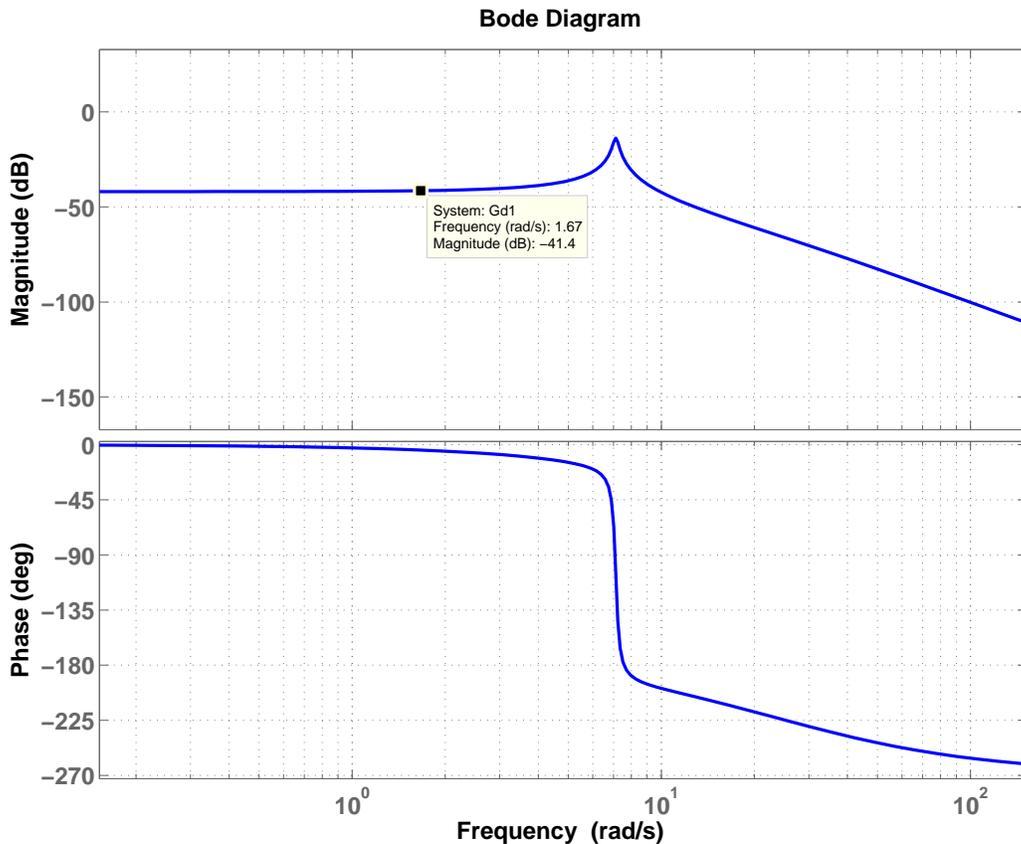


Figura 4: Diagrammi di Bode della f.d.t.  $G_{d1}(s)$  con evidenziato il massimo per il range di frequenze di interesse.

**A.4.3** Si richiede che un disturbo di forza del tipo  $F_2 = 0.4 \sin(2\pi 0.5 t + \varphi)$  N non produca a regime uno spostamento superiore a 0.02 rad.

Le considerazioni, del tutto analoghe al punto precedente, differiscono per il range di frequenze da considerare, per il modulo dell'errore e per la f.d.t. del disturbo, che non sarà  $G_{d1}$  ma  $G_{d2}$ .

La frequenza del disturbo è pari a 3.14 rad/s, il modulo della  $G_{d2}$  per frequenze d'interesse è pari a -17 dB, il valore di errore ammissibile è pari a  $\frac{0.02}{0.4} = \frac{1}{20}$  e quindi il guadagno d'anello per soddisfare questa specifica deve essere superiore a  $-17 + 26 = 9$  dB per frequenze minori di 3.14 rad/s.

La figura 6 mostra il diagramma di Bode di  $G(s)$  con la specifica sulla banda passante, sul guadagno di velocità e sui guadagni in bassa frequenza per attenuare i disturbi.

Il controllore può essere progettato inserendo per prima cosa il polo nell'origine. Per avere poi un sistema stabile in anello chiuso e che rispetti la performance richiesta, è necessario aumentare il guadagno d'anello e il margine di fase, per cui si procede all'inserimento di una coppia di zeri complessi coniugati prima della pulsazione di taglio di interesse ed i corrispondenti poli in alta frequenza; un ulteriore zero si rivela

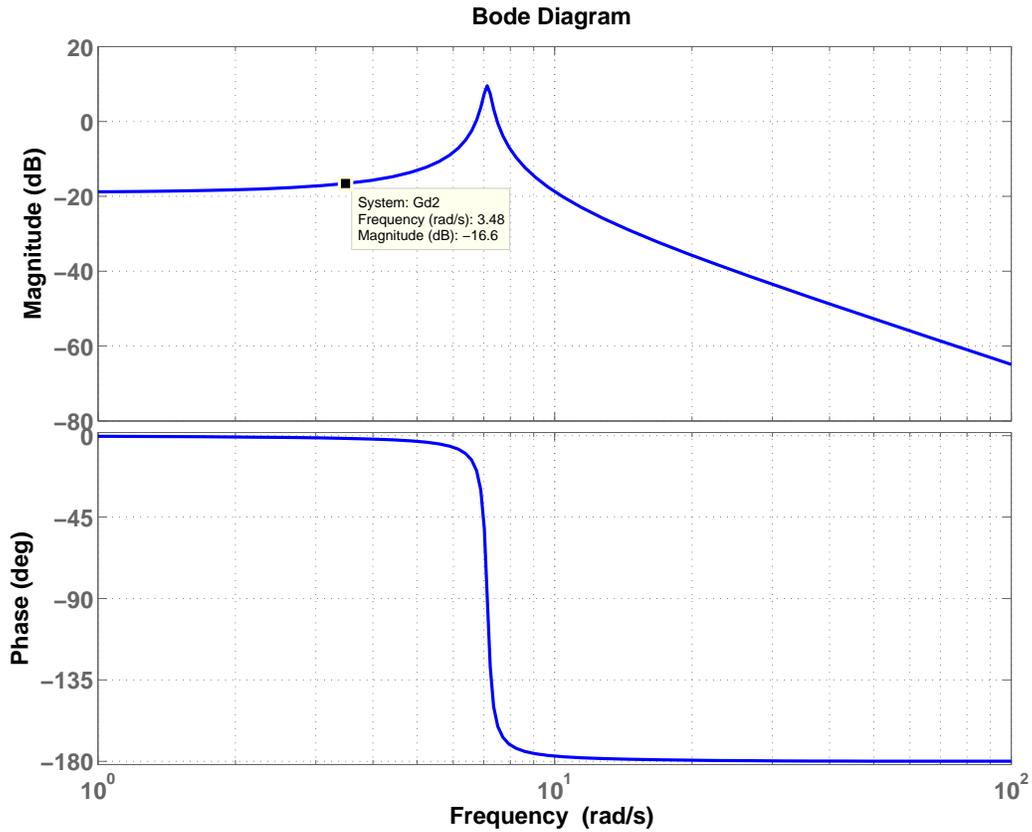


Figura 5: Diagrammi di Bode della f.d.t.  $G_{d2}(s)$  con evidenziato il massimo per il range di frequenze di interesse.

necessario per ottenere un comportamento all'incirca del primo ordine, inserito anch'esso prima del taglio, senza necessità di aggiungere un polo in quando già messo uno nell'origine in precedenza.

Un controllore che permette al sistema di rispettare tutte le specifiche, compresa la causalità, è il seguente:

$$C(s) = \frac{1.9403 \cdot 10^5 (s + 6.037) (s^2 + 0.1724 s + 51.18)}{s (s + 237.3)^2}. \quad (19)$$

In figura 7 si vede come le specifiche siano rispettate sul diagramma di Bode, mentre in figura 8 è riportata la risposta al gradino del sistema in ciclo chiuso. Come si può osservare le specifiche risultano rispettate. La f.d.t. del sistema in anello chiuso complessiva è la seguente:

$$G_{cl} = \frac{2.0635 \cdot 10^6 (s + 6.037) (s^2 + 0.1724 s + 51.18)}{(s + 320.1) (s + 3.917) (s^2 + 0.1854 s + 50.87) (s^2 + 175.3 s + 9995)}. \quad (20)$$

**A.5** Il codice di una funzione che simuli la dinamica discretizzata del controllore, ad esempio implementato come una Matlab function, è riportato di seguito.

```
function out = controllore(in)

% definizione del controllore
s = tf('s');
C1 = 1.9403e05*(s+6.037)*(s^2 + 0.1724*s + 51.18)/(s*(s+237.3)^2);

% controllore in spazio di stato
C_ss = ss(C1);

% errore (in ingresso al controllore)
e = in(1);
% stato del controllore
x = in(2:end);

% campionamento: almeno 5-10 volte piu' veloce degli autovalori
% piu' veloci del controllore - controllando che questo rimanga stabile
Ts = 0.005;
```

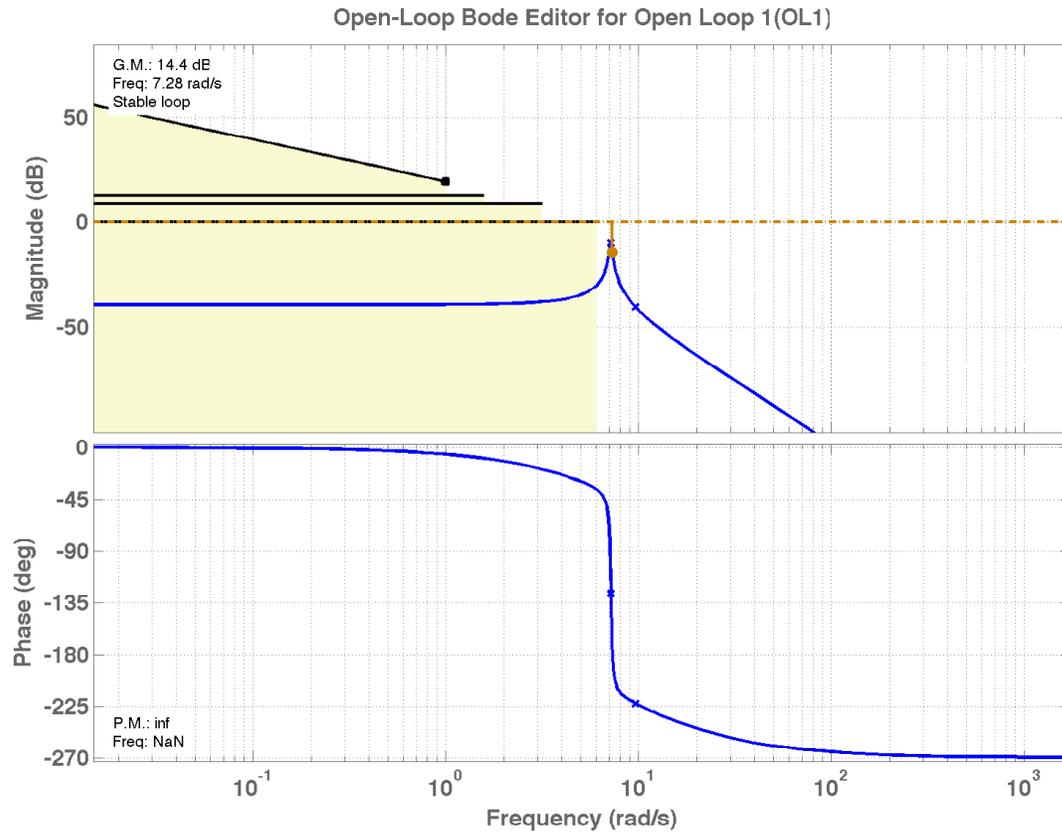


Figura 6: Diagrammi di Bode della f.d.t.  $G(s)$  con le specifiche da rispettare.

```

% matrici discretizzate
Ad = C_ss.a*Ts + eye(size(C_ss.a));
Bd = C_ss.b*Ts;
Cd = C_ss.c;
Dd = C_ss.d;

% controllo del sistema (uscita del controllore)
u = Cd*x + Dd*e;
% nuovo stato
x = Ad*x + Bd*e;

out = [u; x];

```

Esso può essere utilizzato per simulare il sistema con controllore chiuso in retroazione con uno schema Simulink come quello di fig. 9. Da notare in particolare il blocco `memory`, necessario per mantenere traccia dello stato del controllore, ed il fatto che il blocco `Matlab-function` collegato al codice presentato ha un campionamento pari a quello del controllore stesso, ovvero 0.005 s.

In Fig. 10 si può vedere come la risposta simulata si comporti fedelmente a quanto visto in precedenza con il sistema continuo.

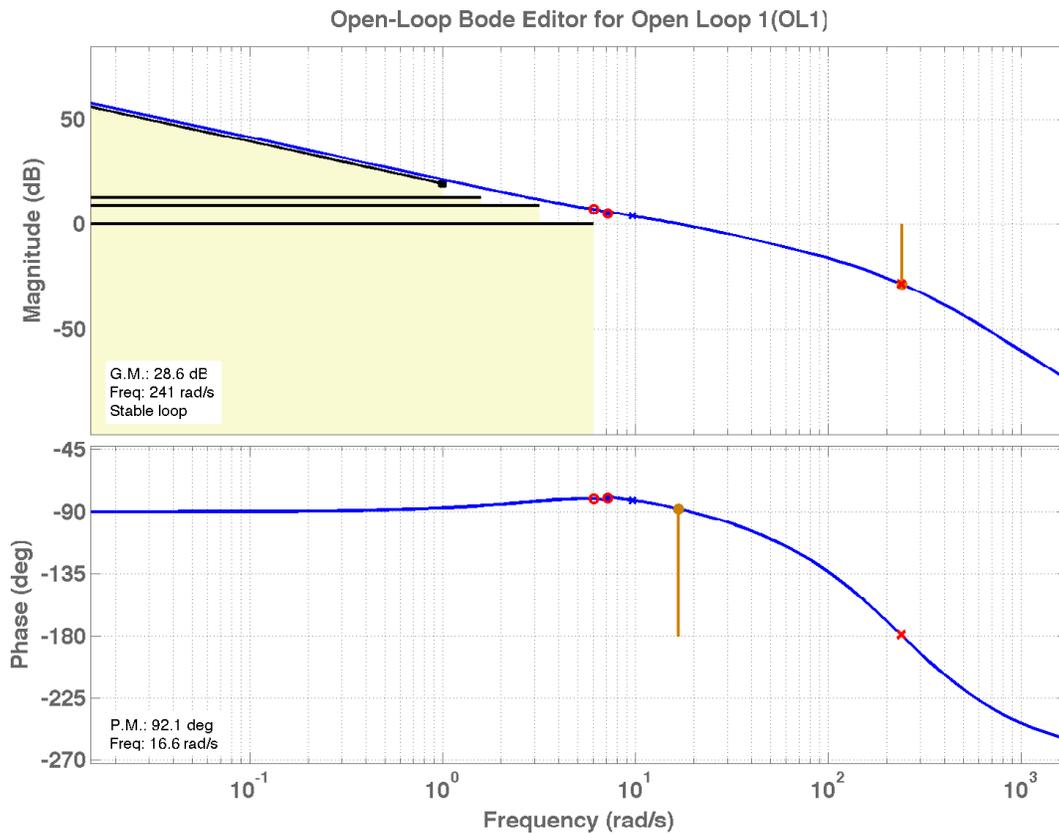


Figura 7: Diagrammi di Bode della f.d.t.  $C(s)G(s)$  con il rispetto delle specifiche di progetto.

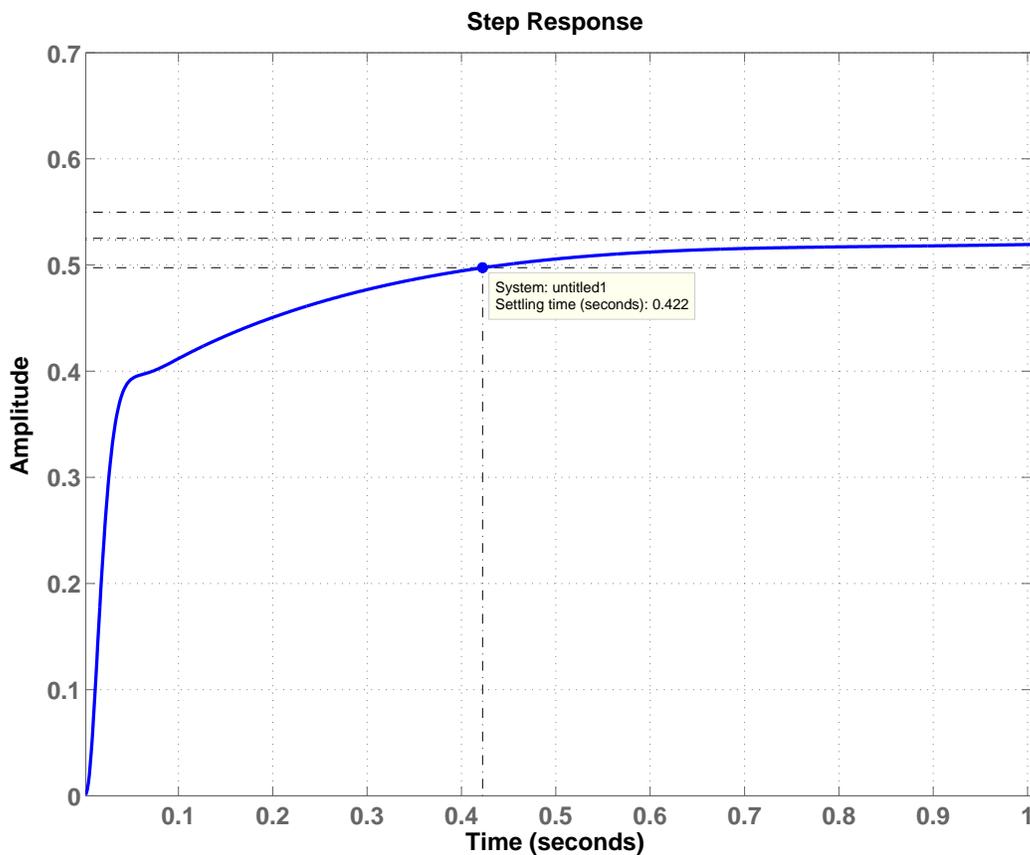


Figura 8: Risposta per ingresso a gradino del sistema controllato.

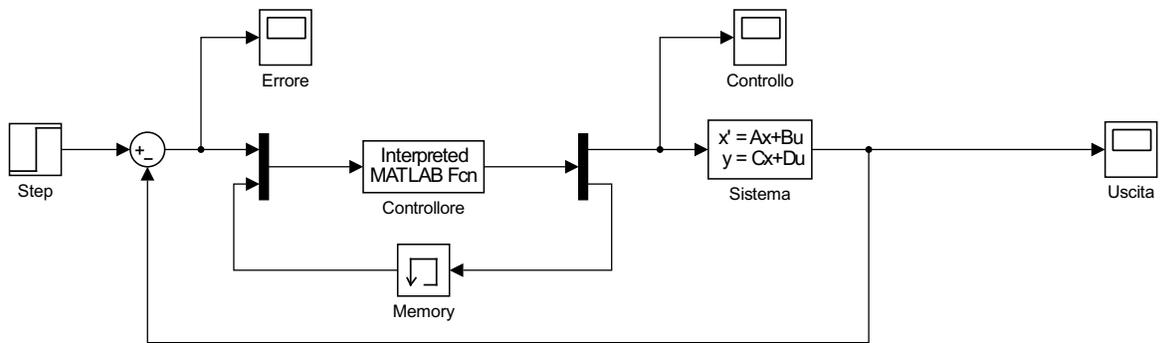


Figura 9: Schema Simulink utilizzabile per simulare la risposta del sistema in ciclo chiuso con il controllore discretizzato.

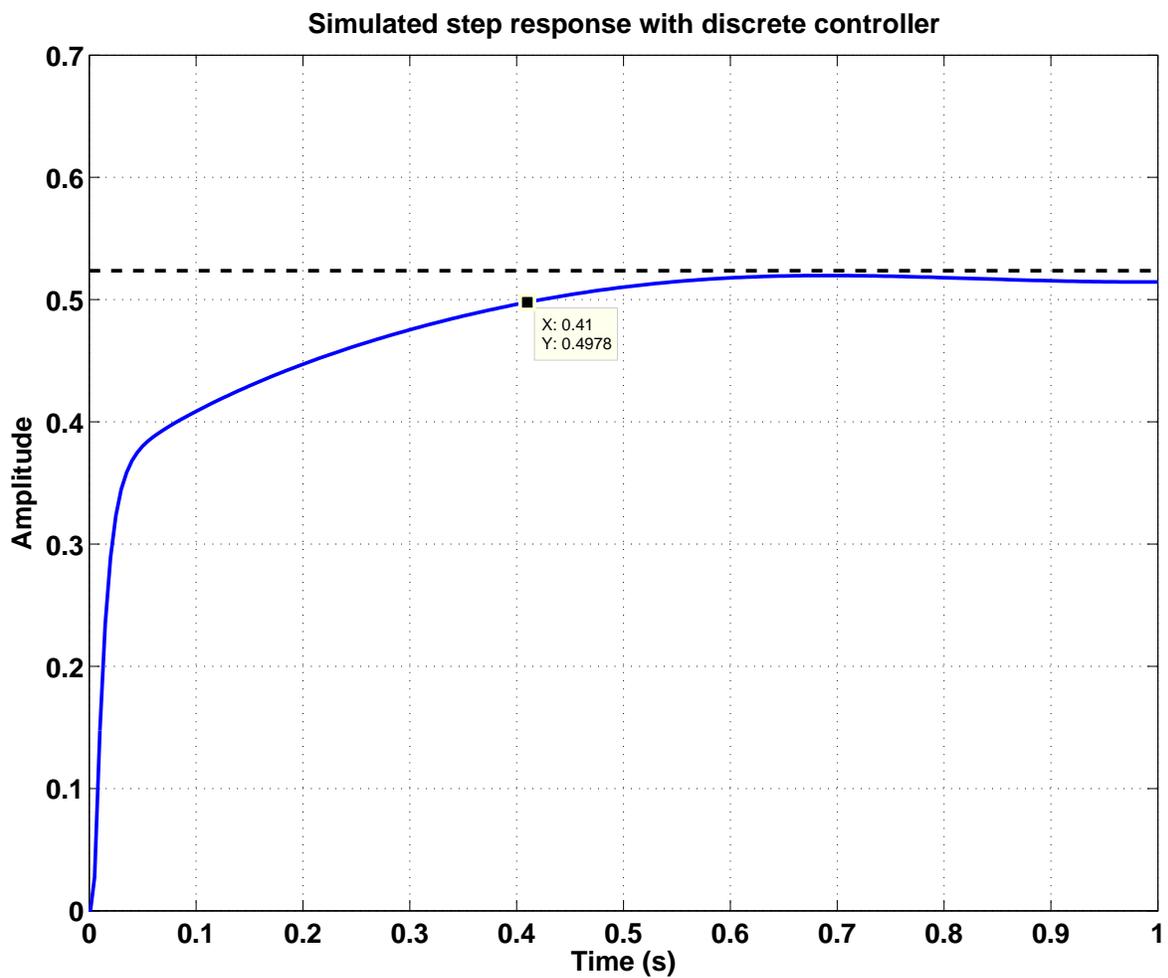


Figura 10: Risposta al gradino simulata in Simulink del sistema controllato con controllore discretizzato.