

**Esercizio 1.**

Si consideri il sistema meccanico in figura 1, che rappresenta la dinamica trasversale di un convertiplano: un velivolo con due motori in grado di ruotare attorno all'asse parallelo alle ali. Questa particolarità fa sì che il convertiplano sia capace di decollare e atterrare verticalmente come un elicottero e, allo stesso tempo, di prestazioni in volo rettilineo paragonabili a quelle di un aereo.

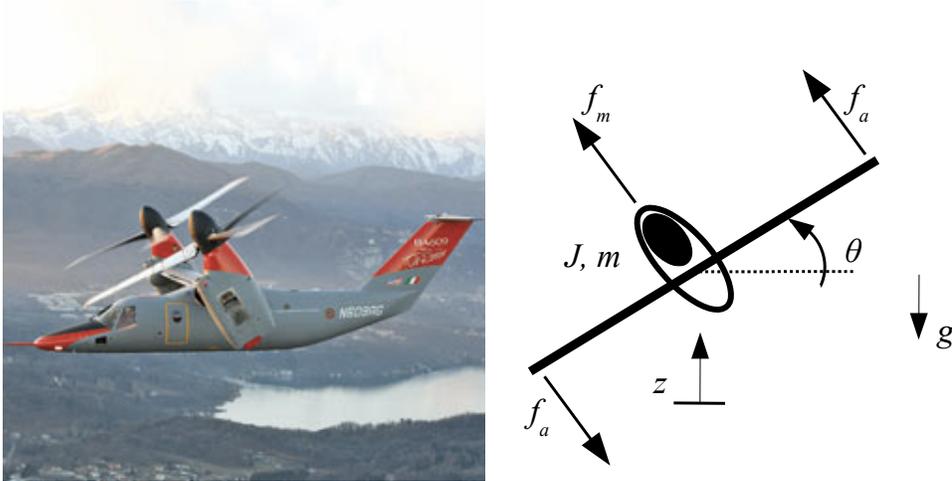


Figura 1: Schema del sistema meccanico.

Le equazioni che descrivono la dinamica verticale e rotazionale del sistema sono

$$m\ddot{z} + b\dot{z} = f_m \cos(\theta) - mg$$

$$J\ddot{\theta} = 2f_a l - \tau_d,$$

dove  $J$  rappresenta l'inerzia del velivolo,  $m$  la massa del velivolo,  $z$  la posizione verticale,  $\theta$  la rotazione del velivolo,  $b$  il coefficiente di attrito viscoso del fluido in cui è immerso il velivolo,  $l$  l'apertura alare,  $f_m$  ed  $f_a$  due forze motrici,  $\tau_d$  una coppia di disturbo e  $g$  la forza gravitazionale.

- A** Si determini, in forma simbolica, il punto di equilibrio del sistema corrispondente ad un disturbo di coppia  $\tau_d = 0$  e  $\theta = 0$ ;
- B** Si determini, in forma simbolica, una rappresentazione in forma di stato del sistema linearizzato in un intorno del punto di equilibrio calcolato in precedenza, considerando  $u_1 = f_m$  ed  $u_2 = f_a$  come ingressi del sistema. Si discuta, infine, la stabilità del sistema, motivando la risposta.
- C** Si determinino, in forma simbolica, le funzioni di trasferimento tra l'ingresso  $u_1 = f_m$  e l'uscita  $y_1 = z$ , tra l'ingresso  $u_2 = f_a$  e l'uscita  $y_2 = \theta$ , e tra il disturbo  $\tau_d$  e l'uscita  $y_2$ .

Si considerino i seguenti valori numerici:  $J = 5000 \text{ Kg m}^2$ ;  $m = 2000 \text{ Kg}$ ;  $b = 150 \text{ N m/s}$ ;  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ,  $l = 10 \text{ m}$ . Si assuma un valore nominale del disturbo  $\tau_d = 0$ .

- D** Supponendo che il veicolo si trovi inizialmente alla quota  $\bar{z} = 0$ , si determini una legge di controllo per  $u_1$  che agisca in modo da garantire che
  - D.1** si raggiunga il 98% della quota  $z$  di regime pari ad 1 m, senza mai eccedere un valore pari a 1.1 m, in un tempo non superiore a 2 s;
  - D.2** in presenza di una variazione del parametro  $b$  pari a  $\pm 30\%$  rispetto al suo valore nominale, l'errore relativo sull'uscita corrispondente a ingressi sul campo di frequenze inferiori a 1 rad/s, sia minore del 1%.

- E** Si determini una legge di controllo per l'altro ingresso di controllo  $u_2$  in modo tale che gli effetti di un disturbo periodico  $\tau_d = D \sin(\omega t)$  con  $\omega \leq 1 \text{ rad/s}$  e  $D = 0.1 \text{ Nm}$  non producano variazioni dell'orientazione superiori a 0.1 rad.

Si riportino esplicitamente il diagramma a blocchi del sistema (con disturbo), i diagrammi di Bode utilizzati per i due progetti di cui al punto D ed E con le relative specifiche da rispettare, i due controllori ottenuti motivandone il progetto, e la risposta al gradino ottenuta per il punto D riportandone le caratteristiche più significative.

**Esercizio 2.**

Si consideri il diagramma a blocchi riportato in Fig. 2, dove

$$G_1(s) = \frac{1}{R_a + sL_a}, \quad G_2(s) = \frac{1}{\beta + sJ}.$$

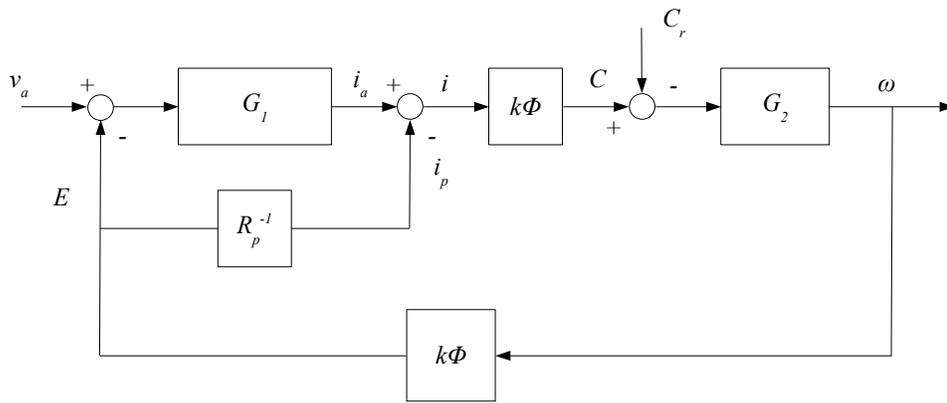


Figura 2: Diagramma a blocchi.

Si determinino le f.d.t. tra  $\omega$  e  $v_a$ , e tra  $\omega$  e  $C_r$ .

## Soluzione

### Esercizio 2.

A Essendo l'equilibrio caratterizzato da  $\ddot{z} = \dot{z} = 0$  e  $\ddot{\theta} = 0$ , sostituendo nel sistema nonlineare, si ottiene

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \bar{\theta} = 0 \\ \bar{z} &= \text{cost.} \\ \bar{u}_1 &= mg \\ \bar{u}_2 &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

B Indicando con  $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4]^T = [z - \bar{z}, \theta, \dot{z}, \dot{\theta}]^T$  le variabili di stato traslate nell'equilibrio calcolato al punto precedente, e con  $\tilde{u} = [\tilde{u}_1, \tilde{u}_2]^T = [u_1 - mg, u_2]^T$ , i controlli, anch'essi traslati nell'equilibrio, il sistema può essere linearizzato attorno all'equilibrio e posto nella forma usuale

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u},\tag{2}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{b}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{2l}{J} \end{bmatrix}.$$

Sostituendo i valori numerici assegnati, si ottiene:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0.075 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.0005 & 0 \\ 0 & 0.004 \end{bmatrix}.$$

La matrice  $A$  possiede un autovalore a parte reale negativa e un autovalore nullo con molteplicità algebrica tre e geometrica 2. Il sistema presenta perciò un modo polinomialmente divergente e quindi il sistema risulta instabile.

C La funzione di trasferimento, in forma simbolica, tra l'ingresso  $\tilde{u}_1$  e l'uscita  $y_1$  è

$$G_1(s) = C_1(sI - A)^{-1}B_1 = \frac{1}{s(b + ms)}$$

dove  $C_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$  e  $B_1$  la prima colonna del vettore  $B$ . Sostituendo i valori numerici si ottiene

$$G_1(s) = \frac{1}{50s(40s + 3)}.\tag{3}$$

La funzione di trasferimento presenta quindi un polo reale negativo ( $p_1 = -\frac{b}{m} \approx -0.075$ ) e un polo nell'origine.

La funzione di trasferimento, in forma simbolica, tra l'ingresso  $\tilde{u}_2$  e l'uscita  $y_2$  diviene

$$G_2(s) = C_2(sI - A)^{-1}B_2 = \frac{2L}{Js^2}$$

dove  $C_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$  mentre  $B_2$  è la seconda colonna di  $B$ . Sostituendo i valori numerici,

$$G_2(s) = \frac{1}{250s^2}.\tag{4}$$

La funzione di trasferimento presenta due poli nell'origine.

Infine, la funzione di trasferimento, in forma simbolica, tra il disturbo  $\tau_d$  e l'uscita  $y_2$  risulta

$$G_d(s) = C_2(sI - A)^{-1}B_d = -\frac{1}{Js^2}$$

dove  $B_d = [0 \ 0 \ 0 - \frac{1}{J}]^T$  mentre quella numerica

$$G_d(s) = -\frac{1}{5000s^2}. \quad (5)$$

La funzione di trasferimento presenta, analogamente a quella dell'ingresso  $u_2$ , due poli nell'origine.

**D** Siccome il sistema descritto dalla f.d.t.  $G_1(s)$ , pur presentando un modo divergente, non presenta comunque poli a parte reale positiva, si può procedere con il progetto di un controllore del tipo

$$C_1(s) = \frac{K_c}{s^t} C_0(s), \text{ con } C_0(0) \geq 1.$$

in grado di soddisfare le specifiche, direttamente sui diagrammi di Bode.

**D.1** Il sistema deve portarsi esattamente al valore di regime, ovvero alla quota di 1 m. Questa specifica richiede la presenza di un polo nell'origine nella f.d.t. in anello aperto. Poichè il sistema ne possiede già uno, non sarà necessario inserirne nel controllore. Scegliamo perciò  $t = 0$ . Le altre specifiche si traducono in un tempo di assestamento al 2% non superiore a 2 s e una sovraelongazione massima non superiore al 10%. Questa specifica può essere soddisfatta qualora la f.d.t. in anello chiuso sia ben approssimabile con un sistema del secondo ordine rispetto al quale le specifiche di sovraelongazione massima  $S = 10\%$  e tempo di assestamento  $Ta = 2$  s al 2% del valore di regime possono essere tradotte nel piano di Bode con le specifiche su margine di fase  $M_\phi$  e pulsazione di taglio  $\omega_T$ :

$$S = e^{\left(-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\right)} \Rightarrow \delta \approx 0.59 \Rightarrow M_\phi \approx 60 \text{ deg}$$

$$\omega_T \approx \frac{4}{\delta Ta} \Rightarrow \omega_T \approx 3.3 \text{ rad/s}.$$

Per rispettare la specifica sulla pulsazione di taglio il diagramma di Bode del modulo di  $C(j\omega)G(j\omega)$  (riportato in Fig. 4) deve attraversare l'asse a 0 dB oltre  $\omega_T$ .

**D.2** La sensitività del sistema in anello aperto alle variazioni di  $b$  vale

$$S_{b,o}(s) = \frac{\partial G_1(s,b)}{\partial b} \Big|_{b=\bar{b}} \frac{\bar{b}}{G_1(s,\bar{b})} = -\frac{1}{s(\bar{b}+ms)^2} s(\bar{b}+ms)\bar{b} = -\frac{1}{(\bar{b}+ms)}\bar{b},$$

mentre la sensitività totale in anello chiuso del sistema è

$$S_T(s) = S_c(s)S_{b,o}(s) = \frac{S_{b,o}(s)}{1 + C_1(s)G_1(s)}.$$

dove  $S_c(s)$  rappresenta la sensitività di anello.

Per rispettare la specifica si deve avere

$$S_T(s) \frac{\Delta b}{\bar{b}} \leq \frac{\Delta y_2}{\bar{y}_2} = 0.01,$$

ovvero

$$|S_T(s)| = \frac{S_{b,o}(s)}{1 + C_1(s)G_1(s)} \leq 0.033$$

. Eseguendo il reciproco di entrambi i membri dell'equazione precedente si ha che

$$C_1(s)G_1(s) \geq 30S_{b,o}(s) - 1.$$

Per quanto riguarda la sensibilità in anello aperto  $S_{b,o}$ , si considera cautelativamente il suo valore massimo nell'intervallo di frequenze di interesse. Come si evince dal diagramma del

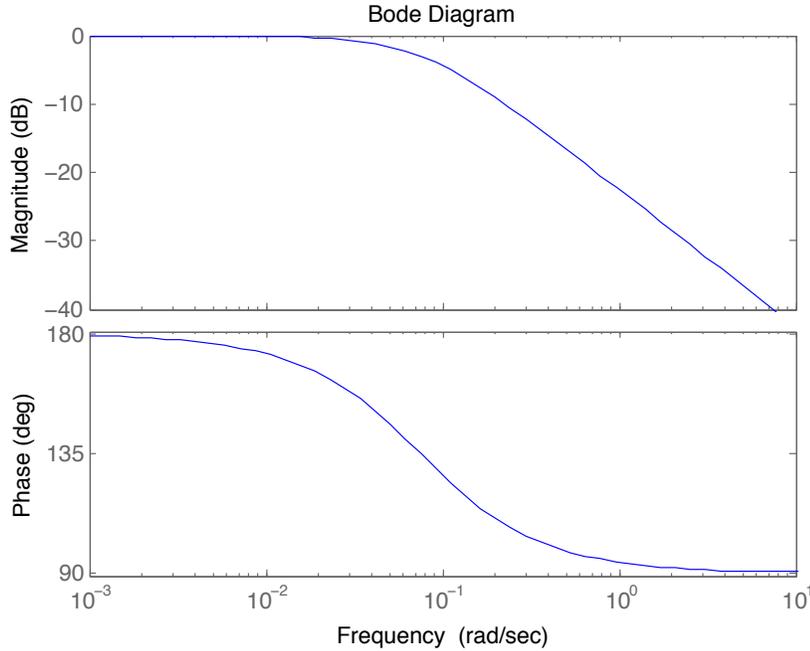


Figura 3: Diagramma di Bode del modulo di  $S_o(s)$

modulo di Bode riportato in Fig. 3, il valore massimo assunto da  $S_{b,o}$  per  $\omega < 1$  rad/s è pari ad 1.

Questa specifica può essere visualizzata sul diagramma del modulo di Bode della f.d.t. in anello aperto (vedi Fig. 4) come una semiretta costante di valore pari a circa 29 dB per frequenze inferiori 1 rad/s.

### Progetto del controllore $C_1(s)$

Al fine di rispettare la specifica sulla pulsazione di taglio, è necessario alzare il guadagno di anello. Questo non garantisce un buon margine di fase. al fine di portarlo ad un valore in grado di rispettare le rimanenti specifiche, si sceglie di introdurre una rete anticipatrice con un polo in ( $p_c = -70$ ) e uno zero in prossimità della frequenza di taglio ( $z_c = -2$ ).

Il controllore risulta quindi

$$C_1(s) = K_c C_0(s) = 10^5 \frac{1 + 0.5s}{1 + 0.014s}$$

La risposta a gradino del sistema in retroazione è riportata in Fig. 5.

**E** Si consideri adesso la f.d.t.  $G_2(s)$  tra l'ingresso  $u_2$  e l'uscita  $y_2$ . Supponendo che il sistema controllato in ciclo chiuso sia asintoticamente stabile, al fine di soddisfare la specifica riguardante il disturbo sinusoidale  $\tau_d$ , è possibile applicare il teorema della risposta armonica. La funzione di trasferimento tra il disturbo  $\tau_d$  e l'uscita del sistema  $y_2$  può essere calcolata nel modo seguente

$$Y = \frac{G_d(s)}{1 + C_2(s)G_2(s)}d(s) = \bar{G}(s)d(s) \quad (6)$$

dove  $G_d(s)$  rappresenta la funzione di trasferimento tra il dsiturbo  $\tau_d$  e l'uscita  $y_2$  già calcolata al punto (B).

Applicando, quindi, il teorema della risposta armonica si ha che

$$y(t) = |\bar{G}|D \sin(\omega t + \angle \bar{G}). \quad (7)$$

Facendo riferimento al caso peggiore, si consideri cautelativamente che  $\sin(\omega t + \angle \bar{G}) = 1$ . La specifica richiede che, per pulsazioni  $\omega \leq 10^{-2}$  rad/s, si abbia  $|y_2(t)| < 0.1$ , e può essere soddisfatta ponendo

$$|\bar{G}| = \frac{|G_d|}{|1 + G_2 C_2|} \leq 0.1/D. \quad (8)$$

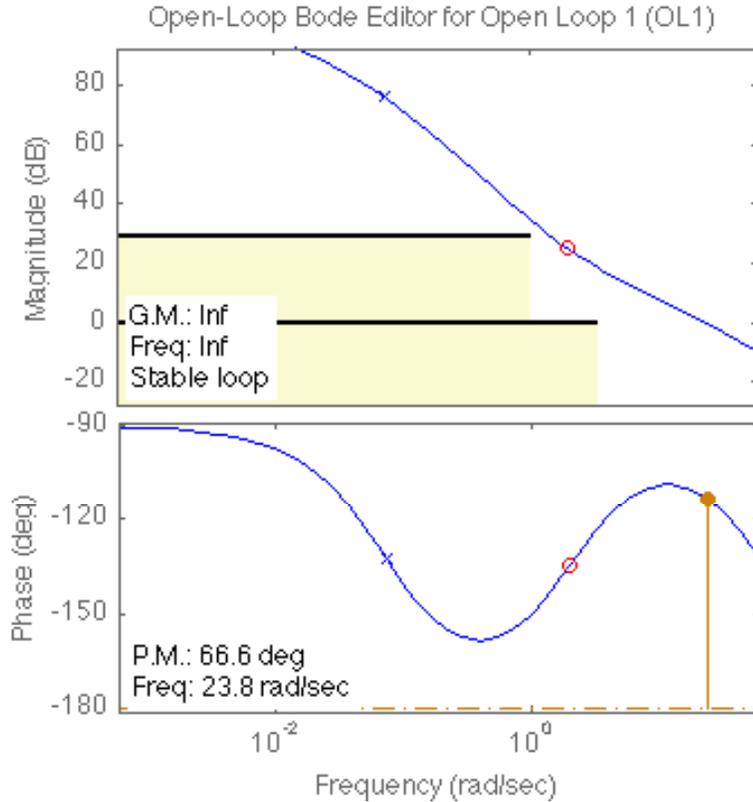


Figura 4: Diagrammi di Bode della funzione di anello aperto  $C_1 * G_1$

Calcolando i reciproci di entrambi i membri e trascurando 1 poichè a basse frequenze  $|G_2 C_2| \gg 1$  si ha

$$|G_2(s)C_2(s)| \geq 10D|G_d(s)|, \quad s = j\omega, \quad \omega \leq 10^{-2} \text{ rad/s}. \quad (9)$$

Quindi, considerando che il diagramma del modulo della f.d.t. del disturbo è rappresentato da una retta inclinata di  $-40 \text{ dB / dec}$  che attraversa l'asse delle ascisse per  $\omega = 1 \text{ rad / s}$ , la specifica può essere visualizzata sul diagramma del modulo di  $C_2(s)G_2(s)$  (Fig. 6) come la semiretta di cui sopra, traslata verso l'alto di  $40 \text{ dB}$ , per frequenze inferiori a  $1 \text{ rad / s}$ .

### Progetto del controllore $C_2(s)$

Un controllore puramente proporzionale sarebbe in grado di soddisfare la specifica richiesta, tuttavia non garantisce la specifica di stabilità del sistema a ciclo chiuso in quanto l'attraversamento avviene con pendenza pari a  $-2$ . Per risolvere tale problema, si può inserire una rete anticipatrice a cavallo della frequenza corrispondente all'attraversamento dell'asse a  $0 \text{ dB}$ . Il controllore complessivo risulta

$$C_2(s) = 135941 \frac{s + 0.4837}{s + 76.24}.$$

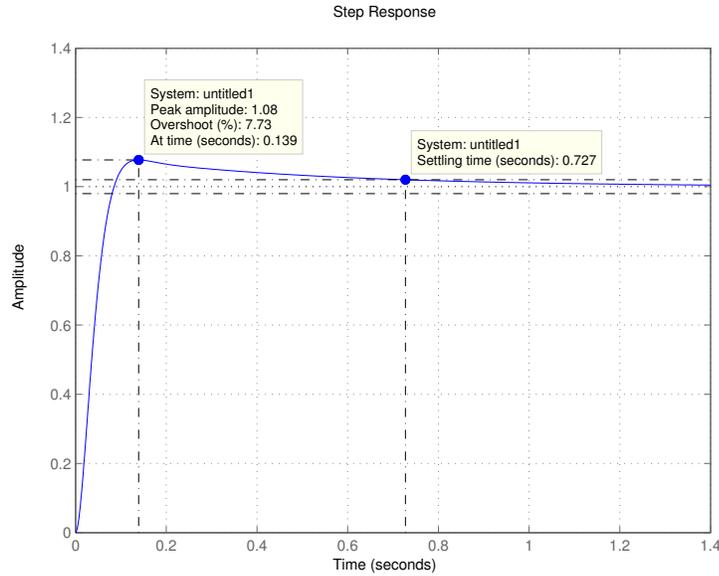


Figura 5: Risposta del sistema retroazionato ad un ingresso a gradino con tempo di assestamento al 2%

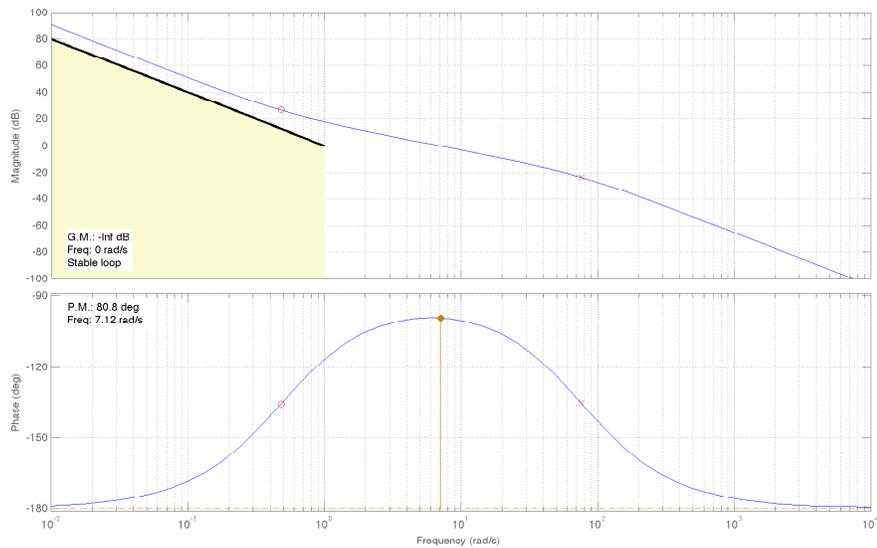


Figura 6: Diagramma di Bode del modulo e della fase di  $C_2(s)G_2(s)$  con le reattive specifiche

## Esercizio 2

Al fine di determinare la f.d.t. tra  $\omega$  e  $v_a$ , Si osservi in maniera preliminare che lo schema a blocchi riportato in Fig. 2 può essere visto come un doppio anello in cascata come rappresentato in Fig. 7.

È facile a questo punto ricavare la funzione di trasferimento richiesta. Infatti, è sufficiente determinare la f.d.t. dell'anello interno avendo posto  $C_r = 0$ , ovvero

$$G_{int}(s) = \frac{\Omega(s)}{I_a(s)} = \frac{K\Phi G_2(2)}{1 + K^2\Phi^2 R_p^{-1} G_2(2)}$$

e quindi quella richiesta data da

$$G_{tot}(s) = \frac{G_1(s)G_{int}(s)}{1 + K\Phi G_1(s)G_{int}(s)}$$

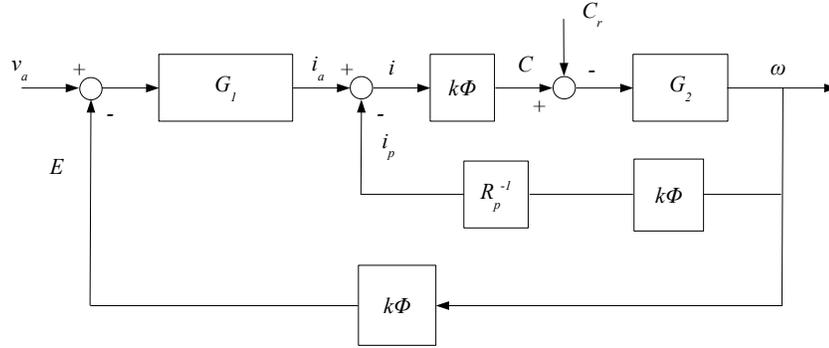


Figura 7: Diagramma a blocchi rappresentante un doppio anello in cascata equivalente a quello in Fig. 2, utile al calcolo della f.d.t. tra  $\omega$  e  $v_a$ .

Sostituendo  $G_{int}(s)$  e svolgendo i calcoli si ottiene quanto richiesto.

Per ciò che riguarda la f.d.t. tra  $\omega$  e  $C_r$ , si ha

$$\begin{cases} \omega = G_2(C - C_r) \\ C = k\Phi(i_a - i_p) \\ i_p = R_p^{-1}k\Phi\omega \\ i_a = G_1(v_a - k\Phi\omega). \end{cases}$$

Sostituendo  $i_p$  ed  $i_a$  nella seconda equazione e sostituendo il risultato ottenuto nella prima equazione, si ottiene una unica equazione funzione solo di  $v_a$  e  $\omega$  dalla quale è facile determinare la f.d.t. richiesta esplicitando il rapporto  $\frac{\omega}{v_a}$ .