

Figura 1: Sistema di regolazione del livello del liquido in un serbatoio attraverso una valvola azionata da un sollevatore magnetico (elaborato da P. Nucci)

La Fig.1 rappresenta lo schema di un sistema di regolazione del livello del liquido in un serbatoio attraverso una valvola azionata da un sollevatore magnetico.

Il sistema è composto da un solenoide che si avvolge attorno ad un pezzo in materiale ferromagnetico con una punta. Sul solenoide scorre una corrente i che induce un campo magnetico nel pezzo ed attrae la sfera con una forza

$$F_m = 0.4 \frac{i}{1 + 9z^2}$$

dove z è la distanza fra la sfera e la punta (positiva verso l'alto).

La sfera è inoltre collegata ad una valvola di inerzia trascurabile, la quale regola la portata in ingresso ad un serbatoio con una caratteristica lineare rispetto alla posizione z : detta q_i la portata in ingresso al serbatoio, questa può essere calcolata come

$$q_i = (K_v + d)(z - K)$$

dove K è la posizione di valvola chiusa e K_v è una costante di proporzionalità nominale, mentre d modella un disturbo dovuto a variazioni non controllate della pressione all'ingresso.

Il foro di uscita ha una sezione pari ad A_u : chiamando il livello del liquido nel serbatoio h , la portata in uscita è pari a

$$q_u = A_u \sqrt{2gh}.$$

Le equazioni dinamiche del sistema che regolano il moto verticale della sfera e la variazione di volume di liquido nel serbatoio sono:

$$\begin{cases} m \ddot{z} = F_m - mg \\ A_t \dot{h} = q_i - q_u \end{cases}$$

dove A_t è la sezione del serbatoio.

A.1 Si trovi un'espressione simbolica dell'equilibrio del sistema per un generico livello di liquido \bar{h} in assenza di disturbo d ($\bar{d} = 0$), discutendo per quali valori delle variabili in gioco questo sia ammissibile.

A.2 Si riporti simbolicamente il sistema in forma di stato linearizzato (si consiglia di non sostituire le soluzioni simboliche calcolate al punto precedente, mantenendo la notazione $\bar{h}, \bar{d} \dots$).

A.3 Considerando i seguenti valori numerici

$$\begin{aligned} K_v &= 2 \text{ m}^2/\text{s}; & K &= -0.1 \text{ m}; & A_u &= 0.0079 \text{ m}^2; & m &= 0.261 \text{ Kg}; & g &= 9.81 \text{ m/s}^2; & A_t &= 0.1257 \text{ m}^2; \\ \bar{h} &= 0.2 \text{ m} \end{aligned}$$

e supponendo di avere accesso all'uscita di misura $y = q_u$, si determini la funzione di trasferimento tra la corrente i e l'uscita e quella fra il disturbo d e l'uscita. Se ne discuta inoltre la stabilità.

A.4 Si sintetizzi un controllore per la corrente i tale da:

- ottenere esattamente una portata di uscita pari a $0.0172 \text{ m}^3/\text{s}$, considerando che il serbatoio ha un'altezza h_{\max} (da non superare) pari a 0.25 m e che si vuole che la portata in uscita raggiunga e si mantenga in un intervallo $[0.0171 \div 0.0173] \text{ m}^3/\text{s}$ entro al più 0.5 secondi;
- reiettare un disturbo del tipo $d = 0.5 + 1.2 \sin(2\pi 0.1t + \phi) \text{ m}^2/\text{s}$ affinché in uscita non si abbia un errore superiore a $1 * 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$.

Si riportino quindi

- le specifiche tradotte nel dominio della frequenza e visualizzate sul diagramma di Bode;
- il procedimento di progetto del controllore che si intende seguire illustrato con diagrammi a blocchi;
- il controllore progettato;
- i diagrammi di Bode del sistema nelle diverse fasi del progetto, mostrando il raggiungimento delle specifiche;
- la risposta al gradino del sistema controllato con le caratteristiche significative.

A.5 Si discretizzi la dinamica del controllore e si effettui la simulazione di una risposta al gradino del sistema controllato usando SIMULINK; si discuta la scelta del tempo di campionamento e si riportino:

- il codice MATLAB che implementa il controllore discreto;
- lo schema a blocchi SIMULINK utilizzato per la simulazione;
- l'andamento simulato dell'uscita del sistema con le caratteristiche significative.

Soluzione

A.1 Sostituendo F_m , q_i e q_u nella dinamica del sistema si ottiene

$$\begin{cases} m \ddot{z} = 0.4 \frac{i}{1+9z^2} - m g \\ A_t \dot{h} = (K_v + d)(z - K) - A_u \sqrt{2 g h} \end{cases} \quad (1)$$

Definendo $x = [z \dot{z} h]^T$ come vettore di stato ed imponendo le condizioni di equilibrio, $\dot{z} = 0$, $\ddot{z} = 0$, $\dot{h} = 0$ con $d = 0$ e $h = \bar{h}$ si ottiene

$$\begin{cases} 0 = 0.4 \frac{\bar{i}}{1+9\bar{z}^2} - m g \\ 0 = K_v (\bar{z} - K) - A_u \sqrt{2 g \bar{h}} \end{cases} \quad (2)$$

da cui si ottiene l'equilibrio

$$\begin{cases} \bar{z} = K + \frac{A_u}{K_v} \sqrt{2g\bar{h}} \\ \bar{i} = \frac{mg}{0.4} \left(1 + 9 K^2 + 18 K \frac{A_u}{K_v} \sqrt{2g\bar{h}} + 9 \frac{A_u^2}{K_v^2} 2 g \bar{h} \right) \end{cases} \quad (3)$$

A.2 Indicando con $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3]^T = [z - \bar{z}, \dot{z}, h - \bar{h}]^T$, il vettore delle variabili di stato traslate nell'equilibrio e con $\tilde{u} = i - \bar{i}$ l'ingresso anch'esso traslato, il sistema non lineare scritto in forma di stato traslato attorno all'equilibrio è

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \frac{0.4}{m} \frac{\tilde{u} + \bar{i}}{1+9(\tilde{x}_1 + \bar{z})^2} - m g \\ \dot{\tilde{x}}_3 = \frac{K_v + d}{A_t} (\tilde{x}_1 + \bar{z} - K) - \frac{A_u}{A_t} \sqrt{2 g (\tilde{x}_3 + \bar{h})} \end{cases} \quad (4)$$

Linearizzando il sistema attorno all'origine, essendo questo l'equilibrio delle nuove variabili \tilde{x} e \tilde{u} , si ottiene il sistema linearizzato approssimato nella consueta forma di stato

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (5)$$

dove,

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{36\bar{i}\bar{x}_1}{5m(9\bar{x}_1+1)^2} & 0 & 0 \\ \frac{K_v + \bar{d}}{A_t} & 0 & -\frac{\sqrt{2}A_u g}{2A_t \sqrt{g\bar{x}_3}} \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 5m(9\bar{x}_1^2 + 1) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ Bd &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (\bar{x}_1 - K) \\ A_t \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{A_u \sqrt{g}}{\sqrt{2\bar{x}_3}} \end{bmatrix}, \\ D &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

A.3 Sostituendo i valori numerici riportati si ottengono le seguenti matrici:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 15.1201 & 0 & 0 \\ 15.9109 & 0 & -0.3112 \end{bmatrix}, \\
 B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1.4237 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 Bd &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0622 \end{bmatrix}, \\
 C &= [0 \quad 0 \quad 0.0391], \\
 D &= [0].
 \end{aligned} \tag{7}$$

La funzione di trasferimento tra la corrente di ingresso i e l'uscita $y = q_u$ é:

$$G_u = \frac{0.8862}{s^3 + 0.3112s^2 - 15.12s - 4.706}$$

mentre la funzione di trasferimento tra il disturbo e l'uscita risulta:

$$G_d = \frac{0.002435}{(s + 0.3112)}$$

Dato che i poli delle due funzioni G e G_d devono essere eguali, si deduce che G_d presenta due zeri coincidenti con due poli del sistema. I poli risultano essere: 3.8885 , -3.8885 , -0.3112 . Data la presenza di un polo a parte reale positiva il sistema è quindi instabile.

- A.4** Poiché il sistema risulta essere instabile si sceglie di procedere preliminarmente alla sintesi di un controllore stabilizzante $C_1(s)$ utilizzando ad esempio il luogo delle radici, per poi progettare un secondo controllore $C_2(s)$ che faccia rispettare al nostro sistema le specifiche di progetto (vedi la figura 2 per una rappresentazione a blocchi del sistema con l'ingresso di controllo u e l'uscita di misura $y = q_u$, ed il montaggio di figura 5 per il sistema controllato).

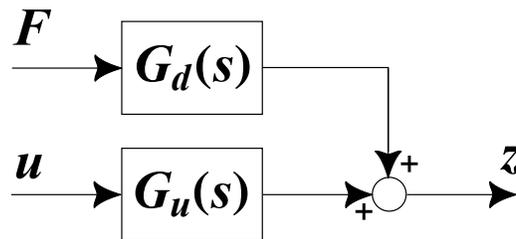


Figura 2: Diagramma a blocchi del sistema.

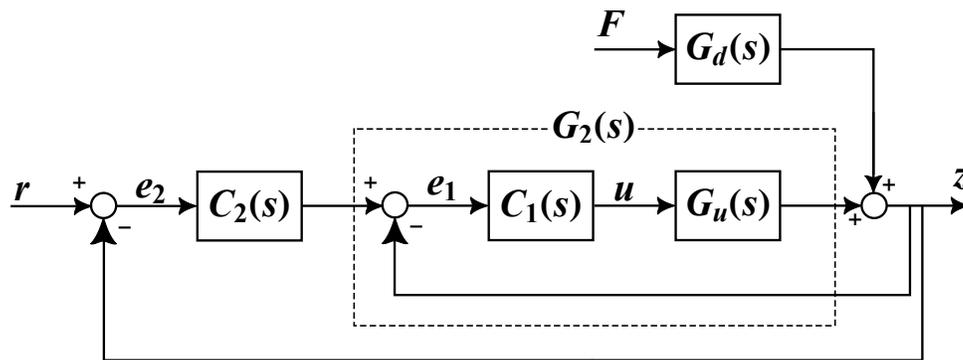


Figura 3: Diagramma a blocchi del sistema con controllo in cascata.

Per stabilizzare il sistema si può inserire due reti anticipatrici al fine di mantenere per un certo intervallo di guadagno tutti i rami del luogo nel semipiano stabile. Un esempio di controllore stabilizzante è il seguente:

$$C_1(s) = \frac{278.3(1 + 0.3s)^2}{(1 + 0.02s)^2}.$$

In figura 4 si può vedere il luogo delle radici di $G_u(s)$ mentre in figura ?? è rappresentato il luogo delle radici del sistema $C_1(s)G_u(s)$, ovvero in seguito al progetto del controllore stabilizzante $C_1(s)$.

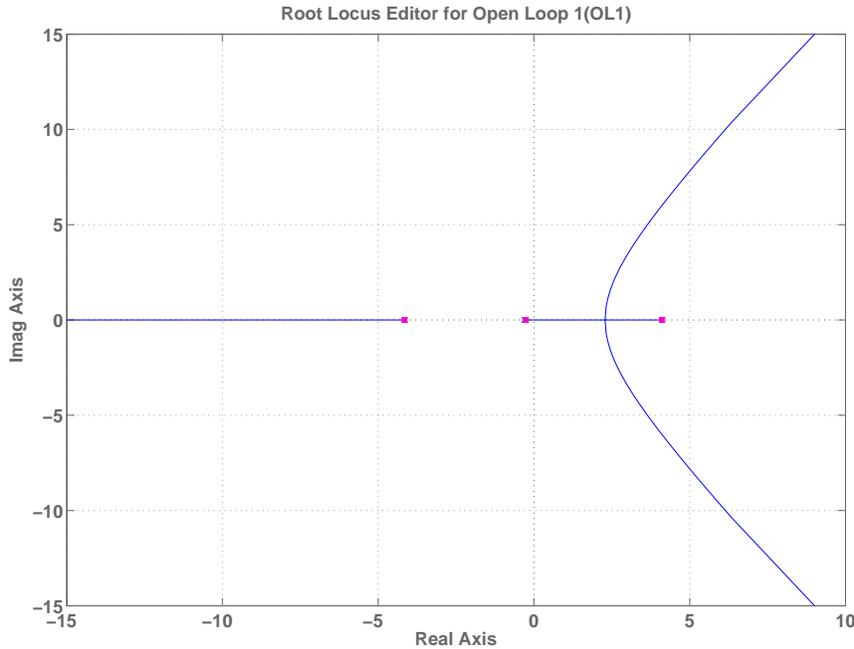


Figura 4: Root locus di G_u .

La funzione di trasferimento G_2 che si ottiene chiudendo l'anello risulta:

$$G_2 = \frac{55493(s + 3.333)^2(s + 0.3112)}{(s + 75.93)(s + 0.3112)(s^2 + 7.688s + 15.28)(s^2 + 16.69s + 521.4)}.$$

mentre la nuova funzione di trasferimento G_{d2} tra disturbo d e uscita q_u risulta:

$$G_{d2} = \frac{0.0024353(s + 50)^2(s + 3.888)(s - 3.888)(s + 0.3112)}{(s + 75.93)(s + 0.3112)(s^2 + 7.688s + 15.28)(s^2 + 16.69s + 521.4)}$$

Adesso passiamo a progettare un controllore per soddisfare le specifiche. Tale controllore sarà del tipo

$$C_2(s) = \frac{K}{s^t} C_0(s), \text{ con } C_0(0) \geq 1.$$

Le specifiche da rispettare sono:

- errore a regime nullo;
- sovralongazione massima ammessa di 0.25 m corrispondente ad una portata massima di $0.0175 \text{ m}^3/\text{s}$ per un gradino di $0.0016 \text{ m}^3/\text{s}$ dall'equilibrio $\bar{q}_u(\bar{h})$: $S\% = 18\%$.
- assestamento entro un intervallo di $\pm 0.0001 \text{ m}^3/\text{s}$ entro un tempo di 3 sec, ovvero un tempo di assestamento al 6.25% di 3 sec.

Si può cercare di rispettare tali specifiche con un controllo che punti ad approssimare il sistema in ciclo chiuso con un sistema a due poli dominanti, per il quale le specifiche si traducono come segue:

$$S\% = 100 e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} \leq 18\% \quad \implies \quad \delta > 0.4 \quad \implies \quad M_\phi \simeq 100\delta \simeq 40^\circ$$

$$T_{a6.25} \simeq \frac{-\ln\left(\frac{6.25}{100}\right) - \frac{1}{2}\ln(1-\delta^2)}{\delta\omega_T} \quad \implies \quad \omega_T > 14.1761 \text{ rad/s}.$$

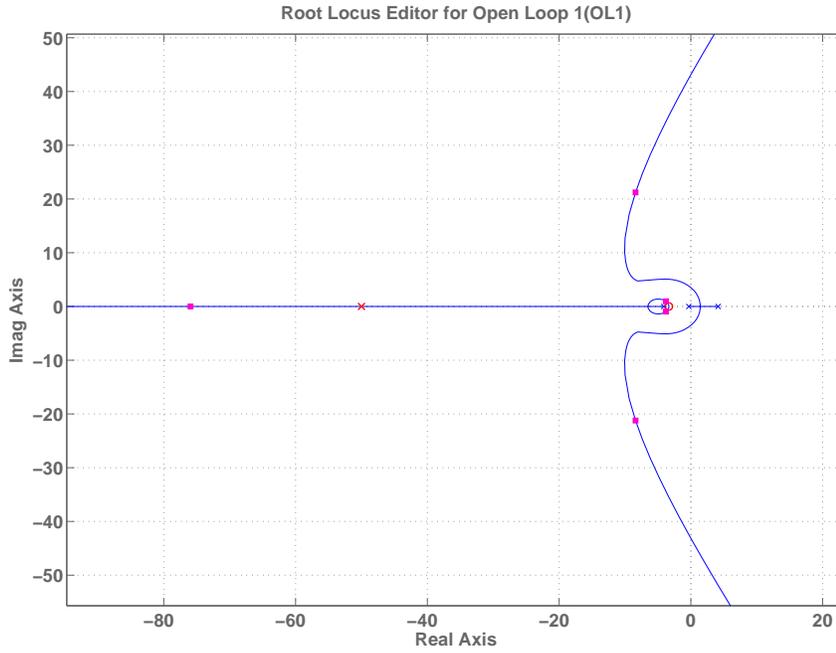


Figura 5: Root Locus di $C_1 G_u$.

Per quanto riguarda l'errore a regime nullo serve che la funzione d'anello abbia un polo nell'origine: essendo che questo non è presente nel sistema a seguito dell'inserimento del controllore stabilizzante, si procede al suo inserimento all'interno del controllore per il rispetto delle specifiche.

A.4.2 Si richiede che un disturbo di forza del tipo $F = 0.5 + 1.2 \sin(2\pi 0.1 t)$ non produca a regime uno spostamento del sommergibile superiore a $1 * 10^{-5} m^3/s$.

Per prima cosa si può notare che le specifiche del controllo richiedono l'inserimento di un polo nell'origine per cui, per cui la componente costante del disturbo è già annullata a regime.

Per quanto riguarda la componente sinusoidale applichiamo invece il teorema della risposta armonica. La funzione di trasferimento fra la trasformata $D(j\omega)$ del disturbo e la trasformata $Y(j\omega)$ dell'uscita è data da

$$Y(j\omega) = \frac{G_{d2}(j\omega)}{1 + C_2(j\omega)G_2(j\omega)} D(j\omega) = \bar{G}(j\omega) D(j\omega), \quad (8)$$

dove

$$G_{d2}(j\omega) = \frac{G_d(j\omega)}{1 + C_1(j\omega)G_u(j\omega)} \quad (9)$$

è la f.d.t. tra il disturbo e l'uscita dopo l'inserimento del controllore stabilizzante.

La componente dell'uscita dovuta ad un disturbo sinusoidale ad una frequenza generica ω_k sarà quindi del tipo

$$y(t) = |\bar{G}(j\omega_k)| |D(j\omega_k)| \sin(t + \angle \bar{G}(j\omega_k)). \quad (10)$$

Facendo riferimento al caso cautelativo in cui $\sin(\omega_k t + \angle \bar{G}(j\omega_k)) = 1$, e considerando di aumentare il modulo $|\bar{G}(j\omega)|$ con il suo valore massimo nel range di frequenze d'interesse, il modulo della componente sinusoidale del disturbo da considerare è pari a $1.2 m^3/s$.

Il controllo deve dunque essere scelto in modo tale che

$$|\bar{G}(j\omega)| = \frac{|G_{d2}(j\omega)|}{|1 + C_2(j\omega)G_2(j\omega)|} \leq \frac{10^{-5}}{1.2} \quad \forall \omega \leq \omega_d, \quad (11)$$

dove ω_d viene scelta come la massima frequenza del disturbo, ovvero $0.1 * 2\pi \simeq 0.628$ rad/s.

Poiché a bassa frequenza è ragionevole applicare l'approssimazione $|1 + C_2(j\omega)G_2(j\omega)| \approx |C_2(j\omega)G_2(j\omega)|$, il controllore deve soddisfare

$$|C_2(j\omega)G_2(j\omega)| \geq \frac{|G_{d2}(j\omega)|}{8.333 \cdot 10^{-6}}. \quad (12)$$

Notando infine che nel campo frequenziale d'interesse (vedi figura ??) si ha $|G_{d2}(j\omega)| < -79.1706$ dB e $20 \log_{10}(1.67 \cdot 10^{-4}) \approx -101.5836$ dB, il guadagno d'anello per soddisfare questa specifica deve essere superiore a $-79.2 - (-101.6) = 22.4$ dB per frequenze minori di 0.628 rad/s.

La figura 6 mostra il diagramma di Bode di $G_2(s)$ con la specifica sulla banda passante.

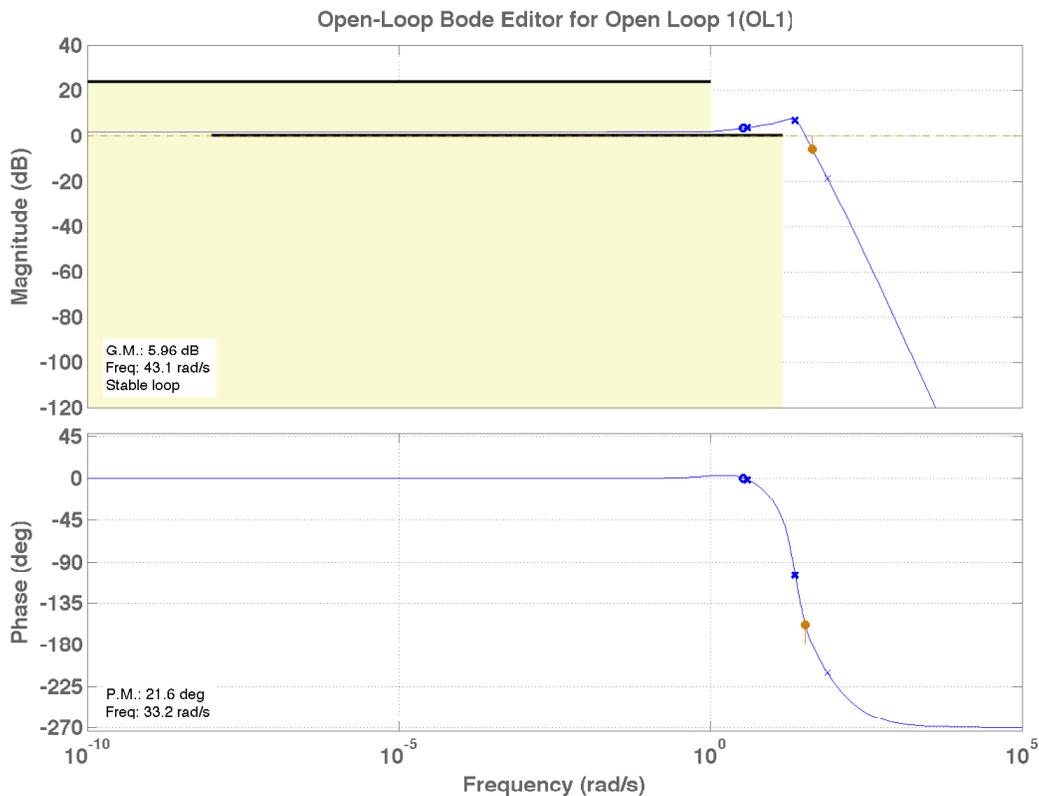


Figura 6: Diagrammi di Bode della f.d.t. $G_2(s)$ con le specifiche da rispettare.

Il controllore può essere progettato inserendo per prima cosa il polo nell'origine. Per avere poi un sistema stabile in anello chiuso e che rispetti la performance richiesta, è necessario aumentare il guadagno d'anello e il margine di fase, per cui si procede all'inserimento di una coppia di zeri complessi coniugati prima della pulsazione di taglio di interesse, inserendo anche un polo in alta frequenza per la causalità.

Un controllore che permette al sistema di rispettare tutte le specifiche, compresa la causalità, è il seguente:

$$C_2(s) = 288.02 \frac{(s^2 + 10.15s + 483.3)}{s(s^2 + 151.6s + 10560)}.$$

In figura 7 si vede come le specifiche siano rispettate sul diagramma di Bode, mentre in figura 8 è riportata la risposta al gradino del sistema in ciclo chiuso. Come si può osservare le specifiche risultano rispettate. La f.d.t. del sistema in anello chiuso complessiva è la seguente:

$$G_{cl} = \frac{1.5827 \cdot 10^7 (s + 3.333)^2 (s^2 + 10.15s + 483.3)}{(s + 3.638)(s + 2.832)(s^2 + 11.57s + 359.4)(s^2 + 50.23s + 1793)(s^2 + 183.6s + 12590)}.$$

A.4 Il codice di una funzione che simuli la dinamica discretizzata del controllore, ad esempio implementato come una Matlab function, è riportato di seguito.

```
function out = controllore(in)
% definizione del controllore
s = tf('s');
c = 288.02*(s^2 + 10.15*s + 483.3)/(s*(s^2+151.6*s+10560));
```

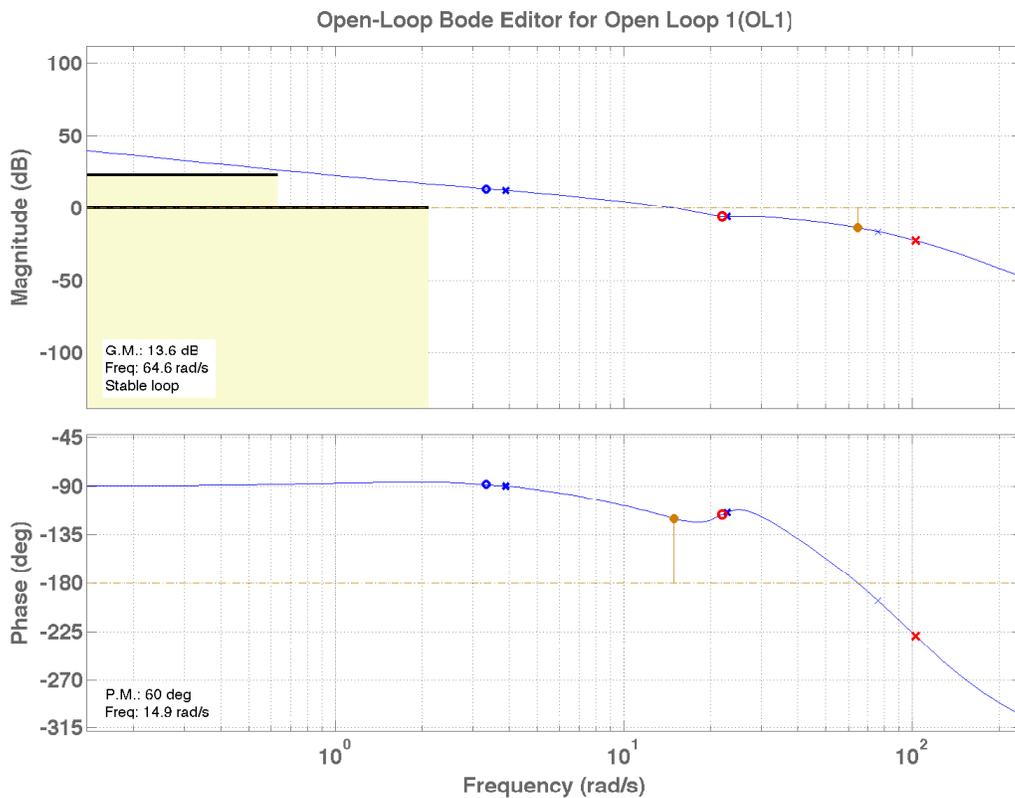


Figura 7: Diagrammi di Bode della f.d.t. $C_2(s)G_2(s)$.

```

% controllore in spazio di stato
C_ss = ss(C);

% errore (in ingresso al controllore)
e = in(1);
% stato del controllore
x = in(2:end);

% campionamento: almeno 5-10 volte piu' veloce degli autovalori
% piu' veloci del controllore - controllando che questo rimanga stabile
Ts = 0.001;

% matrici discretizzate
Ad = C_ss.a*Ts + eye(size(C_ss.a));
Bd = C_ss.b*Ts;
Cd = C_ss.c;
Dd = C_ss.d;

% controllo del sistema (uscita del controllore)
u = Cd*x + Dd*e;
% nuovo stato
x = Ad*x + Bd*e;

out = [u; x];

```

Esso può essere utilizzato per simulare il sistema con controllore chiuso in retroazione con uno schema Simulink come quello di fig. 9. Da notare in particolare il blocco `memory`, necessario per mantenere traccia dello stato del controllore, ed il fatto che il blocco `Matlab-function` collegato al codice presentato ha un campionamento pari a quello del controllore stesso, ovvero 0.001 s.

in Fig. 10

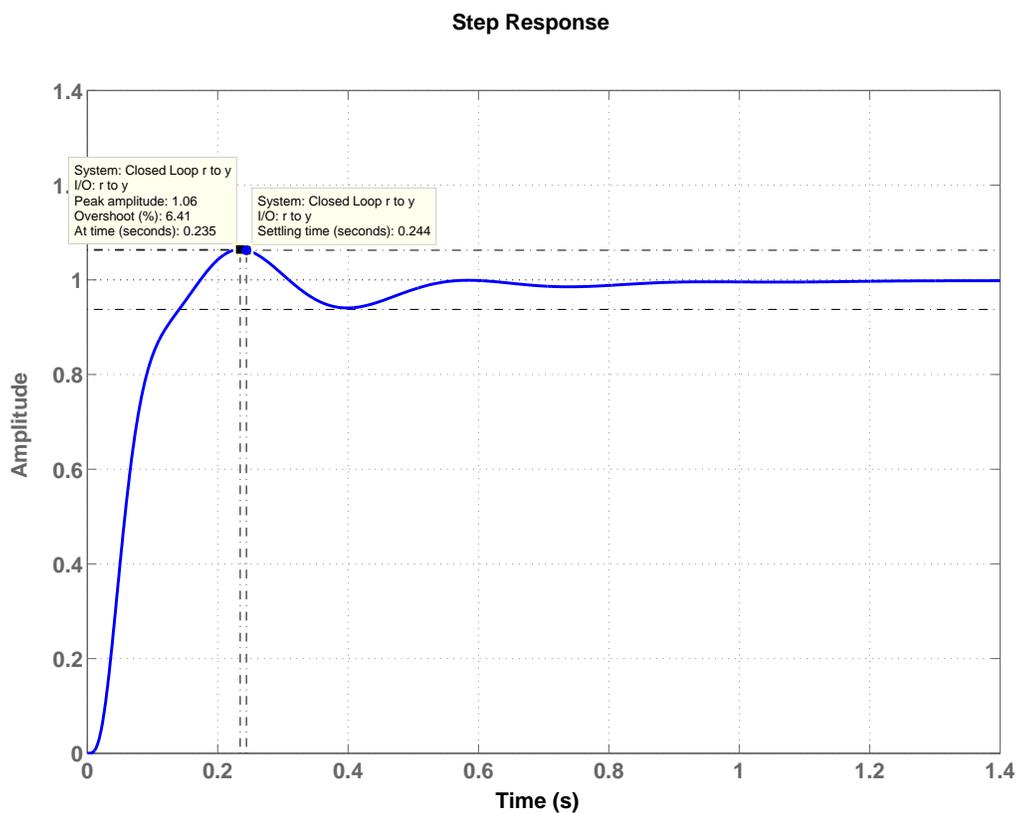


Figura 8: Risposta per ingresso a gradino del sistema controllato.

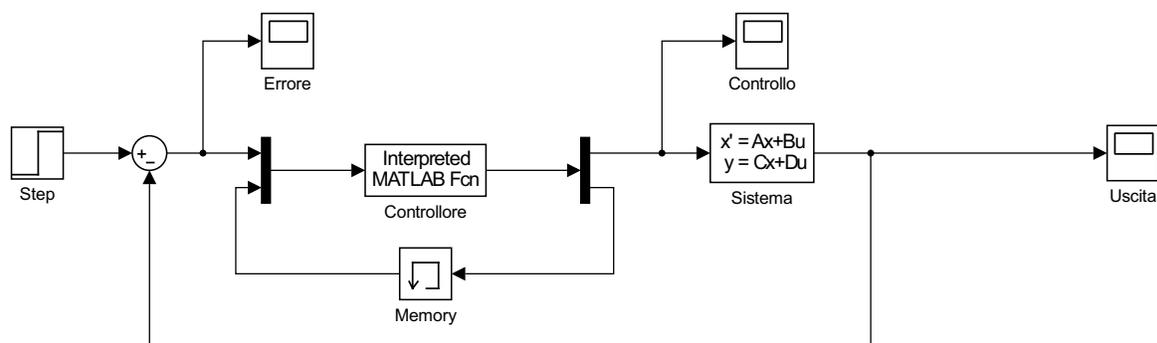


Figura 9: Schema Simulink utilizzabile per simulare la risposta del sistema in ciclo chiuso con il controllore discretizzato.

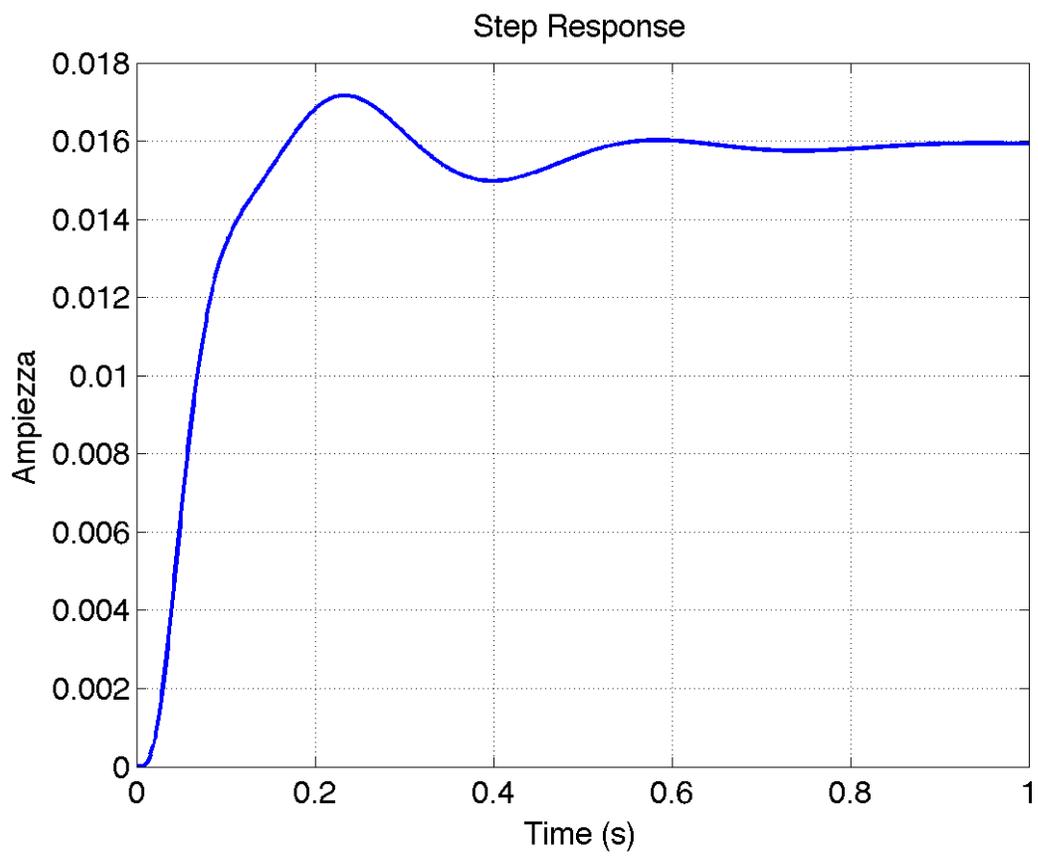


Figura 10: Risposta al gradino del sistema controllato con controllore discretizzato