

Si consideri il sistema meccanico rappresentato in figura 1 costituito da un corpo di massa m che può scorrere senza attrito sopra una mensola di massa trascurabile incernierata al telaio ad un suo estremo. Il collegamento tra la mensola e il telaio è effettuato per mezzo di una molla di costante elastica k , e uno smorzatore con coefficiente di smorzamento c .

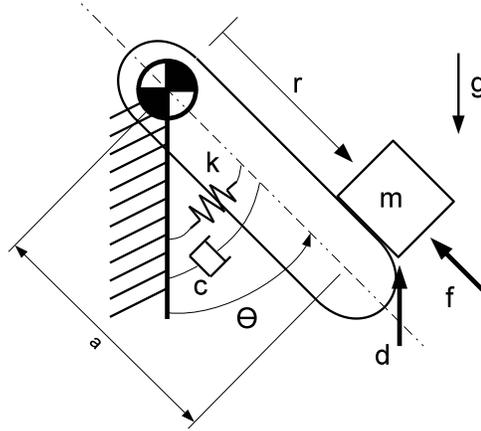


Figura 1: Sistema meccanico.

Le equazioni che descrivono la dinamica del sistema sono

$$\begin{cases} m\ddot{r} = f + mg \cos(\theta) - d \cos(\theta) \\ mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} + c\dot{\theta} + k(\theta - \bar{\theta}) = -mgr \sin(\theta) + dr \sin(\theta) \end{cases} \quad (1)$$

dove r rappresenta la distanza radiale della massa dall'estremo della mensola incernierata al telaio, θ rappresenta lo scostamento angolare della mensola rispetto alla verticale, f è una forza agente sulla massa, d è una forza di disturbo, g è l'accelerazione di gravità, $\bar{\theta}$ è il precarico della molla.

- A) Si determinino i valori del precarico $\bar{\theta}$ della molla ed il valore della forza \bar{f} tali per cui il sistema è in equilibrio con $r = r_{eq} = 0.5$ m e $\theta = \theta_{eq} = \pi/2$ rad. Si consideri inoltre $d = d_{eq} = 0$.
- B) Supponendo di disporre della misura della posizione del corpo sulla mensola ($y = r$), e di poter comandare la forza f , si determini una rappresentazione lineare del sistema in forma di stato intorno all'equilibrio dato (considerare il precarico $\bar{\theta}$ ed il valore della forza \bar{f} calcolati al punto precedente).

Si considerino i seguenti valori numerici: $a = 1.55$ m; $m = 2$ Kg; $c = 1$ Nms/rad; $k = 1$ Nm/rad; $g = 9.81$ m/s².

- C) Si determini per il sistema linearizzato la funzione di trasferimento tra l'ingresso f e l'uscita r a la funzione di trasferimento tra il disturbo d e l'uscita r ;
- D) Si determini una legge di controllo per la forza f che agisca in modo da garantire che:
- D.1)** partendo dall'equilibrio dato (con precarico determinato nel punto A), il corpo si sposti di 1 m verso l'estremo libero della mensola senza cadere, con una tolleranza a regime del 2% in un tempo non superiore a 0.5 s;
- D.2)** ipotizzando un disturbo $d = \bar{d} + \sin(\omega t)$ con $\omega \leq 10^{-1}$ rad/s (si riporti il diagramma a blocchi del sistema con il disturbo), gli effetti della presenza della componente costante di tale disturbo siano completamente annullati a regime e che gli effetti della componente sinusoidale producano variazioni sull'uscita non superiori a 5 mm.

Si riporti esplicitamente il controllore ottenuto, il diagramma di Bode con le relative specifiche da rispettare e la risposta al gradino ottenuta con le caratteristiche significative.

- E) Si descrivano le istruzioni di un programma per elaboratore digitale che simuli il controllore determinato al punto D.
- F) Si descrivano le istruzioni di un programma per elaboratore digitale che simuli la dinamica libera del sistema nonlineare 1 con disturbo costante \bar{d} .

Soluzione

A) Il sistema è descritto da quattro variabili di stato r , θ , \dot{r} e $\dot{\theta}$. Sostituendo i valori delle variabili di stato caratterizzanti l'equilibrio del sistema, dalla prima equazione descrivente la dinamica si ha $\bar{f} = 0$ e dalla seconda

$$\bar{\theta} = \frac{mg}{2k} + \frac{\pi}{2}.$$

B) Indicando con $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4]^T = [r - \bar{r}, \theta - \bar{\theta}, \dot{r}, \dot{\theta}]^T$ le variabili di stato traslate, con $\tilde{u} = f$ l'ingresso traslato e con $\tilde{d} = d$ il disturbo, si ottiene il seguente sistema non lineare in forma di stato:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_3 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_4 \\ \dot{\tilde{x}}_3 = g \cos(\tilde{x}_2 + \bar{\theta}) + \frac{\tilde{u}}{m} - \frac{\tilde{d}}{m} \cos(\tilde{x}_2 + \bar{\theta}) \\ \dot{\tilde{x}}_4 = -\frac{2\tilde{x}_3\tilde{x}_4}{\tilde{x}_1 + \bar{r}} - \frac{c\tilde{x}_4}{m(\tilde{x}_1 + \bar{r})^2} - \frac{k}{m(\tilde{x}_1 + \bar{r})^2}\tilde{x}_2 - \frac{g \sin(\tilde{x}_2 + \bar{\theta})}{\tilde{x}_1 + \bar{r}} + \frac{d \sin(\tilde{x}_2 + \bar{\theta})}{m(\tilde{x}_1 + \bar{r})}. \end{cases}$$

Linearizzando attorno all'equilibrio delle variabili traslate, ovvero l'origine, con $\bar{r} = 1/2$ e $\bar{\theta} = \pi/2$, si ottiene

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B_u\tilde{u} + B_d\tilde{d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -g & 0 & 0 \\ -4g & -4k/m & 0 & -4c/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/m \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{u} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2/m \end{bmatrix} \tilde{d}.$$

Infine, essendo l'uscita del sistema la posizione del corpo, si ottiene l'uscita traslata $\tilde{y} = \tilde{x}_1 + \bar{r}$, e quindi linearizzando

$$\tilde{y} = C\tilde{x} = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \tilde{x}.$$

C) Sostituendo i valori numerici assegnati si ottiene:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B_u\tilde{u} + B_d\tilde{d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -9.81 & 0 & 0 \\ -39.24 & -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{u} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tilde{d}$$

$$\tilde{y} = C\tilde{x} = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \tilde{x}.$$

La funzione di trasferimento tra l'ingresso traslato \tilde{u} e l'uscita anch'essa traslata \tilde{y} diviene

$$G_f(s) = C(sI - A)^{-1}B_u = \frac{s^2 + 2s + 2}{(s - 3.91)(s + 4.89)(s^2 + 1.025s + 20.13)}. \quad (2)$$

La funzione di trasferimento presenta

- un polo reale positivo $p_1 \approx 3.91$;
- un polo reale negativo $p_2 \approx -4.89$;
- una coppia di poli complessi e coniugati a parte reale negativa $p_{3,4} \approx -0.51 \pm 4.46i$;
- una coppia di zeri complessi e coniugati a parte reale negativa $z_{1,2} \approx -1 \pm i$.

Si può concludere quindi sulla instabilità del sistema.

La funzione di trasferimento tra il disturbo \tilde{d} (il diagramma a blocchi e riportato in figura 2) e l'uscita \tilde{y} è data da

$$G_d(s) = C(sI - A)^{-1}B_d = \frac{-9.81}{(s - 3.913)(s + 4.888)(s^2 + 1.025s + 20.13)}. \quad (3)$$

La funzione di trasferimento non presenta alcuno zero e possiede, ovviamente, gli stessi poli della funzione di trasferimento tra l'ingresso e l'uscita.

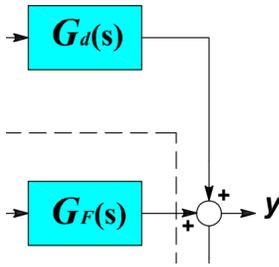


Figura 2: Diagramma a blocchi del sistema.

D) Siccome il sistema in anello aperto risulta essere instabile, prima di progettare un controllore in grado di soddisfare sia le specifiche statiche che quelle dinamiche si procede con il progetto di un primo controllore stabilizzante C_1 per realizzare successivamente un controllo in cascata come riportato in figura 3.

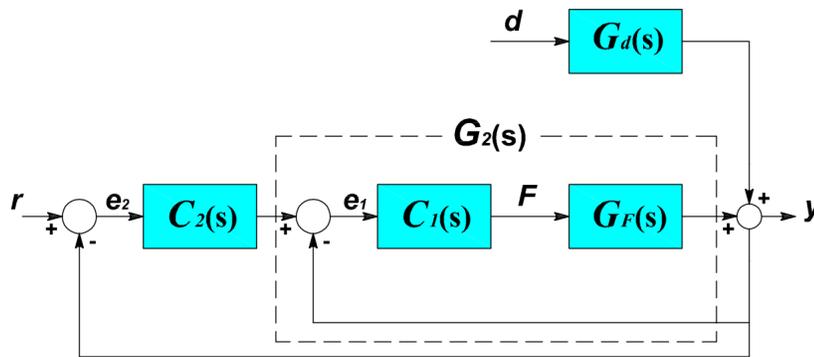


Figura 3: Diagramma a blocchi del sistema (controllo in cascata).

La progettazione di un controllore stabilizzante si può effettuare utilizzando la tecnica del Luogo delle Radici. Il luogo delle radici di G_f è riportato in fig. 4.

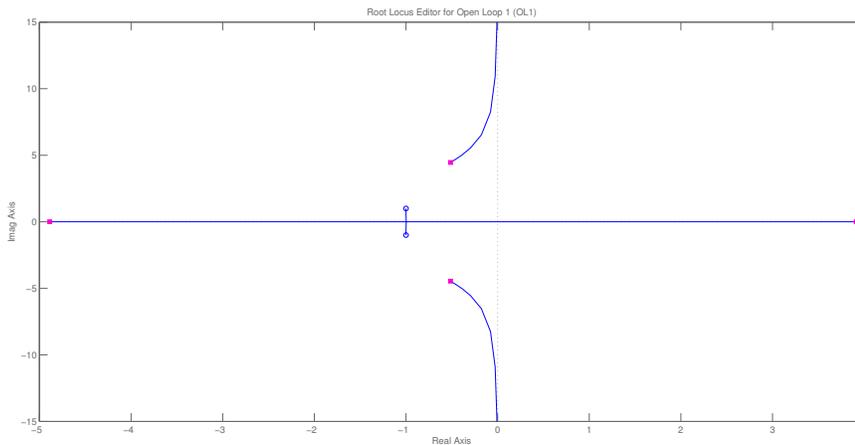


Figura 4: Luogo delle radici di G_f .

Per stabilizzare il sistema è possibile utilizzare un guadagno elevato $K_1 \approx 300$ assieme ad una rete anticipatrice complessa con zeri $z_{cs} \approx -5 \pm 5i$ ed poli $p_{cs} \approx -150 \pm 5i$ in alta frequenza. In figura 5 è riportato il luogo delle radici che ne consegue.

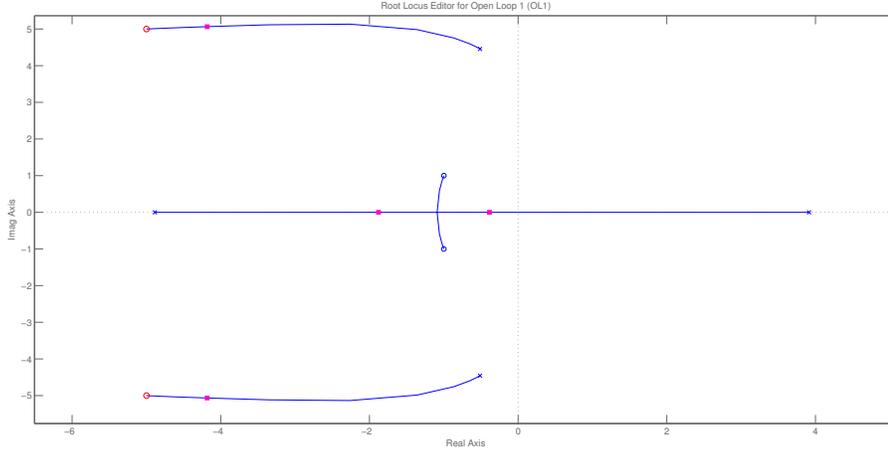


Figura 5: Luogo delle radici del sistema $C_1(s)G_f(s)$. I rettangoli magenta indicano la posizione dei poli dell'anello stabilizzante con guadagno $K_1 \approx 300$

La f.d.t. del controllore stabilizzante è

$$C_1(s) = \frac{300(1 + 0.2s + (0.14s)^2)}{1 + 0.013s + (0.0067s)^2},$$

mentre quella dell'anello stabilizzante è

$$G_2(s) = \frac{G_f(s)C_1(s)}{1 + G_f(s)C_1(s)} = \frac{130986.86(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 10.2s + 51.02)}{(s + 1.88)(s + 0.39)(s^2 + 8.52s + 43.87)(s^2 + 280.8s + 1.508e05)}.$$

Il progetto di un controllore dell'anello esterno nello schema a cascata del tipo

$$C_2(s) = \frac{K_2}{s^t} C_0(s), \text{ con } C_0(0) \geq 1.$$

tale da soddisfare le specifiche statiche e dinamiche può essere fatto direttamente sui diagrammi di Bode in quanto la f.d.t. $G_2(s)$ sulla quale il controllore $C_2(s)$ agisce è asintoticamente stabile.

D1) Si richiede di soddisfare le seguenti specifiche:

- Valore di regime pari a 1 m;
- Il sistema può tollerare una sovralongazione che non può superare il 5% del valore di regime;
- Tempo di assestamento al 2% del valore di regime pari a 0.5 s.

Si può cercare di esaudire le specifiche riguardanti il tempo di assestamento e la sovralongazione tentando di progettare un controllore tale che il comportamento del sistema in anello chiuso sia ben approssimabile con uno a due poli dominanti. Per tale tipo di sistema, si ha

$$S = e^{\left(-\frac{\pi \delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\right)} \Rightarrow \delta \approx 0.65 \rightarrow MF \approx 65^\circ$$

$$\omega_T = \frac{4}{\delta T_a} \Rightarrow \omega_T \approx 12.3 \text{ rad/s}$$

D2) Affinchè l'effetto della componente costante \bar{d} del disturbo d sull'uscita sia completamente annullato è necessario che a monte del punto di ingresso del disturbo sia presente un polo nell'origine. Questa specifica può essere soddisfatta introducendo un polo nell'origine nella f.d.t. del controllore $t = 1$ poichè il sistema non ne possiede già uno.

Consideriamo adesso la componente sinusoidale del disturbo. Supponendo che il sistema controllato in ciclo chiuso sia asintoticamente stabile è possibile applicare il teorema della risposta

armonica. La funzione di trasferimento tra il disturbo d e l'uscita (facendo riferimento al diagramma a blocchi di figura 2) è

$$Y = \frac{G_d d}{(1 + C_1 G_f (C_2 + 1))} \quad (4)$$

che può essere riscritta come

$$Y = \frac{G_d}{(1 + C_1 G_f)(1 + G_2 C_2)} d = G^* \frac{1}{(1 + G_2 C_2)} d = \bar{G} d, \quad (5)$$

dove $G_2 = \frac{C_1 G_f}{1 + C_1 G_f}$ rappresenta la f.d.t. dell'anello stabilizzante, mentre $G^* = \frac{G_d}{(1 + C_1 G_f)}$ è la f.d.t. tra disturbo e uscita in seguito alla stabilizzazione ottenuta per mezzo del controllore C_1 .

Applicando, quindi, il teorema della risposta armonica si ha che

$$y(t) = |\bar{G}| \sin(\omega t + \angle \bar{G}). \quad (6)$$

Facendo riferimento al caso peggiore, assumiamo $\sin(\omega t + \angle \bar{G}) = 1$.

La Specifica richiede che, per pulsazioni $\omega \leq 10^{-1}$ rad/s, si abbia $|y(t)| < 5$ mm, e può essere soddisfatta ponendo

$$|\bar{G}| = \frac{|G^*|}{|1 + G_2 C_2|} \leq 0.005. \quad (7)$$

Calcolando i reciproci di entrambi i membri e assumendo che a basse frequenze il modulo di $G_2 C_2$ in genere è molto elevato.

$$|G_2 C_2| \geq \frac{|G^*|}{0.005} \quad (8)$$

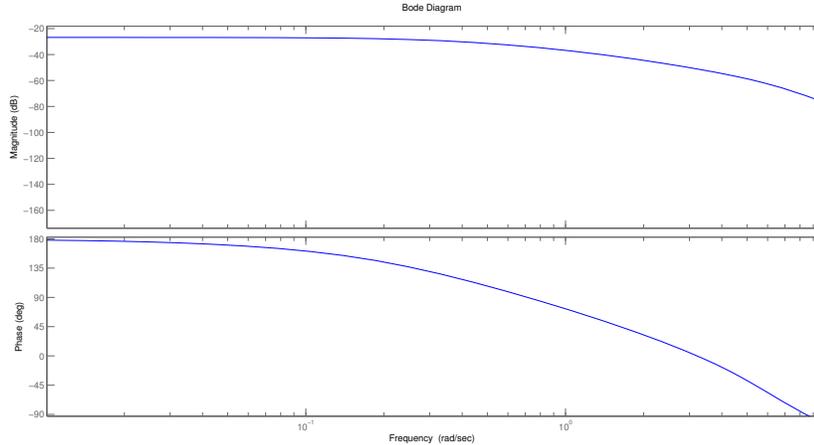


Figura 6: Diagrammi di Bode di G^* nella regione frequenziale di interesse.

Perciò, poichè nel campo di frequenze di interesse $|G^*| < -20$ dB (si veda figura 6) e $20 \log_{10}(0.005) = -50$ dB, si cerca un guadagno di $C_2(s)G_2(s)$ e quindi un controllore $C_2(s)$ tale per cui

$$|C_2(s)G_2(s)| \geq 0.4 \text{ dB}$$

per pulsazioni inferiori a 10^{-1} rad/s.

In figura 7 è riportato il diagramma di bode di $G_2(s)$ con i relativi vincoli da rispettare.

Progetto del controllore

Una possibile soluzione per il controllore $C_2(s)$ in grado di rispettare tutte le specifiche proposte consiste in un polo nell'origine e guadagno $K_2 = 20$, ovvero

$$C_2(s) = \frac{20}{s}. \quad (9)$$

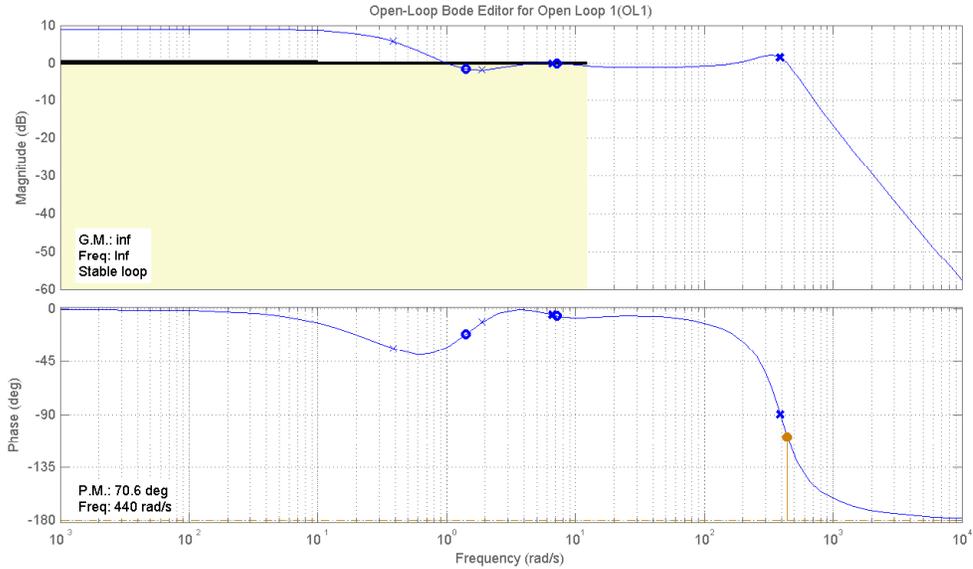


Figura 7: Diagramma di Bode di G_2 con relative specifiche

In figura 8 è riportato il diagramma di bode della f.d.t. C_2G_2 con relative specifiche, mentre in figura 9 è riportata la risposta al gradino per il sistema retroazionato con il controllore progettato.

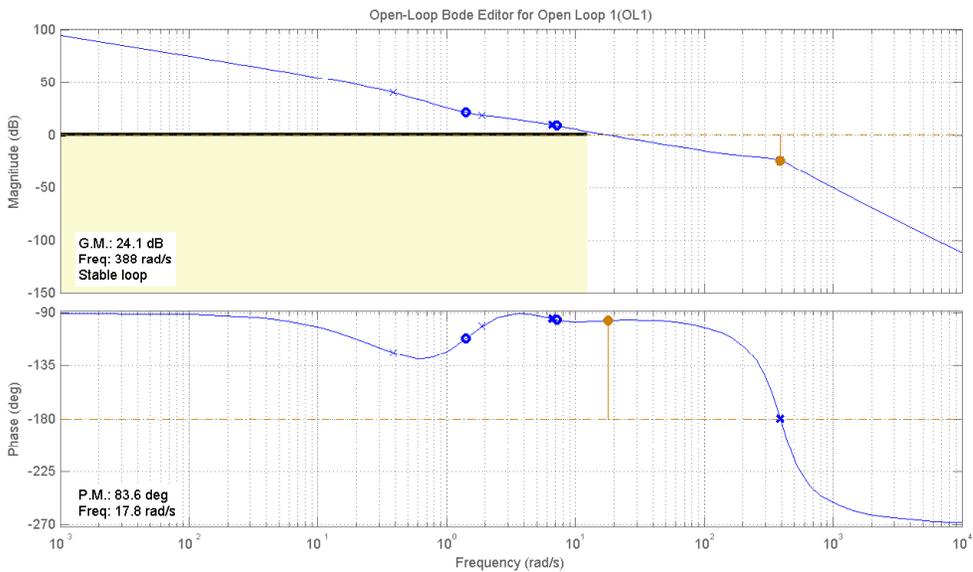


Figura 8: Diagramma di Bode di C_2G_2 con relative specifiche

E) Dalla funzione di trasferimento del controllore è possibile riportarsi in forma di stato utilizzando la forma canonica di controllo, quindi il controllore può essere scritto come un sistema LTITC del tipo

$$\dot{x} = A_c x + B_c u \quad (10)$$

$$y = C_c x + D_c u. \quad (11)$$

Usando il metodo di Eulero in avanti $\dot{x} \approx (x(k+1) - x(k))/T$ si può scrivere il seguente sistema LTITD

$$x(k+1) = \hat{A}x(k) + \hat{B}u(k) \quad (12)$$

$$y(k) = C_c x(k) + D_c u(k), \quad (13)$$

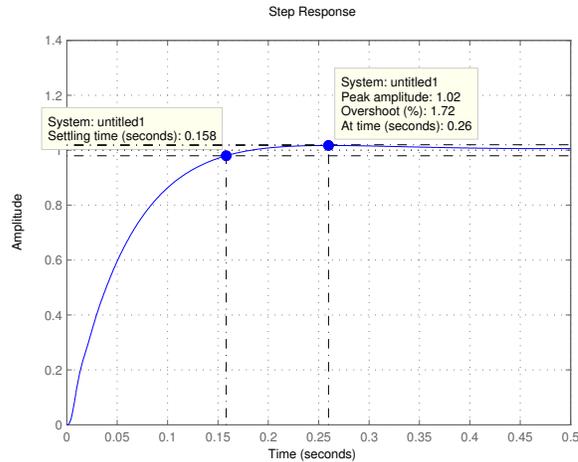


Figura 9: Risposta al gradino del sistema complessivo con il controllore progettato.

dove $\hat{A} = I + A_c T$ e $\hat{B} = T B_c$. Il sistema 13 può essere simulato con il seguente programma

```
%costanti
T=0.001; %scelta del tempo T
A_hat=I+A_c*T; %Calcolo delle matrici
B_hat=B_c*T; D_c; C_c;

%condizioni iniziali
x = [x_1_0, x_2_0, x_3_0, x_4_0]

% ciclo indefinito fino ad interruzione
while(condizione_arresto == 'false')

%salvataggio stati
write x

% Leggi l'ingresso
u = read(input);

y=C_c*x + D_c*u;

% Scrivi il valore di uscita y sulla porta "output"
write(y,output);

% Aggiorna lo stato
x=A_hat*x + B_hat*u;
end
```

F) A partire dal sistema nonlineare scritto in forma di stato, ed esprimendo le derivate numeriche come

$$\dot{x} = \frac{x(k+1) - x(k)}{T}, \quad (14)$$

si ottiene il sistema discreto non lineare

$$\begin{cases} x_1(k+1) = Tx_3(k) - x_1(k) \\ x_2(k+1) = Tx_4(k) - x_2(k) \\ x_3(k+1) = T \left(g \cos(x_2(k)) - \frac{u(k)}{m} - \frac{d(k)}{m} \cos(x_2(k)) \right) - x_3(k) \\ x_4(k+1) = T \left(-\frac{2x_3(k)x_4(k)}{x_1(k)} - \frac{cx_4(k)}{mx_1^2(k)} - \frac{k}{mx_1^2(k)}(x_2(k) - \bar{\theta}) - \frac{g \sin(x_2(k))}{x_1(k)} + \frac{d(k) \sin(x_2(k))}{mx_1(k)} \right) - x_4(k) \end{cases} \quad (15)$$

Il sistema 15 può essere simulato con il seguente programma

```

...
costanti T g m c k bar_theta;
condizioni_iniziali x_1_0 x_2_0 x_3_0 x_4_0;
...

%inizializzazione stati controllo disturbo
k = 0
x_1 = x_1_0
x_2 = x_2_0
x_3 = x_3_0
x_4 = x_4_0

while(condizione_arresto = false) % ciclo indefinito fino ad evento

%salvataggio output
write x_1 x_2 x_3 x_4

%ingresso e controllo
u = read(input_1)
d = read(input_2)

%buffer
x_1_buffer = x_1
x_2_buffer = x_2
x_3_buffer = x_3
x_4_buffer = x_4

%valutazione passo k+1
x_1 = T x_3_buffer - x_1_buffer
x_2 = T x_4_buffer - x_2_buffer
x_3 = T ( g cos(x_2_buffer) - u/m - d/m cos(x_2_buffer) ) - x_3_buffer
x_4 = T ( - (2 x_3_buffer x_4_buffer)/(x_1_buffer) - (c x_4_buffer)/(m x_1_buffer^2)
- k/(m x_1_buffer^2)(x_2_buffer - bar_theta) - (g \sin(x_2_buffer))/(x_1_buffer)
+ (d sin(x_2_buffer))/(m x_1_buffer) ) - x_4_buffer

end

```