

Si consideri il sistema meccanico rappresentato in figura 1.

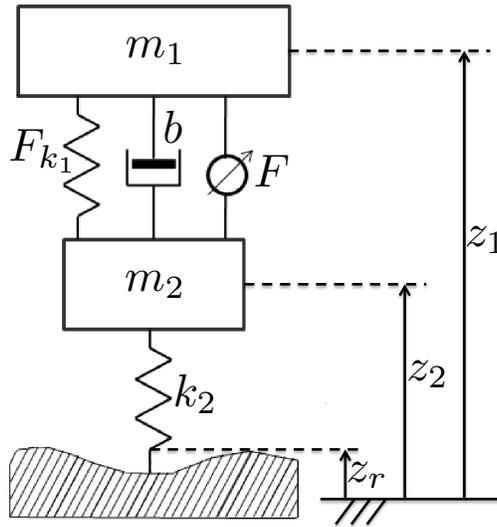


Figura 1: Sistema meccanico

Esso schematizza, secondo il modello *quarter-car*, il funzionamento di una sospensione attiva che verrà poi montata su di un veicolo anfibio. La massa m_2 , detta massa non sospesa, rappresenta la ruota del veicolo ed è collegata a terra attraverso una molla di costante elastica k_2 e lunghezza a riposo l_{20} , che modellano la rigidezza del pneumatico. La massa m_1 , detta invece massa sospesa, rappresenta la cassa del veicolo ed è collegata ad m_2 attraverso una molla non lineare con lunghezza a riposo l_{10} ed uno smorzatore viscoso di costante b (parte passiva della sospensione), nonché un attuatore (parte attiva della sospensione) che può essere utilizzato anche per alzare o abbassare l'altezza della cassa rispetto alla strada. Ai fini del modello, si assume che gli spostamenti delle due masse possono essere soltanto verticali. Si consideri infine la quota z_r della strada come un disturbo agente sul sistema, e la forza F , che può essere generata dall'attuatore, come il controllo a disposizione.

Indicando con z_1 la posizione della massa m_1 e con z_2 la posizione della massa m_2 (vedi figura 1), le equazioni che descrivono il comportamento dinamico del sistema sono:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 + b(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + F_{k_1}(\delta_1) &= F - m_1 g \\ m_2 \ddot{z}_2 + b(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) - F_{k_1}(\delta_1) + k_2 \delta_2 &= -F - m_2 g \end{aligned}$$

dove $\delta_1 = z_1 - z_2 - l_{10}$ e $\delta_2 = z_2 - z_r - l_{20}$ sono gli scostamenti complessivi delle molle dalla loro lunghezza a riposo. La forza $F_{k_1}(\delta_1)$ generata dalla molla connessa alla massa m_1 segue la seguente legge:

$$F_{k_1}(\delta_1) = k_1 \sin\left(4\pi \frac{\delta_1}{l_{10}}\right),$$

dove la variazione ammissibile di δ_1 è nell'intervallo $l_{10} \pm \frac{l_{10}}{4}$.

A.1 Si determinino gli equilibri del sistema a profilo stradale piatto e controllo nullo.

A.2 Supponendo di disporre della misura della posizione z_1 dell'altezza della cassa del veicolo, si determini una rappresentazione in forma di stato del sistema linearizzato intorno all'equilibrio calcolato al punto precedente.

Si considerino i seguenti valori numerici: $b = 500$ N s/m; $k_1 = 3925$ N; $k_2 = 50000$ N/m; $m_1 = 200$ Kg; $m_2 = 50$ Kg; $g = 9.81$ m/s²; $l_{10} = 0.5$ m; $l_{20} = 0.25$ m.

A.3 Si determinino le funzioni di trasferimento tra l'ingresso $u = F$ e l'uscita $y = z_1$, e tra il disturbo $u_d = z_r$ e l'uscita $y = z_1$. Per fare ciò, nel caso in cui sia presente più di un equilibrio, si utilizzi il valore di schiacciamento della molla maggiore, ovvero $\bar{z}_1 - \bar{z}_2$ più piccolo, fra tutti gli equilibri trovati.

Si discuta inoltre la stabilità dell'equilibrio del sistema linearizzato e se ne dia un'interpretazione fisica.

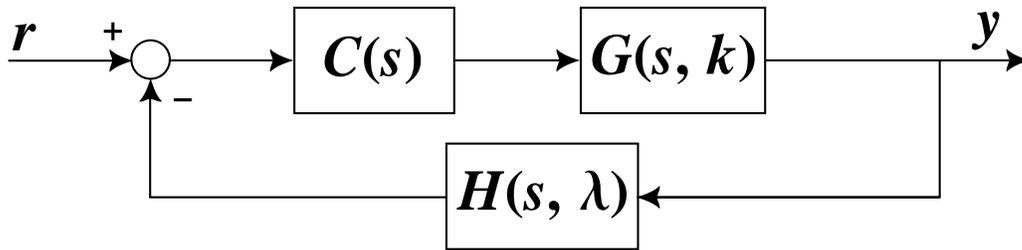
A.4 Si determini una legge di controllo per F che agisca in modo da garantire che:

- A.4.1** alla richiesta di alzare la cassa di 10 cm (ad esempio per guardare un torrente), ci si porti esattamente in tale posizione senza superarla di oltre 1 cm, e si raggiunga un intervallo di ± 0.5 cm rispetto a tale valore in al più 0.2 sec.
- A.4.2** in corrispondenza di un profilo stradale del tipo $z_r = 0.05 \cos(\alpha p)$ m, dove p è la posizione longitudinale del veicolo in avanzamento (ovvero $p = vt$) e $\alpha = 1$ rad/m una frequenza spaziale, percorso a velocità v nel range $[5, 20]$ m/s, non si abbia (a regime) un'accelerazione verticale superiore a 0.3 m/s^2 che potrebbe danneggiare la strumentazione.

Si riportino quindi:

- il diagramma di Bode con le relative specifiche da rispettare;
- il controllore progettato;
- il diagramma a blocchi del sistema con il controllore progettato;
- la risposta al gradino ottenuta con le caratteristiche significative.

B Si consideri lo schema a blocchi rappresentato in figura .



Siano

$$C(s) = \frac{10s^2 + 100s + 250}{s^2 + 20s + 1000}, \quad G(s, k) = \frac{k}{s^2}, \quad H(s, \lambda) = \frac{s + \lambda}{s + 1},$$

le f.d.t. del controllore, dell'impianto e del sensore di misura, con $k = 20$ e $\lambda = 10$, e si considerino variazioni dei parametri k e λ pari al 50% del loro valore nominale. Si determinino separatamente gli effetti che tali variazioni hanno sull'uscita per frequenze di funzionamento inferiori a 1 rad/s e si discutano i risultati ottenuti.

Soluzione

A.1 Indicando con $x = [z_1 \ z_2 \ \dot{z}_1 \ \dot{z}_2]^T$ il vettore di stato ed imponendo le condizioni di equilibrio, $\dot{x} = 0$ con $z_r = 0$ ed $F = 0$ si ottiene

$$\begin{aligned} k_1 \sin\left(\frac{4\pi(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{l_{10}}\right) &= -gm_1 \\ -k_1 \sin\left(\frac{4\pi(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{l_{10}}\right) + k_2(\bar{z}_2 - l_{20}) &= -gm_2 \end{aligned}$$

da cui si ottengono due possibili equilibri

$$\begin{cases} \bar{z}_1 = -\frac{l_{10}\left(\sin^{-1}\left(\frac{gm_1}{k_1}\right) + 2k\pi\right)}{4\pi} + l_{10} + \bar{z}_2 \\ \bar{z}_2 = l_{20} - \frac{g(m_1 + m_2)}{k_2} \end{cases} \quad (1)$$

e

$$\begin{cases} \bar{z}_1 = -\frac{l_{10}\left(\pi - \sin^{-1}\left(\frac{gm_1}{k_1}\right) + 2k\pi\right)}{4\pi} + l_{10} + \bar{z}_2 \\ \bar{z}_2 = l_{20} - \frac{g(m_1 + m_2)}{k_2} \end{cases} \quad (2)$$

Considerando il vincolo per δ_1 di stare all'interno della fascia $l_{10} \pm \frac{l_{10}}{4}$, il valore da considerare per k è -2 , e, sostituendo i valori numerici, si ottiene

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 0.47917 \\ \bar{z}_1 &= 1.1801 \\ \bar{z}_2 &= 0.20095 \\ \bar{z}_1 - \bar{z}_2 &= 0.97917 \end{aligned} \quad (3)$$

per l'equilibrio (1), mentre per quello (2) si ha

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 0.39583 \\ \bar{z}_1 &= 1.0968 \\ \bar{z}_2 &= 0.20095 \\ \bar{z}_1 - \bar{z}_2 &= 0.89583. \end{aligned} \quad (4)$$

che corrisponde dunque all'equilibrio di interesse attorno al quel effettuare la linearizzazione.

A.2 Indicando con $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4]^T = [z_1 - \bar{z}_1, z_2 - \bar{z}_2, \dot{z}_1, \dot{z}_2]^T$, il vettore delle variabili di stato traslate nell'equilibrio e con $\tilde{u} = [\tilde{u}_1, \tilde{u}_2]^T = [F, z_r]^T$ il vettore degli ingressi anch'essi traslati, il sistema non lineare scritto in forma di stato traslato attorno all'equilibrio è

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = \frac{-\sin\left(\frac{4\pi(\bar{z}_1 - \bar{z}_2 + x_1 - x_2)}{l_{10}}\right) k_1 - gm_1 + u_1 - bx_3 + bx_4}{m_1} \\ \dot{x}_4 = \frac{\sin\left(\frac{4\pi(\bar{z}_1 - \bar{z}_2 + x_1 - x_2)}{l_{10}}\right) k_1 - gm_2 - u_1 - k_2(\bar{z}_2 + x_2 - l_{20} - u_2) + bx_3 - bx_4}{m_2} \end{cases} \quad (5)$$

Linearizzando il sistema attorno all'origine, essendo questo l'equilibrio delle nuove variabili \tilde{x} e \tilde{u} , si ottiene il sistema linearizzato approssimato nella consueta forma di stato

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + B\tilde{u} \\ y &= C\tilde{x} \end{aligned} \quad (6)$$

dove,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{4\pi \cos\left(\frac{4\pi(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{l_{10}}\right) k_1}{l_{10} m_1} & \frac{4\pi \cos\left(\frac{4\pi(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{l_{10}}\right) k_1}{l_{10} m_1} & -\frac{b}{m_1} & \frac{b}{m_1} \\ \frac{4\pi \cos\left(\frac{4\pi(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{l_{10}}\right) k_1}{l_{10} m_2} & \frac{4\pi \cos\left(\frac{4\pi(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{l_{10}}\right) k_1 + k_2 l_{10}}{l_{10} m_2} & \frac{b}{m_2} & -\frac{b}{m_2} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ -\frac{1}{m_2} & \frac{k_2}{m_2} \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ 0].$$

Sostituendo i valori numerici assegnati, e considerando il punto di equilibrio di interesse si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B\tilde{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 427.186 & -427.186 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ -1708.74 & 708.744 & 10 & -10 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{200} & 0 \\ -\frac{1}{50} & 1000 \end{bmatrix} \tilde{u}, \\ y &= Cx = [1 \ 0 \ 0 \ 0] x. \end{aligned} \quad (7)$$

A.3 La funzione di trasferimento tra l'ingresso di controllo \tilde{u}_1 (la forza data dall'attuatore) e l'uscita $y = \tilde{x}_1$ (la posizione della massa sospesa) è

$$G_u(s) = \frac{0.005(s^2 + 1000)}{(s + 44.31)(s - 32.51)(s^2 + 0.6945s + 296.5)}. \quad (8)$$

La funzione di trasferimento tra l'ingresso di disturbo \tilde{u}_2 (il profilo stradale) e l'uscita $y = \tilde{x}_1$ è

$$G_d(s) = \frac{2500(s - 170.9)}{(s + 44.31)(s - 32.51)(s^2 + 0.6945s + 296.5)}. \quad (9)$$

Infine, in figura 2 è riportato il diagramma a blocchi rappresentante il sistema con due ingressi (di controllo F e di disturbo z_r) e l'uscita di misura $y = z_1$. Il sistema possiede un polo a parte reale positiva e per

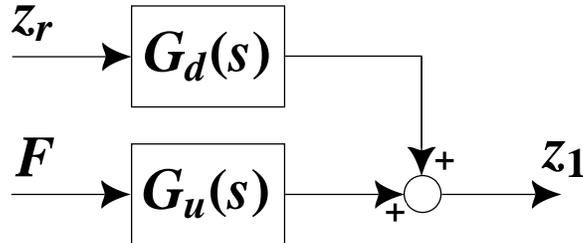


Figura 2: Diagramma a blocchi del sistema.

tale motivo è instabile. Questo è dovuto alla caratteristica non lineare della molla che comporta, durante la linearizzazione, un valore negativo del relativo coefficiente.

A.4 Poiché il sistema risulta instabile, si procede preliminarmente con il progetto di un controllore stabilizzante $C_1(s)$ per poi soddisfare le specifiche con un secondo controllore $C_2(s)$, realizzando quindi un controllo in cascata come rappresentato in figura 3.

Per la progettazione del controllore stabilizzante si utilizza il luogo delle radici. Come si osserva dalla figura 4, esso presenta un ramo che è completamente contenuto nel semipiano positivo. È necessario quindi attrarre questo ramo nel semipiano sinistro. Ciò può essere fatto inserendo in posizione opportuna due zeri complessi coniugati e a più alte frequenze due poli per rispettare la causalità. Un possibile controllore stabilizzante in grado di realizzare ciò è

$$C_1(s) = -\frac{9.5e06s^2 + 2.203e08s + 3.149e10}{s^2 + 200s + 10000},$$

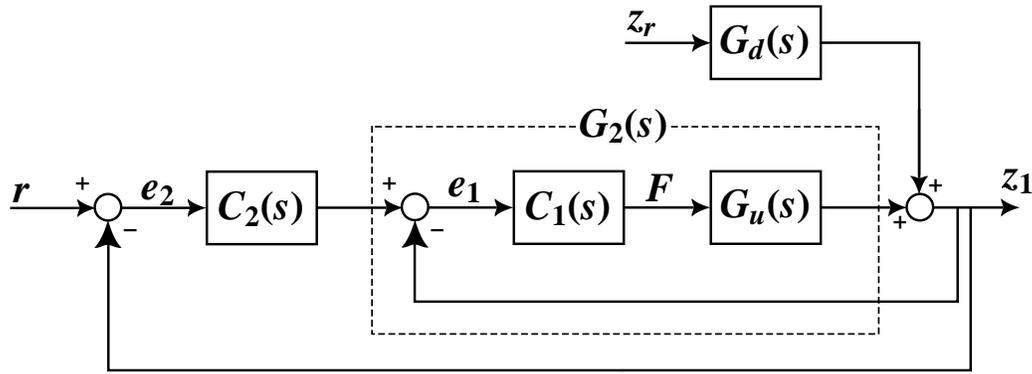


Figura 3: Diagramma a blocchi del sistema complessivo.

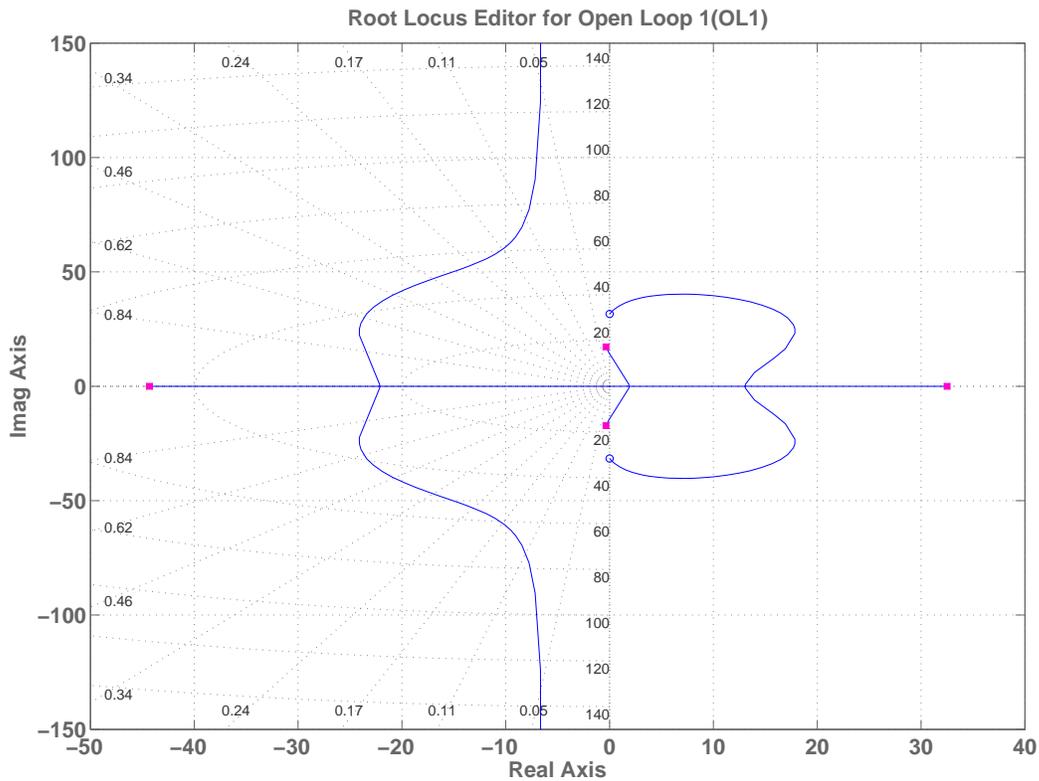


Figura 4: Luogo delle radici del sistema.

che è costituito da una rete anticipatrice complessa. In figura 5 è rappresentato il luogo delle radici del sistema $C_1(s)G_u(s)$, ovvero in seguito al progetto del controllore stabilizzante $C_1(s)$.

Il sistema una volta chiuso in retroazione con il controllore stabilizzante $C_1(s)$ è

$$G_2(s) = \frac{47500(s^2 + 1000)(s^2 + 23.19s + 3315)}{(s^2 + 2.183s + 1292)(s^2 + 2.81s + 2181)(s^2 + 207.5s + 5.435e04)}.$$

Adesso è dunque possibile progettare un controllore per soddisfare le specifiche. Tale controllore sarà del tipo

$$C(s) = \frac{K}{s^t} C_0(s), \text{ con } C_0(0) \geq 1.$$

A.4.1 Si richiede che la cassa del veicolo raggiunga esattamente a regime una posizione di 10 cm sopra quella di equilibrio, ovvero che l'uscita del sistema linearizzato si porti ad un valore di 0.1, con una

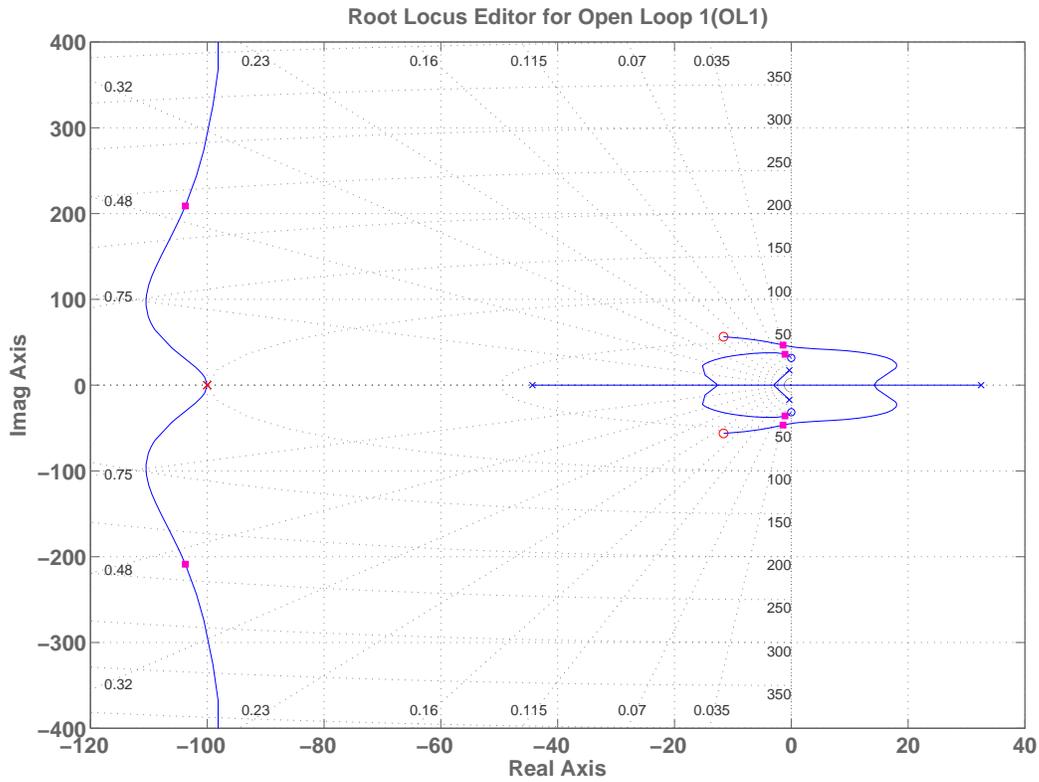


Figura 5: Luogo delle radici del sistema con controllore stabilizzante.

sovralongazione massima di 1 cm (il 10%), e con un tempo di assestamento al 5% ($100 \frac{0.5 \text{ cm}}{10 \text{ cm}}$) di 0.2 sec.

La specifica sull'errore nullo a regime richiede che il sistema sia almeno di tipo 1, ovvero $t \geq 1$.

Si può poi procedere tentando di progettare un controllore capace di rendere la f.d.t. in anello chiuso ben approssimabile con un sistema a due poli dominanti per il quale le specifiche si traducono come segue:

$$S_{\%} = 100 e^{-\frac{\pi \delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} \leq 10\% \quad \Rightarrow \quad \delta > 0.6 \quad \Rightarrow \quad M_{\phi} > 60^{\circ}$$

$$\omega_T > \frac{3}{\delta T_{a5}} = 25 \text{ rad/s.}$$

A.4.2 Si richiede che un disturbo (profilo stradale) del tipo $z_r = 0.05 \cos(\alpha vt)$ non produca a regime un effetto sulla seconda derivata dell'uscita superiore a 0.3 m/sec^2 . Per soddisfare tale specifica, si ricorre al Teorema della Risposta Armonica. La funzione di trasferimento fra la trasformata $D(j\omega)$ del disturbo u_d e la trasformata dell'uscita $Y(j\omega)$ è data da

$$Y(j\omega) = \frac{G_{d2}(j\omega)}{1 + C_2(j\omega)G_2(j\omega)} D(j\omega) = \bar{G}(j\omega) D(j\omega), \quad (10)$$

dove G_{d2} altro non è che la f.d.t. fra il disturbo e l'uscita, una volta inserito il controllore stabilizzante

$$G_{d2} = \frac{G_d}{1 + C_1 G_u}. \quad (11)$$

Inoltre, siccome il vincolo è posto sull'accelerazione, ovvero la derivata seconda dell'uscita, allora

$$s^2 \bar{G}(j\omega) D(j\omega) \leq 0.3. \quad (12)$$

Prendendo come valori cautelativi $\cos(\omega t + \angle \bar{G}(j\omega)) = 1$ per frequenze nel range $\omega \in [5, 20]$ rad/sec ($\omega = \alpha v$ si trasforma facilmente in quel range), si ottiene

$$\frac{s^2 G_{d2}}{1 + C_2 G_2} |z_r| \leq 0.3. \quad (13)$$

Considerando l'approssimazione generalmente valida alle basse frequenze di $(1 + C_2 G_2) \simeq C_2 G_2$ e, prendendo i moduli, si può opportunamente rielaborare l'equazione (13) ed ottenere

$$\|C_2 G_2\| \geq \|s^2 G_{d2}\| \frac{|z_r|}{0.3}. \quad (14)$$

Dalla figura 6 si vede che il massimo modulo di $s^2 G_{d2}$ nelle frequenze d'interesse è 26.3 dB e, siccome $20 \log_{10} \frac{0.05}{0.3} \simeq -15.6$ dB, il vincolo sul guadagno d'anello diventa

$$\|C_2 G_2\| \geq 26.3 + (-15.6) = 10.7 \text{ dB} \quad \omega \in [5, 20] \text{ rad/sec.} \quad (15)$$

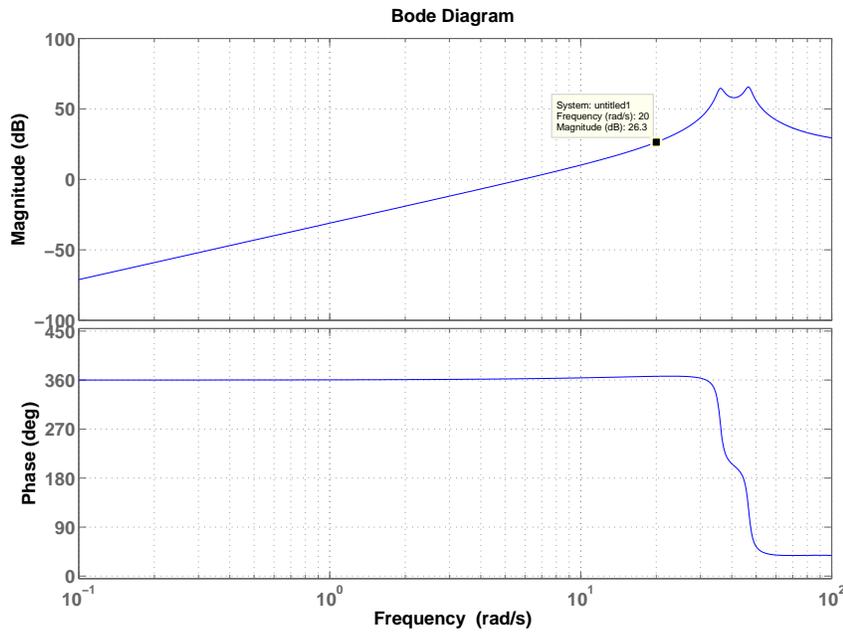


Figura 6: Diagramma di Bode della f.d.t. $G_{d2}(s)$.

La figura 7 mostra il diagramma di Bode di $G(s)$ con le specifiche sulla banda passante e sul guadagno che devono essere rispettate.

Un controllore che permette al sistema di rispettare tutte le specifiche, compresa la causalità, è il seguente:

$$C(s) = \frac{0.76521(s + 146.6)}{s}.$$

Il controllore può essere progettato inserendo come prima cosa il polo nell'origine, necessario per garantire errore a regime nullo. Al fine poi di rispettare le specifiche in bassa frequenza è necessario alzare opportunamente il guadagno d'anello. Con un tale controllore la banda passante sarebbe ampiamente rispettata, ma non il margine di fase. Si potrebbe procedere con l'inserimento di una rete anticipatrice in corrispondenza della pulsazione di taglio. Tuttavia, si può osservare che l'inserimento di uno zero immediatamente prima del taglio garantisce un $MF > 60^\circ$, e il controllore è causale vista la presenza del polo nell'origine.

In figura 9 è riportata la risposta al gradino. Come si può osservare, il tentativo di progettare un controllore che renda il sistema in anello chiuso ben approssimabile con un sistema a due poli dominanti non è riuscito

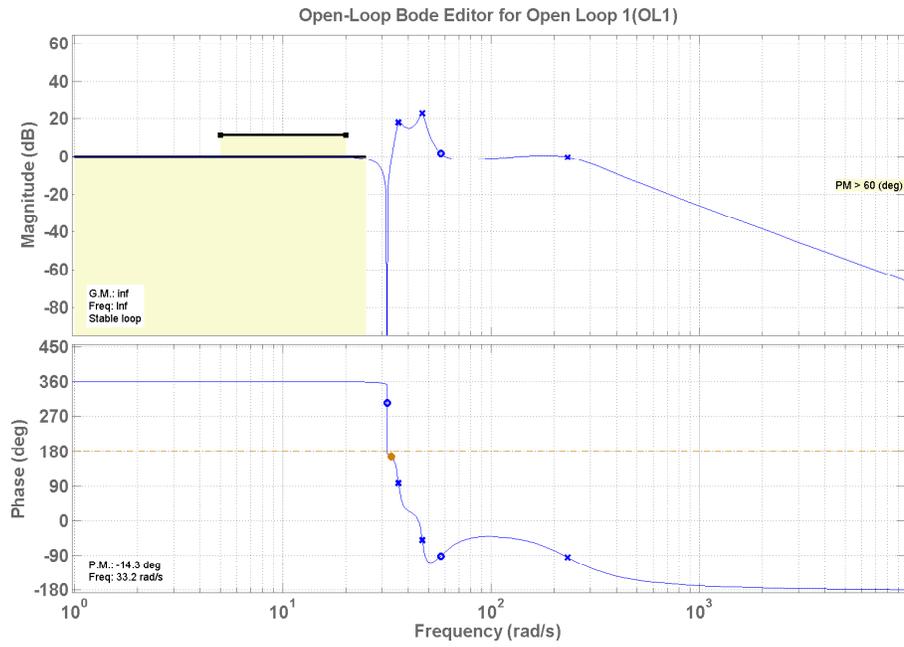


Figura 7: Diagrammi di Bode della f.d.t. $G(s)$ con le specifiche sulla banda passante e sul guadagno d'anello.

perfettamente, nonostante ciò le specifiche risultano rispettate. La f.d.t. del sistema in anello chiuso complessiva è la seguente:

$$G_c = \frac{36347.475(s + 146.6)(s^2 + 1000)(s^2 + 23.19s + 3315)}{(s + 63.28)(s^2 + 1.328s + 1011)(s^2 + 12.77s + 3480)(s^2 + 135.1s + 7.936e04)} \quad (16)$$

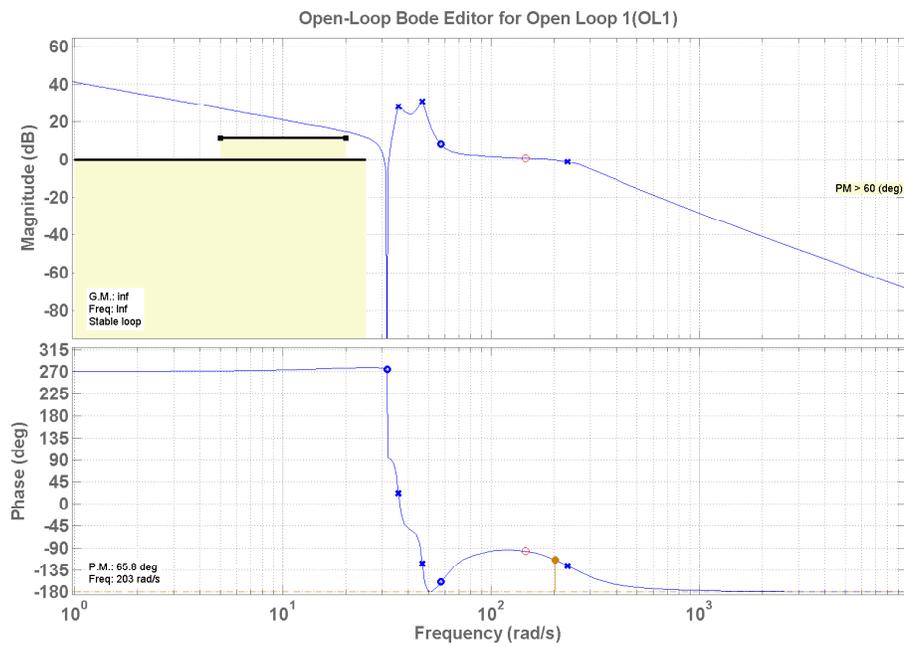


Figura 8: Diagrammi di Bode della f.d.t. $C(s)G(s)$.

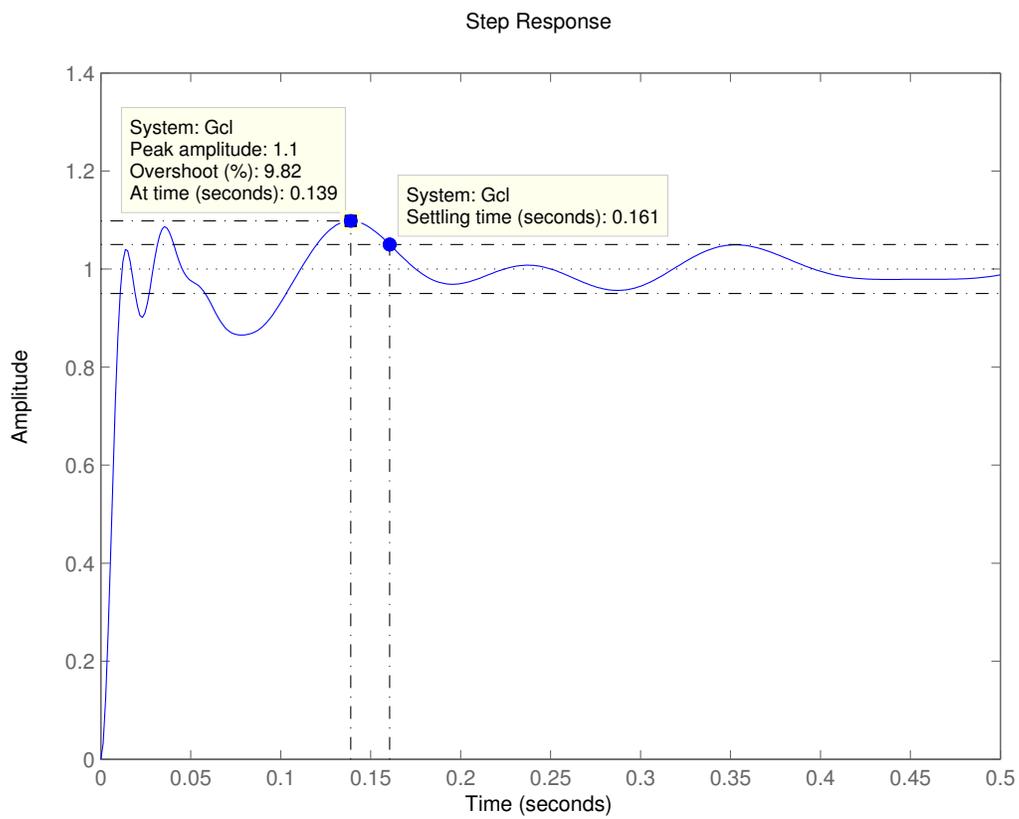


Figura 9: Risposta per ingresso a gradino del sistema controllato.

B Per prima cosa, ci si può calcolare la funzione di trasferimento dal riferimento all'uscita che è pari a

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = G_c(s) = \frac{C(s)G(s, k)}{1 + C(s)G(s, k)H(s, \lambda)}, = \frac{10k(s+1)(s+5)^2}{10k(s+5)^2(\lambda+s) + (s+1)(s(s+20) + 1000)s^2} \quad (17)$$

L'effetto che si ha sull'uscita per variazioni parametriche dell'impianto e/o del sensore è pari a

$$\frac{\Delta Y(s)}{Y(s)} = \frac{\Delta G_c(s)}{G_c(s)} \simeq S(s) \frac{\Delta G(s)}{G(s)} - T(s) \frac{\Delta H(s)}{H(s)} \quad (18)$$

dove

$$S(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s, \hat{k})H(s, \hat{\lambda})} \quad (19)$$

e

$$T(s) = \frac{C(s)G(s, \hat{k})H(s, \hat{\lambda})}{1 + C(s)G(s, \hat{k})H(s, \hat{\lambda})} \quad (20)$$

sono, rispettivamente, la sensitività e sensitività complementare dell'anello.

Ammettendo che i parametri k e λ possano variare soltanto singolarmente, i due contributi precedentemente citati possono essere studiati separatamente.

- **Effetto di una variazione di k** Una variazione del solo parametro k genera un effetto del tipo

$$S(s) \frac{\Delta G(s)}{G(s)} \simeq S(s) \left. \frac{\partial G(s, k)}{\partial k} \right|_{\hat{k}} \frac{\hat{k}}{G(s, \hat{k})} \frac{\Delta k}{\hat{k}} = S(s) \frac{1}{s^2} \frac{\hat{k}}{\hat{k}} \frac{\Delta k}{\hat{k}} = S(s) \frac{\Delta k}{\hat{k}}, \quad (21)$$

ovvero tutto l'effetto della variazione parametrica, pesata dalla funzione di sensitività dell'impianto, viene riversata sull'uscita. Valutando questa funzione per frequenze fino ad 1 rad/sec si ottiene un valore massimo di -37 dB.

- **Effetto di una variazione di λ** Una variazione del solo parametro λ genera, invece, un effetto del tipo

$$T(s) \frac{\Delta H(s)}{H(s)} \simeq T(s) \left. \frac{\partial H(s, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\hat{\lambda}} \frac{\hat{\lambda}}{H(s, \hat{\lambda})} \frac{\Delta \lambda}{\hat{\lambda}} = T(s) \frac{1}{s+1} \frac{\hat{\lambda}}{s+\hat{\lambda}} \frac{\Delta \lambda}{\hat{\lambda}} = T(s) \frac{\hat{\lambda}}{s+\hat{\lambda}} \frac{\Delta \lambda}{\hat{\lambda}}, \quad (22)$$

ovvero l'effetto di una variazione parametrica sui sensori viene riportato sull'uscita pesato dalla funzione di sensitività complementare. Valutando questa funzione per frequenze fino ad 1 rad/sec si ottiene un valore massimo di -5.84 dB.