

Si consideri il modello dinamico del sistema meccanico rappresentato in figura 1.

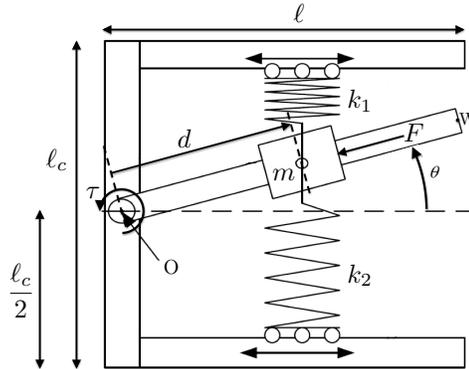


Figura 1: Sistema meccanico

Il sistema è composto da un corpo di massa m che può scorrere senza attrito su di un'asta incernierata al telaio a distanza $\ell_c/2$ dalla base del telaio, dove ℓ_c è l'altezza complessiva del telaio stesso (vedi figura 1). L'asta è azionata da un motore e la sua rotazione è soggetta ad attrito viscoso b ; il corpo di massa m , soggetto ad una forza di disturbo F , è connesso a due molle di costanti k_1 e k_2 le quali sono a loro volta connesse a due carrelli liberi di scivolare senza attrito su due guide realizzate sul telaio. La lunghezza dell'asta \overline{OW} e la larghezza del telaio sono pari ad ℓ .

Indicando con θ l'angolo formato dall'asta con la direzione orizzontale e con d la distanza lungo l'asta dal punto O del corpo di massa m (vedi figura 1), le equazioni che descrivono il comportamento dinamico del sistema sono:

$$\begin{aligned} \ddot{d} &= d\dot{\theta}^2 - \frac{(k_1 + k_2)d \sin^2(\theta)}{m} - g \sin(\theta) - \frac{F}{m} \\ \ddot{\theta} &= -\frac{2d\dot{\theta}}{d} - \frac{(k_1 + k_2) \sin(2\theta)}{2m} - \frac{g \cos(\theta)}{d} + \frac{\tau - b\dot{\theta}}{m d^2} \end{aligned}$$

- A** Si determinino gli equilibri per $\theta = 0$ e $d = \bar{d}$ costante. Si dica inoltre per quali valori di \bar{d} tali equilibri hanno senso fisico.
- B** Supponendo di disporre della misura dell'angolo θ e della lunghezza d , e di poter agire sulla coppia τ , si determini una rappresentazione in forma di stato del sistema linearizzato intorno all'equilibrio calcolato al punto precedente.

Si considerino i seguenti valori numerici: $k_1 = 3 \text{ N/m}$; $k_2 = 2 \text{ N/m}$; $b = 0.5 \text{ N m s}$; $\ell = 2.2 \text{ m}$; $\ell_c = 5 \text{ m}$; $m = 1 \text{ Kg}$; $g = 9.81 \text{ m/s}^2$; $\bar{d} = 1 \text{ m}$.

- C** Si determinino le funzioni di trasferimento tra l'ingresso $u = \tau$ e l'uscita $y = d$, e tra il disturbo $u_d = F$ e l'uscita $y = d$. Si discuta inoltre la stabilità dell'equilibrio del sistema linearizzato e se ne dia un'interpretazione fisica.
- D** Si determini una legge di controllo per τ che agisca in modo da garantire che:
- D.1)** partendo dalle condizioni di equilibrio, l'uscita $y = d$ che descrive la posizione della massa sull'asta raggiunga esattamente un valore pari a 2 m senza mai superare la lunghezza dell'asta \overline{OW} e entrando, senza più uscirne, nell'intervallo $[1.98, 2.02] \text{ m}$ entro un tempo non superiore a 300 ms;
- D.2)** l'effetto di un disturbo di forza costante $F = \bar{F}$ non provochi a regime alcun effetto sull'uscita; si giustifichi la risposta applicando il teorema del valore finale.

Si disegni il diagramma a blocchi del sistema con il controllore progettato; si riporti esplicitamente il controllore ottenuto, il diagramma di Bode con le relative specifiche da rispettare e la risposta al gradino ottenuta con le caratteristiche significative.

Soluzione

A Sostituendo nelle equazioni della dinamica fornite nel testo i valori dell'equilibrio ed imponendo le condizioni di equilibrio, ovvero $\theta = \bar{d} = \bar{\theta} = \bar{d} = \bar{\theta} = 0$, $d = \bar{d}$, si ottiene

$$\begin{aligned} \bar{F} &= 0 \\ \bar{\tau} &= m g \bar{d} \end{aligned} \quad (1)$$

dove il braccio per $\bar{\tau}$ è proprio \bar{d} in quanto è nullo l'angolo θ (tutta l'azione della forza peso può essere controbilanciata dalla coppia).

Nonostante nelle equazioni dinamiche il valore d compaia in alcuni termini a denominatore, tale soluzione ha senso fisico anche per $\bar{d} = 0$. In tal caso infatti il centro di massa del corpo è in una posizione sovrapposta al centro di rotazione, richiedendo, per equilibrare la forza peso in corrispondenza di $\theta = 0$, una coppia nulla.

B Indicando con $\tilde{\xi} = [\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3, \tilde{\xi}_4]^T = [d - \bar{d}, \theta - \bar{\theta}, \dot{d}, \dot{\theta}]^T$ le variabili di stato traslate nell'equilibrio generico e con $\tilde{u} = [\tilde{u}_1, \tilde{u}_2]^T = [\tau - \bar{\tau}, F]^T$ il vettore degli ingressi, il sistema non lineare traslato nell'equilibrio calcolato al punto precedente è

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\xi}}_1 = \tilde{\xi}_3 \\ \dot{\tilde{\xi}}_2 = \tilde{\xi}_4 \\ \dot{\tilde{\xi}}_3 = (\bar{d} + \tilde{\xi}_1)\tilde{\xi}_4^2 - \frac{k_{\text{tot}}(\bar{d} + \tilde{\xi}_1)\sin^2(\bar{\theta} + \tilde{\xi}_2)}{m} - g\sin(\bar{\theta} + \tilde{\xi}_2) - \frac{\tilde{u}_2}{m} \\ \dot{\tilde{\xi}}_4 = -\frac{2\tilde{\xi}_3\tilde{\xi}_4}{\bar{d} + \tilde{\xi}_1} - \frac{k_{\text{tot}}\sin(2(\bar{\theta} + \tilde{\xi}_2))}{2m} - \frac{g\cos(\bar{\theta} + \tilde{\xi}_2)}{(\bar{d} + \tilde{\xi}_1)} + \frac{\tilde{u}_1 - b\tilde{\xi}_4}{m(\bar{d} + \tilde{\xi}_1)^2} \end{cases} \quad (2)$$

dove è stata fatta la sostituzione $k_1 + k_2 = k_{\text{tot}}$.

Il sistema linearizzato approssimato di tale sistema attorno al nuovo punto di equilibrio delle nuove variabili di stato $\tilde{\xi}$, ovvero l'origine, è

$$\dot{\tilde{\xi}} = A\tilde{\xi} + B\tilde{u}$$

dove,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_{\text{tot}}\sin^2(\bar{\theta})}{m} & -\frac{\bar{d}k_{\text{tot}}\sin(2\bar{\theta})}{m} - g\cos(\bar{\theta}) & 0 & 0 \\ \frac{g\cos(\bar{\theta})}{\bar{d}} - \frac{2\tau}{\bar{d}^3m} & \frac{g\sin(\bar{\theta})}{\bar{d}} - \frac{k_{\text{tot}}\cos(2\bar{\theta})}{m} & 0 & -\frac{b}{\bar{d}^2m} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m} \\ \frac{1}{m\bar{d}^2} & 0 \end{bmatrix}.$$

C Sostituendo i valori numerici assegnati si ottiene:

$$\dot{\tilde{\xi}} = A\tilde{\xi} + B_1\tilde{u}_1 + B_2\tilde{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -9.81 & 0 & 0 \\ -9.81 & -5 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\xi}_1 \\ \tilde{\xi}_2 \\ \tilde{\xi}_3 \\ \tilde{\xi}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tilde{u}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{u}_2$$

$$y = C\tilde{\xi} = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \tilde{\xi}.$$

La funzione di trasferimento tra l'ingresso di controllo $u = \tilde{u}_1$ (ovvero la coppia agente sull'asta) e l'uscita y (ovvero la posizione della massa sull'asta) è

$$G_u(s) = -\frac{9.81}{(s + 2.861)(s - 2.672)(s^2 + 0.3111s + 12.59)}. \quad (3)$$

La funzione di trasferimento presenta 2 poli complessi coniugati e un polo reale a parte reale negativa, e un polo reale a parte reale positiva. Il sistema risulta quindi instabile.

La funzione di trasferimento tra l'ingresso di disturbo \tilde{u}_2 e l'uscita y è

$$G_d(s) = -\frac{s^2 + 0.5s + 5}{(s + 2.861)(s - 2.672)(s^2 + 0.3111s + 12.59)}. \quad (4)$$

Infine, in figura 2) è riportato il diagramma a blocchi rappresentante il sistema con due ingressi (di controllo τ e di disturbo F) e l'uscita di misura $y = d$.

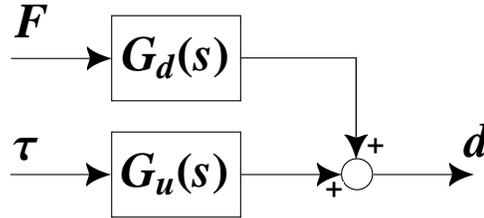


Figura 2: Diagramma a blocchi del sistema.

D Siccome il sistema in anello aperto risulta essere instabile, prima di progettare un controllore in grado di soddisfare sia le specifiche statiche che quelle dinamiche si procede con il progetto di un primo controllore stabilizzante C_1 come riportato in figura 3, per realizzare successivamente un controllo in cascata

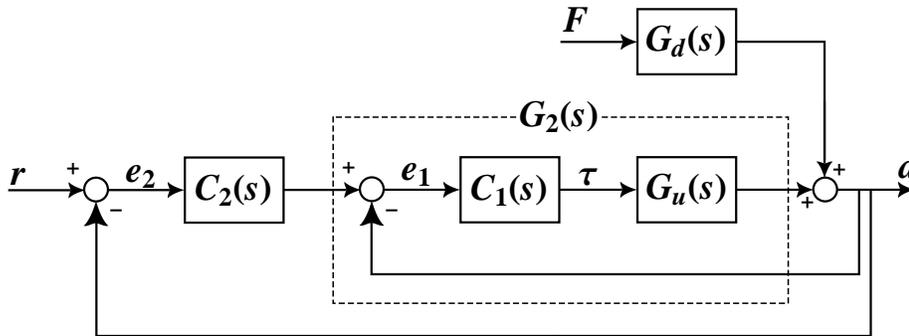


Figura 3: Diagramma a blocchi del sistema (controllo in cascata).

La progettazione di un controllore stabilizzante si può effettuare utilizzando la tecnica del Luogo delle Radici. Il Luogo (inverso) delle Radici di G_u è riportato in figura 4.

Per stabilizzare il sistema è possibile utilizzare una rete anticipatrice con zeri complessi coniugati posti in corrispondenza dei poli complessi coniugati della G_u ($z_{cs} \approx -0.155 \pm 3.54i$), e due poli in alta frequenza (2 poli coincidenti in $p_{cs} = -150$). In figura 5 è riportato il Luogo delle Radici che ne consegue. La f.d.t. del controllore stabilizzante è

$$C_1(s) = -\frac{17541(s^2 + 0.31s + 12.59)}{(s + 150)^2}, \quad (5)$$

mentre quella dell'anello stabilizzante è

$$G_2(s) = \frac{C_1(s)G_u(s)}{1 + C_1(s)G_u(s)} = -\frac{172075.6(s^2 + 0.31s + 12.59)}{(s^2 + 0.08619s + 0.003724)(s^2 + 300.1s + 2.252e04)(s^2 + 0.3117s + 12.59)}, \quad (6)$$

D Il progetto di un controllore dell'anello esterno nello schema in cascata del tipo

$$C_2(s) = \frac{K_2}{s^t} C_0(s), \text{ con } C_0(0) \geq 1.$$

in grado di soddisfare sia le specifiche statiche che quelle dinamiche può essere effettuato direttamente sui diagrammi di Bode, in quanto la funzione $G_2(s)$ su cui tale controllore agisce è asintoticamente stabile.

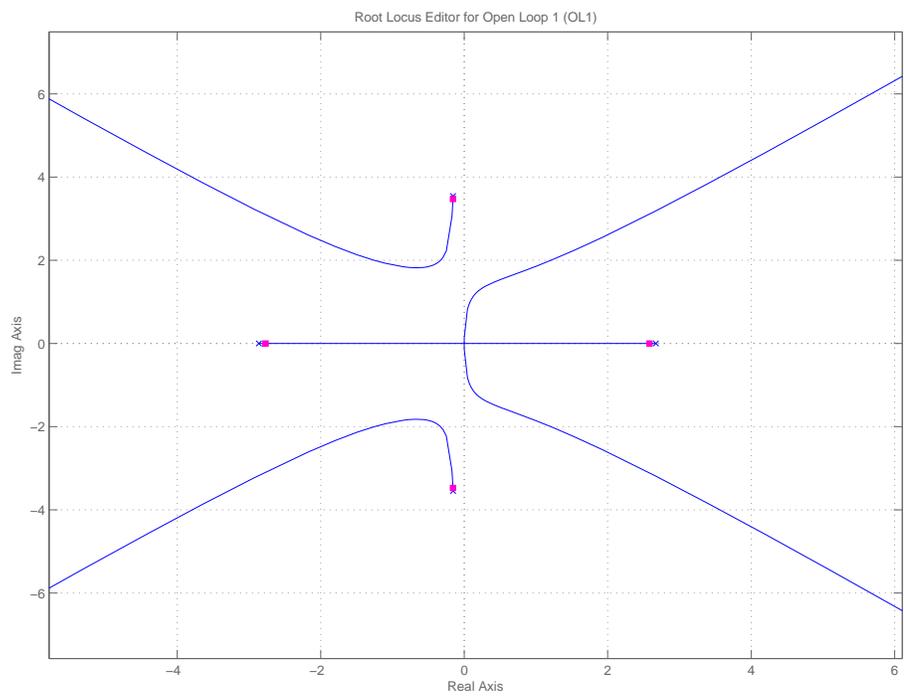


Figura 4: Luogo Inverso delle Radici di G_u .

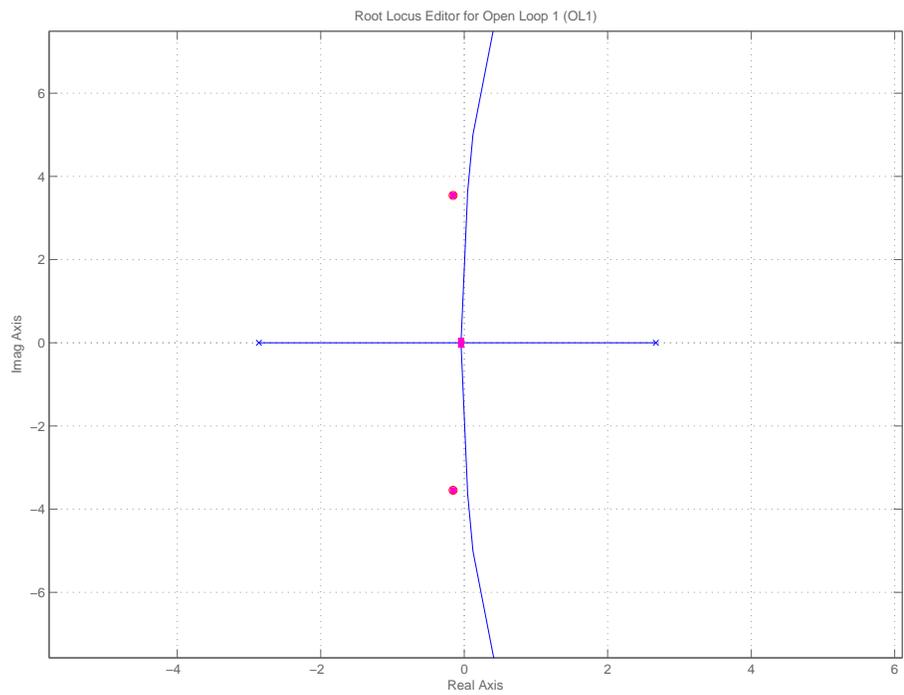


Figura 5: Luogo delle Radici di $C_1 G_u$.

D.1 La specifica richiede che la massa raggiunga esattamente una specifica posizione costante a 2 m dal motore: questo significa che la f.d.t. in anello aperto deve possedere un polo nell'origine. Poichè il sistema non ne possiede già uno, è necessario inserirlo nel controllore, ovvero scegliere $t = 1$. Inoltre, la posizione d della massa sull'asta durante il transitorio non deve mai superare un valore pari alla lunghezza dell'asta stessa $\ell = 2.2$ m: questo si traduce nel richiedere che la sovralongazione massima non può eccedere il 20% del valore di regime (partendo dalla posizione di equilibrio in $\bar{d} = 1$ m, ci si vuol portare in $d = 2$ m, ovvero si ha uno scalino di 1 m di cui $\ell - 2 = 0.2$ m rappresenta il 20%). Infine, si richiede che l'uscita y entri e rimanga all'interno di una fascia $1.98 \leq d \leq 2.02$, ovvero il 2% del valore di regime, in un tempo non superiore a 300 ms.

Si può procedere quindi tentando di progettare un controllore capace di rendere la f.d.t. in anello chiuso ben approssimabile con un sistema a due poli dominanti per il quale le specifiche si traducono come segue:

$$S_{\%} = 100 e^{-\frac{\pi \delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} \leq 20\% \quad \implies \quad \delta > 0.45 \quad \implies \quad MF > 45^\circ$$

$$\omega_T > \frac{4}{\delta T_{a2}} \approx 30 \text{ rad/s}.$$

La figura 6 mostra il diagramma di Bode di $G(s)/s$ con specifica sulla banda passante.

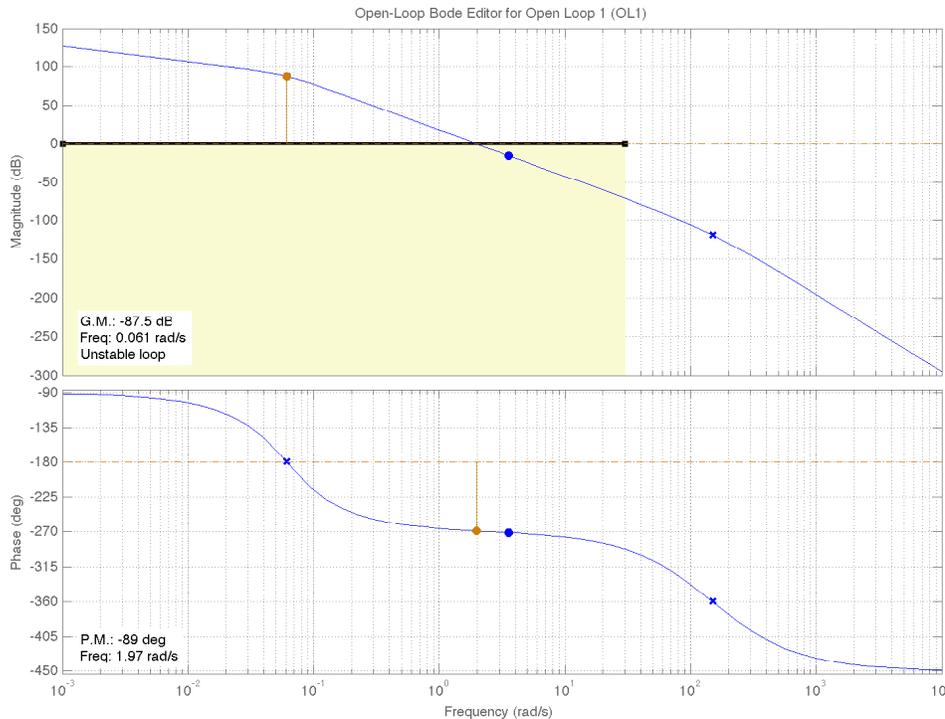


Figura 6: Diagrammi di Bode della f.d.t. $G(s)/s$ con specifica sulla banda passante.

D.2 la specifica richiede l'annullamento di un qualunque disturbo di forza \bar{F} costante sull'uscita. Questo richiederebbe la presenza di un polo nell'origine a monte del punto di ingresso del disturbo stesso. Siccome la f.d.t. del sistema non ne possiede già uno, sarebbe necessario inserirlo nel controllore, ma è già stato inserito per annullare l'errore a regime. Per vedere che questo ragionamento è valido, si considera per il Teorema del Valore Finale la

f.d.t. fra disturbo ed errore, calcolata ad esempio dallo schema a blocchi di figura 3:

$$\begin{aligned}
 e(s) &= -\frac{G_d(s)}{1 + C_2(s)G_2(s)} F(s) = -\frac{G_d(s)}{1 + C_2(s)\frac{C_1(s)G_u(s)}{1+C_1(s)G_u(s)}} F(s) = \\
 &= -\frac{G_d(s) + G_d(s)C_1(s)G_u(s)}{1 + C_1(s)G_u(s) + C_2(s)C_1(s)G_u(s)} F(s) = G_{e,F}(s) F(s).
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Si ha che

$$\lim_{s \rightarrow 0} s G_{e,F}(s) \frac{1}{s} = G_{e,F}(0) = 0
 \tag{8}$$

in quanto si ha un polo per $s = 0$ nella f.d.t. d'anello $1 + C_1(s)G_u(s) + C_2(s)C_1(s)G_u(s)$.

Progetto del controllore.

Un controllore capace di rispettare tutte le specifiche compresa quella sulla causalità è il seguente:

$$C_2(s) = -\frac{123550.3(s^2 + 0.5s + 0.4225)}{s(s^2 + 120s + 2.61e04)}.$$

Il controllore presenta un polo nell'origine necessario per garantire errore nullo a regime e contemporaneamente l'annullamento sull'uscita dell'effetto di un disturbo costante, e una rete anticipatrice complessa coniugata in prossimità della pulsazione di taglio al fine di alzare il margine di fase in tale zona rispettando così la sovralongazione massima. Così facendo, la banda passante del sistema è quella richiesta per rispettare anche le specifiche sul tempo di assestamento. In figura 7 è mostrato il diagramma di Bode della f.d.t. in anello aperto $C(s)G(s)$ con relative specifiche.

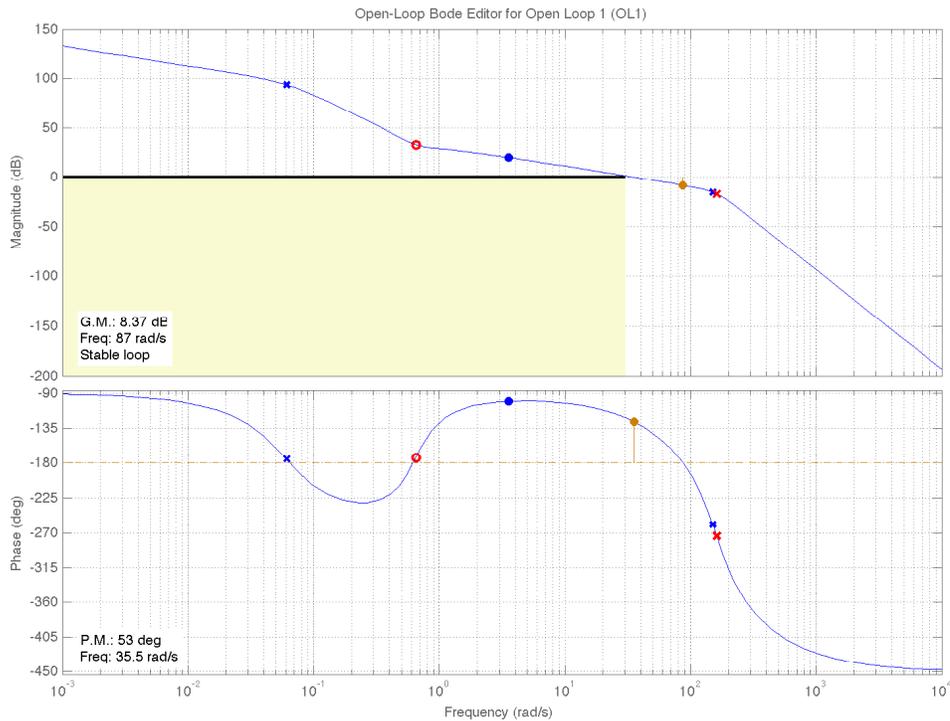


Figura 7: Diagrammi di Bode della f.d.t. $C(s)G(s)$ con specifiche da rispettare.

La f.d.t. in anello chiuso è

$$G_c(s) = \frac{21259986095.9(s^2 + 0.5s + 0.4225)(s^2 + 0.31s + 12.59)}{(s + 200.1)(s^2 + 0.494s + 0.4274)(s^2 + 0.3099s + 12.59)(s^2 + 68.08s + 4008)(s^2 + 151.5s + 2.62e04)}.$$

La risposta al gradino è riportata in figura 8. Come si può osservare, le specifiche risultano ampiamente soddisfatte.

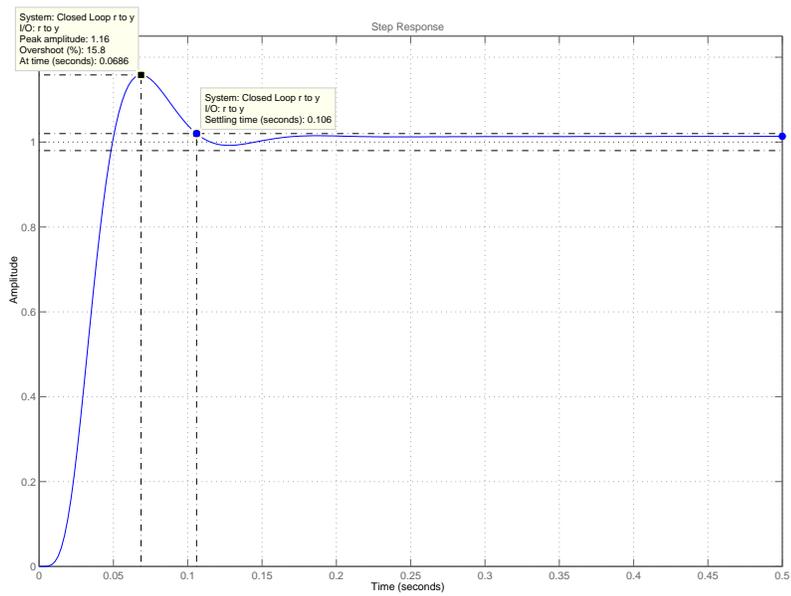


Figura 8: Risposta al gradino del sistema controllato.