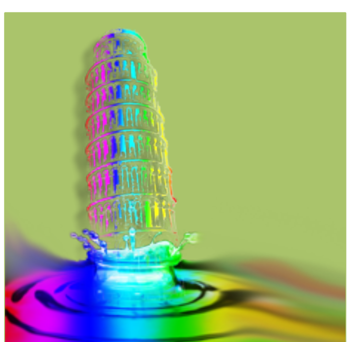
# Introduzione alla Fluidodinamica Computazionale (CFD)


Gianni Orsi

g.orsi@centropiaggio.unipi.it

Centro E. Piaggio
bioengineering and robotics research center

# Fluidodinamica Computazionale (CFD)

**CFD è l'analisi dei sistemi che involvono movimento di fluidi, scambio di calore ed i fenomeni a loro relativi, come ad esempio reazioni chimiche, attraverso l'uso di simulazioni tramite computer.**

CFD = Modello Fisico+ Metodi Numerici

CFD presenta alcuni vantaggi rispetto a solo sperimentale:

- Tempi ridotti di progettazione;
- Analisi o valutazioni preliminari di sistemi in condizioni difficili da replicare;
- Valutazione di grandezze del sistema difficili da misurare direttamente;

Oggi la CFD ha un ruolo importante nell'ingegneria, ed è comunemente utilizzata per complementare studi sperimentali e teorici.

# Campi di applicazione

Ingegneria Industriale:
- Profili alari;
- Profili di flusso intorno ad aerei/ auto/navi;
- Scambiatori di calore;
- Reattori chimici;
- Separatori;
- …

Ambientale:
- Formazione di uragani;
- Dispersione di inquinanti in atmosfera;
- Studio correnti oceaniche;
- …

Biologico:
- Flusso d'aria nei polmoni;
- Flusso sanguigno in arterie/vene;
- …

Organi artificiali:
- Bioreattori;
- Protesi vascolari/valvolari;
- Sistemi di dialisi;
- …

# Leggi di conservazione

- La **massa** del fluido è **conservata**;
- In una particella di  fluido la velocità di variazione della quantità di moto è uguale al totale somma delle forze agenti sulla stessa (**II legge di Newton**);
- La velocità di variazione di energia interna in una particella di fluido è uguale alla somma della quantità di calore e del lavoro agenti sulla stessa (**I principio della termodinamica**)

Ipotesi alla base della CFD:

- Corpo approssimabile come un **CONTINUO:**

  : la struttura molecolare della materia ed il movimento delle singole molecole può essere trascurata;

$$K_n = \frac{\lambda}{L} << 1$$

λ= 'Cammino libero medio' [m]
L= Dimensione caratteristica sistema [m]
$K_n$ = N° di Knudsen

- **PARTICELLA DI FLUIDO**:  la piu piccola porzione di fluido le cui proprietà macroscopiche non sono infuenzate da singole molecole;

- **PROPRIETA' DEL FLUIDO**: funzioni di spazio e tempo (es. u(x,y,x,t);

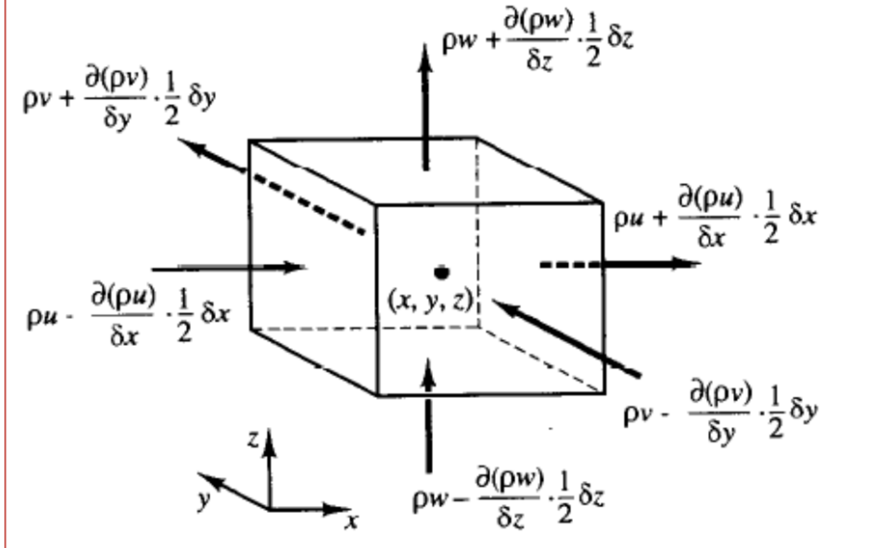
# Conservazione della massa

- Variazione di materia in un elemento fluido

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \delta x \delta y \delta z) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z$$

- Flusso di materia in un elemento fluido

$$\left(\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\tfrac{1}{2}\delta x\right)\delta y \delta z - \left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\tfrac{1}{2}\delta x\right)\delta y \delta z$$
$$+ \left(\rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\tfrac{1}{2}\delta y\right)\delta x \delta z - \left(\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\tfrac{1}{2}\delta y\right)\delta x \delta z$$
$$+ \left(\rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\tfrac{1}{2}\delta z\right)\delta x \delta y - \left(\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\tfrac{1}{2}\delta z\right)\delta x \delta y$$




u,v,w sono le componenti di velocità lungo i versori x,y,z

# Conservazione della massa

Fluido generico

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0 \qquad \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \mathbf{u}) = 0}$$

Fluido incomprimibile

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Ipotesi di densità costante

# Come seguo fluido in movimento?

Approccio **Lagrangiano:**

- La proprietà $\phi$ è funzione della posizione e del tempo: $\phi(x(t),y(t),z(t),t)$

- La **Derivata Materiale*** (seguendo singole particelle di fluido) :

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + u\frac{\partial \phi}{\partial x} + v\frac{\partial \phi}{\partial y} + w\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \,.\, grad\ \phi$$

u,v,w sono le componenti di velocità lungo i versori x,y,z

- Ci sono N>>1 particelle nel vostro fluido!!
- È possibile sviluppare modelli numerici per particelle di fluido(modello Lagrangiano) ma è molto più comune utilizzare approccio **Euleriano.**

* Derivata totale, sostanziale, etc…

# Approccio Euleriano

Approccio **Euleriano**:

- Si valuta la variazione della proprietà $\phi$ in un volume unitario per una particella di fluido;
- Si definisce un volume di controllo infinitesimo e si monitora il campo di $\phi$ che lo attraversa;

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + div(\rho\phi\mathbf{u}) = \rho\left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot grad\ \phi\right] + \phi\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\mathbf{u})\right] = \rho\,\frac{D\phi}{Dt}$$

Velocità di variazione della proprietà $\phi$ per elemento fluido

Flusso della proprietà $\phi$ uscente dall'elemento fluido

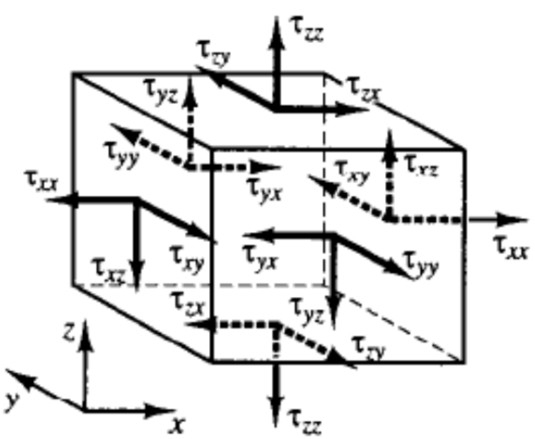
Velocità di variazione della proprietà $\phi$ per una particella di fluido/volume

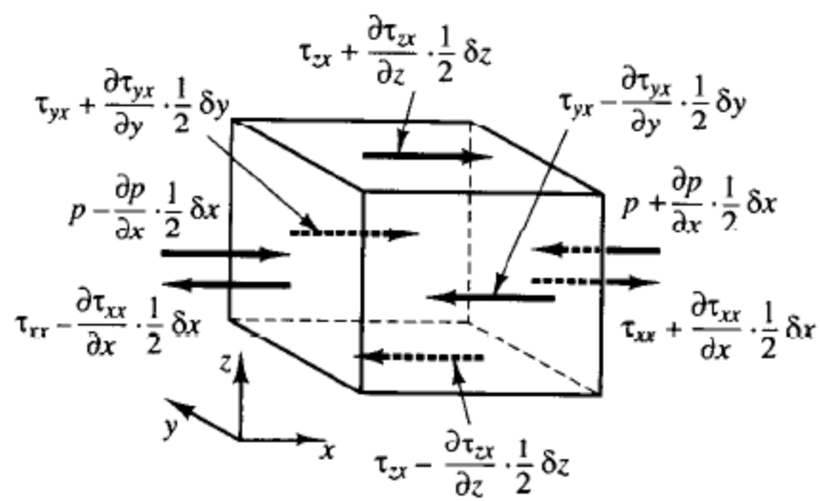
# Conservazione della quantità di moto

Velocità di variazione della quantità di moto di una particella di fluido = Somma delle forze agenti sulla particella di fluido

- Forze di Superficie: pressione e sforzo viscoso;
- Forze di Volume: gravità, centrifuga, Coriolis, etc.

$\tau$ è stress viscoso ($\tau$ij agisce in direzione j sulla faccia di normale i)




Nota: mentre t è un vettore la p è scalare.

# Conservazione della quantità di moto

| | | | |
|---|---|---|---|
| QM lungo x | $u$ | $\rho \frac{Du}{Dt}$ | $\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + div(\rho u \mathbf{u})$ |
| QM lungo y | $v$ | $\rho \frac{Dv}{Dt}$ | $\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + div(\rho v \mathbf{u})$ |
| QM lungo z | $w$ | $\rho \frac{Dw}{Dt}$ | $\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + div(\rho w \mathbf{u})$ |
| Energia | $E$ | $\rho \frac{DE}{Dt}$ | $\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + div(\rho E \mathbf{u})$ |

Trovate su testi anglosassoni la Quantità di Moto come **Momentum.**

# Conservazione della quantità di moto

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(-p + \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + S_{Mx}$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial(-p + \tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + S_{My}$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial(-p + \tau_{zz})}{\partial z} + S_{Mz}$$

Sorgenti di quantità di moto

# Conservazione dell'Energia

Velocità di variazione dell' energia in una particella di fluido = Quantità di calore entrante nella particella di fluido (con segno) + Lavoro agente sulla particella di fluido (con segno)

- Velocità di variazione dell'energia in una particella di fluido

$$\boxed{\rho \frac{DE}{Dt}}$$

- Lavoro fatto dalle forze superficiali

$$\left[\left(pu - \frac{\partial(pu)}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right) - \left(\tau_{xx}u - \frac{\partial(\tau_{xx}u)}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right) - \left(pu + \frac{\partial(pu)}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right) + \left(\tau_{xx}u + \frac{\partial(\tau_{xx}u)}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right)\right]\delta y\delta z$$
$$+\left[-\left(\tau_{yx}u - \frac{\partial(\tau_{yx}u)}{\partial y}\frac{1}{2}\delta y\right) + \left(\tau_{yx}u + \frac{\partial(\tau_{yx}u)}{\partial y}\frac{1}{2}\delta y\right)\right]\delta x\delta z$$
$$+\left[-\left(\tau_{zx}u - \frac{\partial(\tau_{zx}u)}{\partial z}\frac{1}{2}\delta z\right) + \left(\tau_{zx}u + \frac{\partial(\tau_{zx}u)}{\partial z}\frac{1}{2}\delta z\right)\right]\delta x\delta y$$

$$\boxed{[-div(p\mathbf{u})] + \left[\frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\delta y} + \frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z}\right]}$$

# Conservazione dell'Energia

+

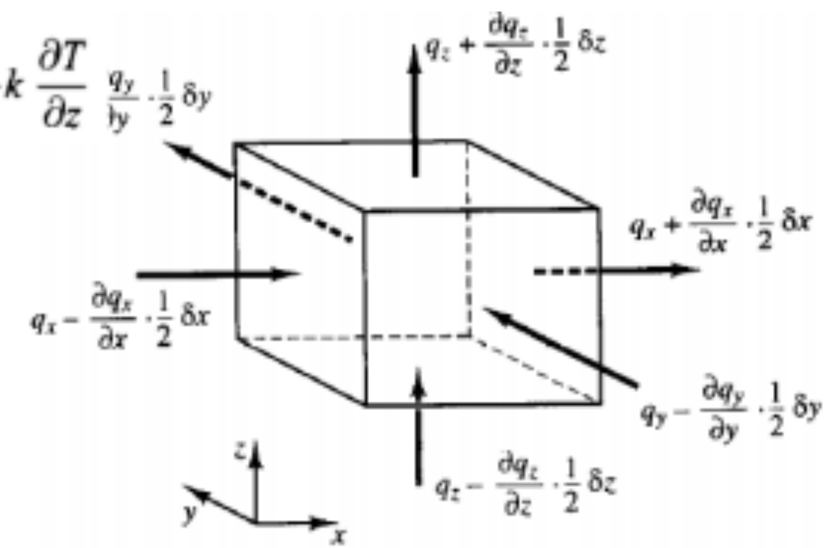
- Calore totale entrante/uscente in una particella di fluido per unità di volume data da *conduzione*.

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x}-\frac{\partial q_y}{\partial y}-\frac{\partial q_z}{\partial z}=-div\,\mathbf{q} \qquad \boxed{-div\,\mathbf{q}=div(k\,grad\,T)}$$

- Legge di Fourier

$$q_x=-k\frac{\partial T}{\partial x} \qquad q_y=-k\frac{\partial T}{\partial y} \qquad q_z=-k\frac{\partial T}{\partial z}$$

$$\mathbf{q}=-k\,grad\,T$$



# Conservazione dell'Energia

$$\rho \frac{DE}{Dt} = -\,div(p\mathbf{u}) + \left[\frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z}\right] + div(k\ grad\ T) + S_E$$

Energia = interna + cinetica + potenziale

… ma l'energia potenziale può essere considerata attraverso forze esterne (es. Gravità), quindi

$$E = i + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$$

# Conservazione dell'Energia

$$\rho \frac{DE}{Dt} = -\,div(p\mathbf{u}) + \left[\frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z}\right] + div(k\ grad\ T) + S_E$$

$$\rho \frac{Di}{Dt} = -\,p\ div\ \mathbf{u} + div(k\ grad\ T) + \tau_{xx}\frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx}\frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{zx}\frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy}\frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zy}\frac{\partial v}{\partial z} + \tau_{xz}\frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz}\frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{zz}\frac{\partial w}{\partial z} + S_i$$

Energia Interna!!

$$\rho \frac{D\left[\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)\right]}{Dt} = -\,\mathbf{u}\,.\,grad\ p + u\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) + v\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right) + w\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right) + \mathbf{u}\,.\,\mathbf{S}_M$$

$$S_i = S_E - \mathbf{u}.\mathbf{S}_M$$

Energia Meccanica

# Conservazione dell'energia

- Per fluido INCOMPRIMIBILE

  $i = cT$
  c= calore specifico

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = div(k \; grad \; T) + \tau_{xx}\frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx}\frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{zx}\frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy}\frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zy}\frac{\partial v}{\partial z} + \tau_{xz}\frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz}\frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{zz}\frac{\partial w}{\partial z} + S_i$$

- Per fluido COMPRIMIBILE

  $h=i+p/\rho$
  e
  $h_0= h+(u^2+v^2+w^2)/2$

  Con h=entalpia
  h0=entalpia totale

$$\frac{\partial(\rho h_0)}{\partial t} + div(\rho h_0 \mathbf{u}) = div(k \; grad \; T) + \frac{\partial p}{\partial t} + \left[\frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z}\right] + S_h$$

# Equazioni vs incognite

- 5 EQUAZIONI

- Continuità (1)
- Quantità di Moto (3)
- Energia (1)

- 11 INCOGNITE

- 2 Variabili Termodinamiche, in quanto $\rho$, p, I e T sono legate da equazioni di stato
  $p=p(\rho,T)$  $i=(\rho,T)$
- Velocità (3)
- Sforzi viscosi (6)

- Liquidi è gas a basse velocità di solito si comportano come fluidi incomprimibili: senza variazioni di densità non c'è un legame fra equazione dell'energia interna e le conservazioni di massa e quantità di moto. Per risolvere il campo di moto fluido basta risolvere solo le equazioni per massa e quantità di moto.

- Si usa N° di Mach
  $Ma = v/v_{suono}$
  se $Ma < 0.2$ si considera incomprimibile.

# Sforzi Viscosi

•Gli sforzi viscosi $\tau_{ij}$ possono essere espressi in funzione della velocità di deformazione locale (strain rate);
• Tutti i gas e molti liquidi hanno comportamento isotropo;
• La velocità di deformazione di un elemento fluido ha 9 componenti in 3D, di cui 6 sono indipendenti fra loro in caso di isotropia.

• 3 componenti indicano deformazione lungo assi principali

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

• 6 componenti indicano deformazione lungo piani di taglio

$$e_{xy} = e_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \qquad e_{xz} = e_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$e_{yz} = e_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

• Deformazione volumetrica

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = div\ \mathbf{u}$$

# Sforzi Viscosi

- In un fluido Newtoniano gli stress viscosi sono proporzionali al gradiente di deformazione del fluido:

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \, div \, \mathbf{u} \quad \tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \, div \, \mathbf{u} \quad \tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \, div \, \mathbf{u}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{2.31}$$

- La prima viscosità (Dinamica) μ lega gli sforzi viscosi al gradiente di deformazione
- La seconda viscosità λ lega gli sforzi alla deformazione volumetrica

  - Gas $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$
  - Liquido $div \, \mathbf{u} = 0$

# Equazioni di Navier-Stokes

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \, div \, \mathbf{u}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] + S_{Mx}$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \, div \, \mathbf{u}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] + S_{My}$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \, div \, \mathbf{u}\right] + S_{Mz}$$

# Equazioni di Navier-Stokes

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\, div\,\mathbf{u}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] \quad s_{Mx} \qquad S_M = S_M + s_M$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}(\lambda\, div\,\mathbf{u}) = div(\mu\, grad\, u)+s_{Mx}$$

Termine dissipativo, si può mettere fra le sorgenti di QM

$$\boxed{\rho\frac{Du}{Dt}=-\frac{\partial p}{\partial x}+div(\mu\, grad\, u)+S_{Mx}}$$

# Equazioni di Navier-Stokes

- Quantità di Moto

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + div(\mu \, grad \, u) + S_{Mx}$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + div(\mu \, grad \, v) + S_{My}$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + div(\mu \, grad \, w) + S_{Mz}$$

- Energia

$$\rho \frac{Di}{Dt} = -p \, div \, \mathbf{u} + div(k \, grad \, T) + \Phi + S_i$$

$$\Phi = \mu\left\{2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\} + \lambda(div \, \mathbf{u})^2$$

- il termine di dissipazione $\Phi$ è legato all'energia interna impiegata per deformare un elemento fluido

# Equazioni di Navier-Stokes

- Massa $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \mathbf{u}) = 0$$
- QM $$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + div(\rho u \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + div(\mu \; grad \; u) + S_{Mx}$$
$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + div(\rho v \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + div(\mu \; grad \; v) + S_{My}$$
$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + div(\rho w \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + div(\mu \; grad \; w) + S_{Mz}$$
- Energia $$\frac{\partial(\rho i)}{\partial t} + div(\rho i \mathbf{u}) = -p \; div \; \mathbf{u} + div(k \; grad \; T) + \Phi + S_i$$
- Equazioni di stato $$p = p(\rho, T) \text{ and } i = i(\rho, T)$$
$$p = \rho R T \text{ and } i = C_v T$$

Gas perfetti

# Casi di studio nel corso

$$\nabla \vec{V} = 0$$

Conservazione Massa, fluido incomprimibile, forma compatta

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} = \vec{g} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \triangle \vec{V}$$

Conservazione QM, fluido incomprimibile, forma compatta

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)T = \frac{k}{\rho c_p}\triangle T$$

Energia, fluido incomprimibile non dissipativo, forma compatta

# Numero di Reynolds

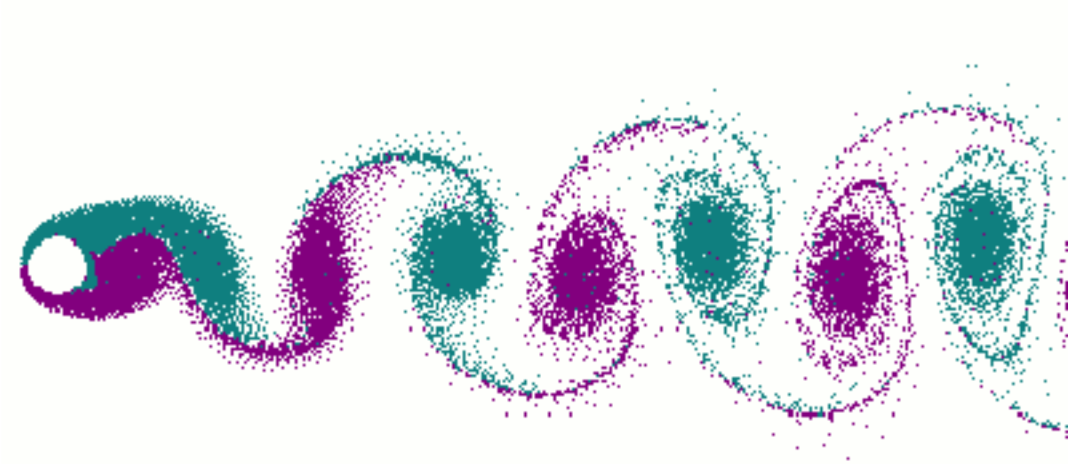
$$Re = \frac{\rho v D}{\mu}$$

v = velocità caratteristica fluido
D = diametro idraulico condotto
= 4A/P

- Determina il regime di flusso del vostro problema:
  - Laminare
  - Turbolento

# Vortici e Turbolenza

- Presenza di Vortici **NON** implica Turbolenza!!!
- Turbolenza caratterizzata da vortici



Es. Vortici di Van Karman, in regime Laminare

# Perché vortici?

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} = \vec{g} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \triangle \vec{V}$$

Termine NON LINEARE nell'equazione!!

É necessaria quindi particolare attenzione quando si risolve Navier Stokes, in particolare per Reynolds alti !!!