

Si consideri il modello dinamico di un *Series Damper Attuator* (SDA, attuatore con smorzatore in serie, figura 1).

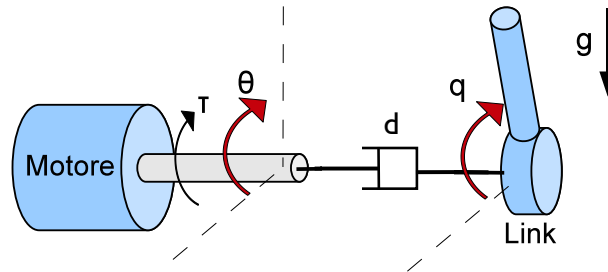


Figura 1: Modello del SDA.

L'attuatore è composto da un motore il cui albero è connesso attraverso uno smorzatore ad un link. Considerando una disposizione orizzontale dell'attuatore (con il link che conseguentemente agisce verticalmente) il modello risulta

$$\begin{cases} I\ddot{q} &= -d(\dot{q} - \dot{\theta}) - Mgl \cos(q) \\ B\ddot{\theta} &= d(\dot{q} - \dot{\theta}) + \tau \end{cases}$$

dove è stato indicato con I l'inerzia del link, con q lo spostamento angolare del link, con B l'inerzia dell'albero motore, con d il coefficiente di smorzamento dello smorzatore e con θ la posizione angolare dell'albero motore. τ è la coppia motrice che agisce sull'albero del motore ed è considerata l'ingresso del sistema. Supponendo che il sistema sia controllato agendo direttamente sulla coppia τ ,

- A** si determinino gli equilibri in forma simbolica;
- B** si determinino le condizioni nominali di funzionamento tali per cui il link rimanga fermo in posizione $q^* = 0$. Si dia un'interpretazione fisica del risultato;
- C** supponendo di disporre della misura della posizione del link ($y = q$), e di poter comandare la coppia τ , si determini una rappresentazione lineare approssimata del sistema in forma di stato intorno agli equilibri trovati al punto A.

Si considerino i seguenti valori numerici: $B = 0.0575 \text{ Kg m}^2/\text{rad}$; $d = 2.5185 \text{ Kg m}^2/(\text{rad s})$; $M = 0.15 \text{ Kg}$; $l = 0.5 \text{ m}$; $g = 9.81 \text{ m/s}^2$; $I = 0.2156 \text{ Kg m}^2/\text{rad}$.

- D** Si determini per ciascun equilibrio la funzione di trasferimento tra l'ingresso τ e l'uscita q e si discutano le differenze.

Per il modello linearizzato attorno all'equilibrio con $\bar{q} > 0$, si determini una legge di controllo per la coppia τ che agisca in modo da garantire che

- E** partendo da $q = 0$, il SDA si porti a regime esattamente ad un valore $q = \bar{q}$, raggiungendo un valore compreso nell'intervallo $\bar{q} \pm 5\%$ in un tempo non superiore a 0.2 s e senza mai eccedere un valore limite di $1.05 \bar{q}$.
- F** in presenza di errori di stima del coefficiente di smorzamento dello smorzatore di ampiezza massima $\pm 0.5 \text{ Kg m}^2/(\text{rad s})$, l'errore relativo sull'uscita corrispondente a ingressi sul campo di frequenze $0 \leq \omega \leq 10 \text{ rad/s}$, sia minore del $\pm 1\%$.

Si riporti esplicitamente il controllore ottenuto, il diagramma di Bode con le relative specifiche da rispettare e la risposta al gradino ottenuta con le caratteristiche significative.

Soluzione

A Il sistema è descritto da quattro variabili di stato q , θ , \dot{q} e $\dot{\theta}$. Dalla seconda equazione si ricava che $\bar{\tau} = 0$, mentre dalla prima si ha che $\cos(\bar{q}) = 0$ e quindi che $\bar{q} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Il sistema ha quindi due punti di equilibrio simmetrici, uno con $\bar{q} = \frac{\pi}{2}$ e l'altro con $\bar{q} = -\frac{\pi}{2}$ per qualsiasi valore θ .

B Siccome il link deve rimanere fermo si ha che

$$\ddot{q} = \dot{q} = q = 0. \quad (1)$$

Sostituendo 1 nella prima equazione del sistema si ottiene

$$\dot{\theta} = \frac{Mgl}{d}. \quad (2)$$

Dalla 2 si trova che $\dot{\theta}$ è costante quindi $\ddot{\theta} = 0$ e dalla seconda equazione del sistema si può determinare l'ingresso $\tau = d\dot{\theta}$.

Nella posizione desiderata il link è soggetto ad una coppia dovuta alla gravità. Affinché il link rimanga fermo è necessario che tale coppia sia controbilanciata dall'azione del motore. Siccome il motore può trasmettere coppia al link attraverso uno smorzatore, per ottenere la configurazione desiderata, è necessario che il motore sia mantenuto in rotazione a velocità costante.

C Indicando con $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [q, \theta, \dot{q}, \dot{\theta}]^T$ le variabili di stato del sistema non traslato e con $u = \tau$ l'ingresso non traslato, si ottiene il seguente sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = -\frac{d}{I}(x_3 - x_4) - \frac{Mgl}{I} \cos(x_1) \\ \dot{x}_4 = \frac{d}{B}(x_3 - x_4) + \frac{1}{B}u. \end{cases}$$

Linearizzando attorno ai punti di equilibrio $\bar{x} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4] = [\bar{q}, \bar{\theta}, 0, 0]$ precedentemente trovati, si ottiene:

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{Mgl}{I} \sin(\bar{x}_1) & 0 & -\frac{d}{I} & \frac{d}{I} \\ 0 & 0 & \frac{d}{B} & -\frac{d}{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{B} \end{bmatrix} u.$$

Infine, essendo l'uscita del sistema la posizione del link, ovvero, $y = x_1$, si ottiene

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ 0] x = Cx.$$

D Sostituendo i valori numerici assegnati, e considerando il punto di equilibrio per $\bar{q} > 0$ si ottiene:

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3.41 & 0 & -11.68 & 11.68 \\ 0 & 0 & 43.80 & -43.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 17.39 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ 0] x = Cx.$$

Nel caso invece in cui $\bar{q} < 0$, abbiamo

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3.41 & 0 & -11.68 & 11.68 \\ 0 & 0 & 43.80 & -43.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 17.39 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ 0] x = Cx.$$

Considerando l'equilibrio per $\bar{q} > 0$, la funzione di trasferimento tra l'ingresso τ e l'uscita $y = q$ è

$$G_A(s) = \frac{203.154}{(s - 1.648)(s + 1.635)(s + 55.49)}.$$

La funzione di trasferimento presenta due radici reali negative $\lambda_1 \approx -1.635$, $\lambda_2 \approx -55.49$ e una radice reale positiva $\lambda_3 \approx 1.648$ ed è quindi instabile.

Considerando invece il caso in cui $\bar{q} < 0$, funzione di trasferimento tra l'ingresso τ e l'uscita σ è

$$G_B(s) = \frac{203.154}{(s + 55.47)(s^2 + 0.01294s + 2.695)}$$

La funzione di trasferimento presenta due radici complesse coniugate a parte reale negativa $\lambda_{1,2} \approx -0.0065 \pm 1.6415i$, e una radice reali negativa $\lambda_3 \approx -55.47$, λ_4 ed è quindi stabile.

A causa del polo positivo, il sistema in anello aperto risulta essere instabile. Conseguentemente, prima di progettare un controllore in grado di soddisfare sia le specifiche statiche che quelle dinamiche, si procede con il progetto di un primo controllore stabilizzante per realizzare successivamente un controllo in cascata come riportato in figura 2. La progettazione di un controllore stabilizzante si può effettuare

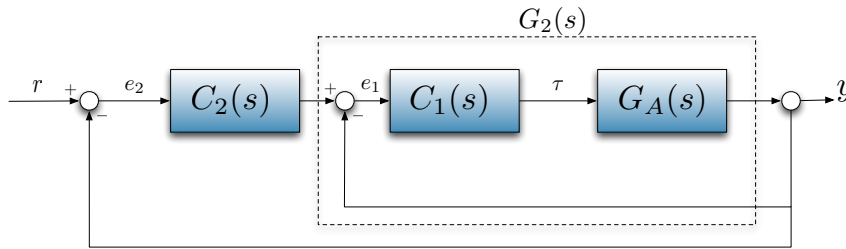


Figura 2: Schema a blocchi complessivo (controllo in cascata).

utilizzando la tecnica del Luogo delle Radici. Il luogo delle radici della f.d.t. è riportato in fig. 3.

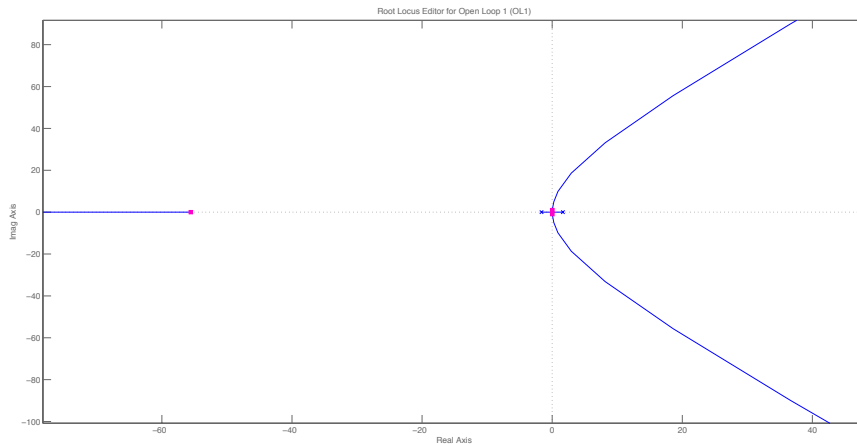


Figura 3: Luogo delle radici della f.d.t. $G(s)$.

Per stabilizzare il sistema è possibile utilizzare una rete anticipatrice reale con uno zero in -9 ed un polo in alta frequenza (-150). Una possibile scelta per controllore stabilizzante è

$$C_1(s) = \frac{1083(s + 9)}{(s + 150)}$$

mentre la f.d.t. dell'anello chiuso stabilizzante nello schema in cascata diviene

$$G_2(s) = \frac{220083.4879(s + 9)}{(s + 162)(s + 14.2)(s^2 + 29.25s + 870.8)}$$

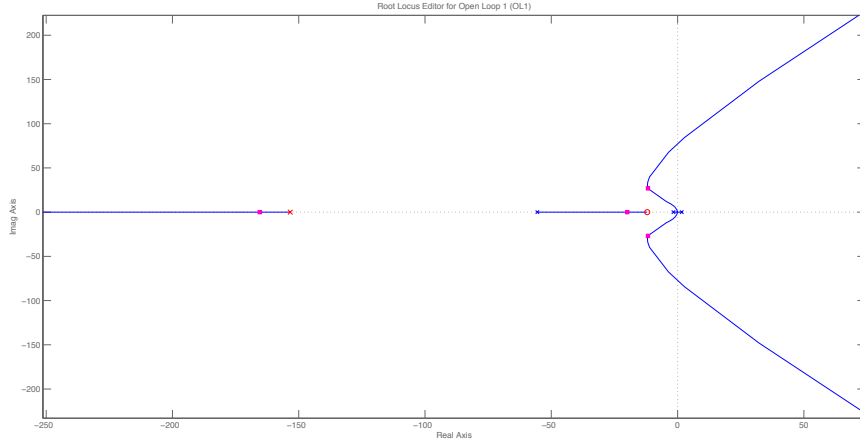


Figura 4: Luogo delle radici della f.d.t. $G(s)C_1(s)$.

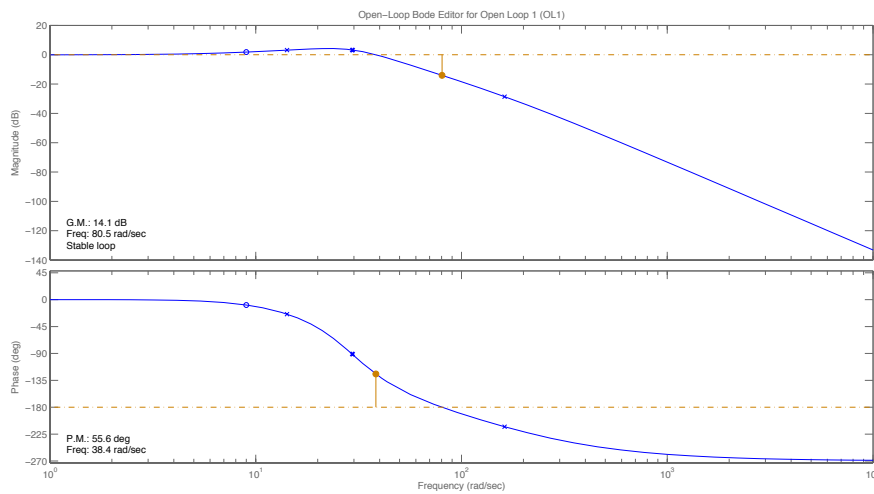


Figura 5: Diagramma di Bode della f.d.t. $G_2(s)$.

il cui diagramma di Bode è riportato in figura 5.

Il progetto di un controllore dell'anello esterno nello schema in cascata del tipo

$$C_2(s) = \frac{K_{c2}}{s^t} C_0(s), \text{ con } C_0(0) \geq 1.$$

tale da soddisfare le specifiche statiche e dinamiche può essere fatto direttamente sui diagrammi di Bode in quanto la f.d.t. $G_2(s)$ sulla quale il controllore $C_2(s)$ agisce è asintoticamente stabile.

E Iniziamo con la scelta del tipo t e della costante di guadagno K_{c2} del controllore basandoci sulle specifiche statiche. La prima specifica chiede errore nullo a regime per l'inseguimento a segnali costanti $\sigma(t) = \bar{\sigma}$. Per tale motivo, poiché $G_2(s)$ non possiede poli nell'origine, è necessario porre $t = 1$ nel controllore. La costante K_{c2} sarà determinata successivamente per rispettare le altre specifiche.

Nella seconda parte della specifica è richiesto un tempo di assestamento al 5% del valore di regime inferiore a 0.2s, permettendo una sovraelongazione che al massimo sia pari al 5% del valore costante \bar{q} assegnato. Tentiamo di esaudire queste specifiche progettando un controllore che permetta di approssimare il sistema in anello chiuso con un modello a due poli dominanti le cui caratteristiche

frequenziali siano

$$S = e\left(-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\right) \Rightarrow \delta = 0.70 \Rightarrow M_\phi \approx 70 \text{ deg}$$

$$\omega_T = \frac{3}{\delta T_a} \Rightarrow \omega_T \approx 21.5 \text{ rad/s}$$

Il diagramma di Bode con i vincoli sulla pulsazione di taglio ω_T sono riportati in figura 6.

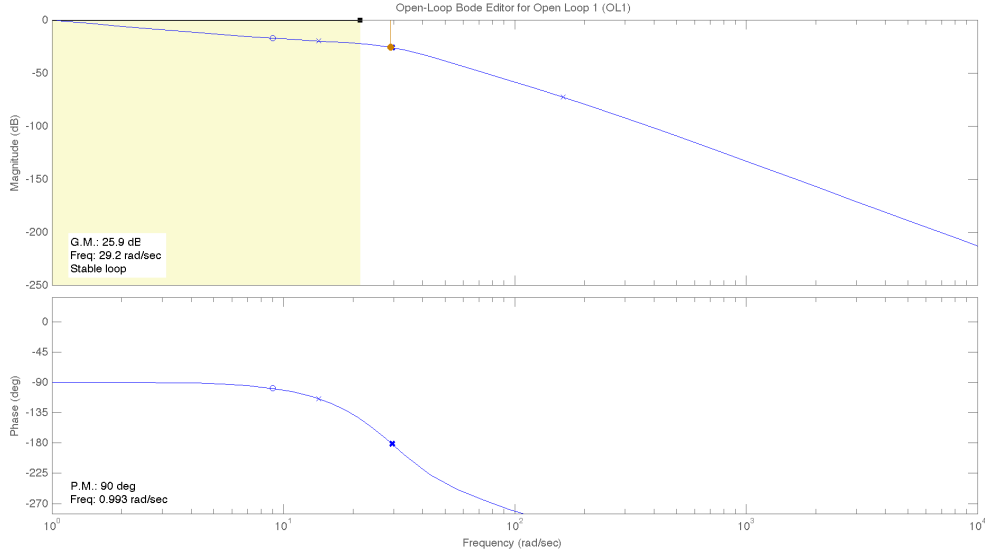


Figura 6: Diagramma di Bode della f.d.t. $G(s)$ con specifica sulla banda passante.

- F** Si vuol limitare l'effetto sull'uscita di un'impresione sul parametro d rispetto al suo valore nominale. Indicando con $G_c(s) = \frac{C_2 G_2}{1 + C_2 G_2}$ la f.d.t. in anello chiuso complessiva e con $G_2 = \frac{C_1 G}{1 + C_1 G}$ quella dell'anello stabilizzante, allora la specifica richiede che

$$\left| \frac{\Delta Y(s)}{Y(s)} \right| = \left| \frac{\Delta G_c(s)}{G_c(s)} \right| \leq 0.01, \quad s = j\omega, 0 \leq \omega \leq 10. \quad (3)$$

Procedendo come di consueto, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\Delta G_c(s)}{G_c(s)} &\approx \frac{1}{G_c(s)} \frac{\partial G_c(s)}{\partial G(s)} \Delta G(s) = \frac{1}{G_c(s)} \frac{\partial G_c(s)}{\partial G_2(s)} \frac{\partial G_2(s)}{\partial G(s)} \Delta G(s) = \\ &= \frac{1}{1 + C_2(s)G_2(s)} \frac{1}{G_2(s)} \frac{\partial G_2(s)}{\partial G(s)} \Delta G(s) = \\ &= S_{C_2, G_2} \frac{1}{1 + C_1 G(s)} \frac{\Delta G(s)}{G(s)} = \\ &= S_{C_2, G_2} S_{C_1, G} S_{d, o} \frac{\Delta d}{d}, \end{aligned}$$

dove, considerando che $G(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$, si ha

$$S_{d, o} = \left. \frac{\partial G(s, d)}{\partial d} \right|_{d=2.5185} \frac{d}{G(s)} = \frac{s^3 - 3.413s}{s^3 + 55.48s^2 - 3.413s - 149.5}$$

Osservando che

$$S_{C_1, G} = \frac{(s + 150)(s + 55.49)(s + 1.635)(s - 1.648)}{(s + 162)(s + 13.91)(s^2 + 29.53s + 868.7)},$$

dal diagramma di Bode di $S_{C_1,G}(s) S_{d,o}(s)$, riportato in figura 7, si osserva che

$$|S_{C_1,G}(s) S_{d,o}(s)| \leq 0.07, \quad s = j\omega, \quad 0 \leq \omega \leq 10.$$

Il soddisfacimento della specifica si traduce perciò nel richiedere che

$$\left| \frac{0.07}{1 + C_2(s)G_2(s)} \right| \frac{1}{2.5185} \leq 0.01.$$

A tal fine, si deve avere un valore elevato per il guadagno di anello, ovvero $C_2(s)G_2(s) \gg 1$. In definitiva, si ottiene

$$|C_2(s)G_2(s)| \geq 20 \log_{10} \left(\frac{0.07}{2.5185 \cdot 0.01} \right) \approx 9dB.$$

Le limitazioni relative a questa specifica sono riportate in figura 8.

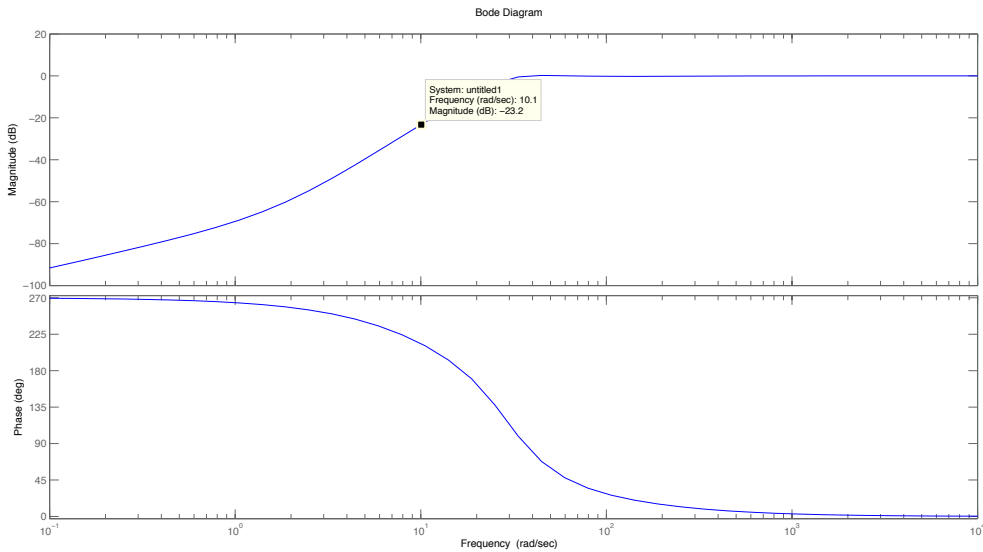


Figura 7: Diagramma di Bode della f.d.t. $S_{C_1,G}(s) S_{d,o}$.

Progetto del controllore.

Una possibile soluzione per il controllore $C_2(s)$ in grado di rispettare tutte le specifiche proposte consiste in una doppia rete anticipatrice complessa con zeri in $z_{1,2} = -30 \pm 15i$ e $z_{3,4} = -100 \pm 25i$ e poli in $p_{1,2} = -300 \pm 100i$, $p_{3,4} = -400 \pm 50i$ e ponendo il guadagno $K = 40$, ovvero

$$C_2(s) = 3 \frac{54379.085(s^2 + 60s + 1125)(s^2 + 200s + 1.062e04)}{s(s^2 + 800s + 1.625e05)(s^2 + 600s + 1e05)}.$$

Il diagramma di Bode della f.d.t. in anello aperto è riportato in fig. 9. In fig. 10 è riportato, invece, il diagramma di Bode del sistema controllato, ovvero dell'anello chiuso. Infine, in fig. 11 è riportata la risposta ad un ingresso a gradino del sistema controllato, dal quale si osserva come tutte le specifiche siano soddisfatte.

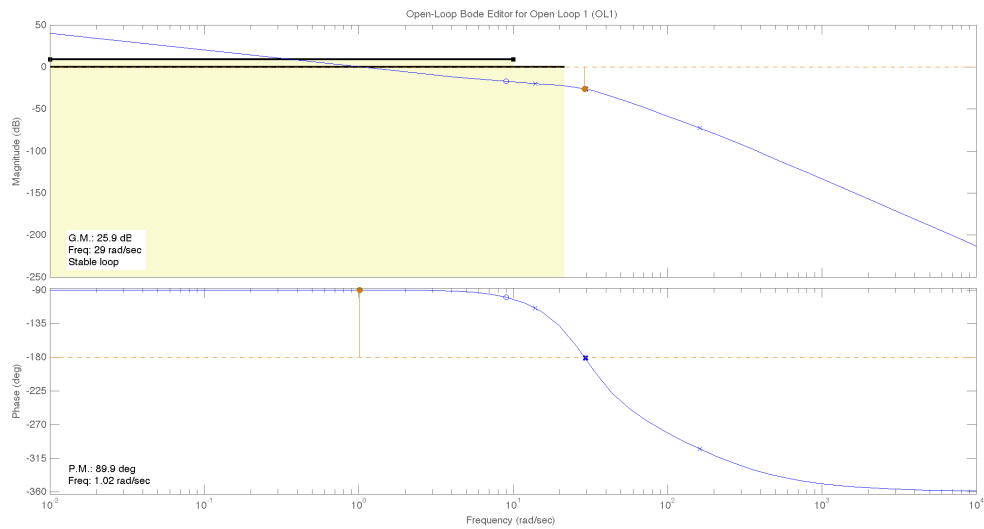


Figura 8: Diagramma di Bode della f.d.t. $G_2(s)$ con le specifiche di progetto.

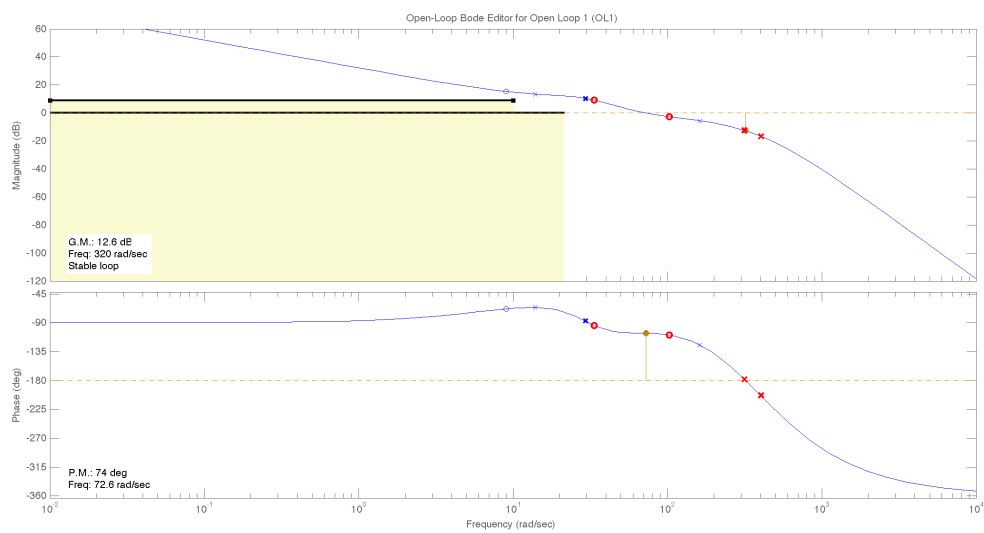


Figura 9: Diagramma di Bode risultante dal progetto della f.d.t. d'anello $C_2(s)G_2(s)$.

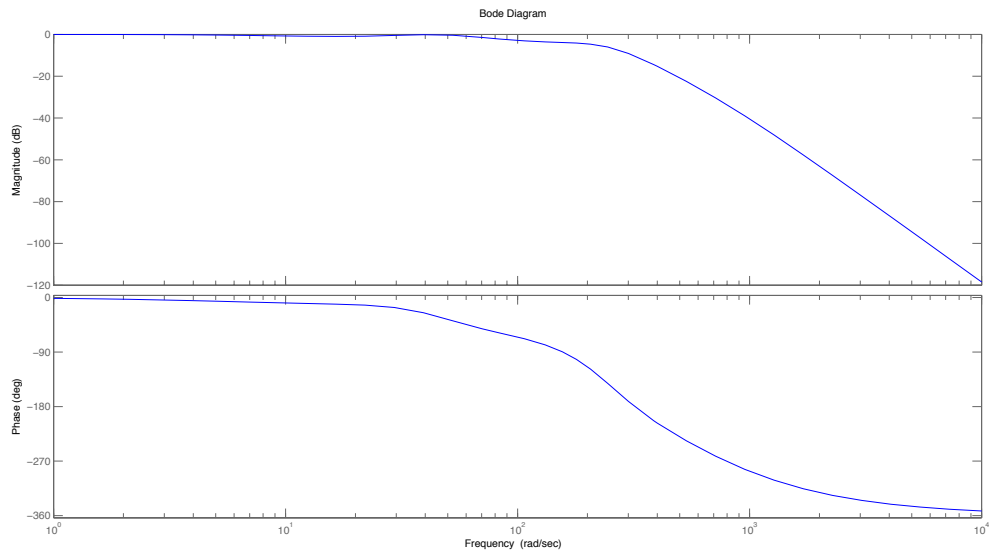


Figura 10: Diagramma di Bode del sistema controllato.

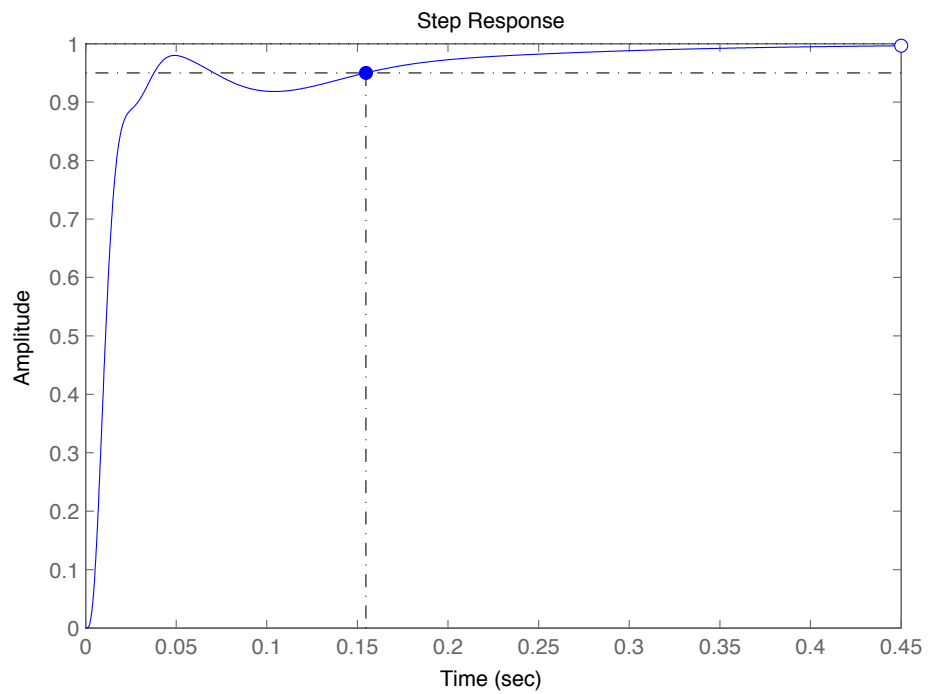


Figura 11: Risposta al gradino del sistema controllato.