

## Regolazione e Controllo di Sistemi Meccanici — 07-07-2011

Si consideri il modello dinamico di un nanorobot nel sangue per scopo medico/diagnostico come proposto in Cavalcanti et al, *Nanorobot Hardware Architecture for Medical Defense, Sensors* (figura 1).

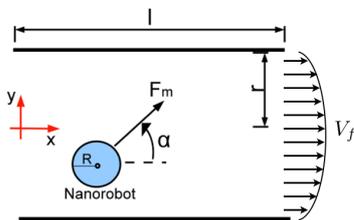


Figura 1: Modello del robot.

Il robot viene approssimato come un corpo sferico di raggio  $R$  e si suppone che il sangue sia un fluido di tipo Newtoniano. La velocità del fluido  $v_f$  si assume di tipo parabolico ed è massima al centro del condotto e decresce fino ad annullarsi in prossimità delle pareti del condotto stesso.  $F_r v$  rappresenta invece il valore della forza resistente che ostacola il moto del robot.

Il modello risulta quindi

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= -F_r(\dot{x} - v_f) + F_m \cos(\alpha) + f_d \\ m\ddot{y} &= -F_r\dot{y} + F_m \sin(\alpha) \end{cases}$$

con  $F_r = 6\pi\eta R$  e  $v_f = \frac{\Delta P}{4\eta l}(r^2 - y^2)$  e dove  $\eta$  è la viscosità del fluido,  $R$  è il raggio del corpo sferico con il quale viene approssimato il robot,  $\Delta P$  è la differenza di pressione ai capi del condotto,  $l$  è lunghezza del condotto ed  $r$  il suo raggio,  $F_m > 0$  è la forza motrice del robot,  $\alpha$  è l'angolo che ne definisce la direzione e  $f_d$  è la forza di disturbo che agisce sul robot.

- A** Supponendo che il sistema sia controllato regolando la direzione della forza motrice attraverso l'angolo  $\alpha$ , si determinino gli equilibri ammissibili in forma simbolica per  $f_d = 0$ .
- B** Supponendo di disporre della misura della distanza del centro di massa del robot dall'origine del sistema di riferimento ( $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ ) e di poter controllare l'angolo  $\alpha$ , si determini una rappresentazione del sistema in forma di stato intorno ad un equilibrio fisicamente ammissibile, per  $\bar{y} \geq 0$ ,  $\bar{x} = 25 \cdot 10^{-6}$  m e  $f_d = 0$ .

Si considerino i seguenti valori numerici:  $\eta = 0.00116$  Pa s;  $R = 10^{-7}$  m;  $\Delta P = 0.5$  Pa;  $m = 5 \cdot 10^{-10}$  Kg;  $l = 90 \cdot 10^{-6}$  m;  $r = 50 \cdot 10^{-5}$  m;  $F_m = 1.4 \cdot 10^{-12}$  N.

- C** Si traccino qualitativamente i modi propri del sistema.
- D** Si determini la funzione di trasferimento tra l'ingresso  $\alpha$  e l'uscita  $d$ , e quella tra il disturbo  $f_d$  e l'uscita  $d$ . Si analizzi la posizione assunta dagli zeri e il loro effetto sulla risposta a gradino.
- E** Si determini una legge di controllo per l'angolo  $\alpha$  che agisca in modo da garantire le seguenti specifiche:
- e1) partendo dall'origine del sistema di riferimento il robot deve portarsi a regime ad un valore  $d = \bar{d}$ , raggiungendo un valore compreso nell'intervallo  $\bar{d} \pm 5\%$  in un tempo non superiore a 10 s e senza mai eccedere un valore limite di 1.1  $\bar{d}$ ;
  - e2) ipotizzando che la forza  $f_d$  agente sul robot sia

$$f_d = \bar{f}_d + F_d \sin(\omega t), \quad 0 \leq F_d \leq 10^{-16} \text{ N}, \quad \omega \leq 0.01 \text{ rad/s},$$

cioè somma di una componente costante di valore  $\bar{f}_d$  generico e una componente variabile sinusoidalmente, si garantisca che:

- lo scostamento indotto dalla componente costante  $\bar{f}_d$  del disturbo sulla posizione  $d$  del robot rispetto al valore nominale  $\bar{d}$  sia completamente annullato;
- la variazione indotta dalla componente sinusoidale sulla posizione  $d$  del robot sia inferiore a  $10^{-8}$  m;

Si riporti esplicitamente il controllore ottenuto, il diagramma di Bode con le relative specifiche da rispettare e la risposta al gradino ottenuta con le caratteristiche significative.

## Soluzione

**A** Il sistema è descritto da quattro variabili di stato  $x, y, \dot{x}$  e  $\dot{y}$ . Dalla seconda equazione si ricava che  $\alpha = K\pi, k = 0, 1, \dots, n$ . Nel caso in cui  $\alpha = \pi$ , dalla prima equazione si ottiene

$$y = \pm \sqrt{r^2 - \frac{2lF_m}{3\pi R\Delta P}}$$

definito solo nel caso in cui  $r^2 \geq \frac{2lF_m}{3\pi R\Delta P}$ .

Nel caso in cui  $\alpha = 0$ , dalla prima equazione si ottiene invece

$$y = \pm \sqrt{r^2 + \frac{2lF_m}{3\pi R\Delta P}}$$

Essendo  $F_m$  e le altre grandezze del sistema maggiori di zero, l'argomento della radice risulta essere maggiore di  $r^2$ . Ne consegue che  $|y| > r$ , ovvero il punto di equilibrio del nanorobot risulta esterno al condotto e per questo non fisicamente ammissibile. Perciò, gli unici equilibri fisicamente ammissibili

sono quelli con  $\alpha = \pi$  ovvero le posizioni con  $y_1 = \sqrt{r^2 - \frac{2lF_m}{3\pi R\Delta P}}$  e  $y_2 = -\sqrt{r^2 - \frac{2lF_m}{3\pi R\Delta P}}$ .

Entrambi gli equilibri sono indifferenti rispetto alla coordinata  $x$ . Si nota anche che i due insiemi di punti di equilibrio sono perfettamente simmetrici, per cui nel seguito si considerano solo quelle corrispondenti a  $y = \bar{y}_1$  e  $x = \bar{x}$ .

**B** Indicando con  $\bar{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [x, y, \dot{x}, \dot{y}]^T$  le variabili di stato del sistema non traslato e con  $u_1 = \alpha$  e  $u_2 = f_d$  l'ingresso non traslato, si ottiene il seguente sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = \frac{-6\pi\eta R}{m}x_3 + \frac{-3\pi R\Delta P}{2lm}(x_2^2 - r^2) + \frac{F_m}{m}\cos u_1 + u_2 \\ \dot{x}_4 = \frac{-6\pi\eta R}{m}x_4 + \frac{F_m}{m}\sin u \end{cases}$$

Linearizzando attorno al punto di equilibrio  $\bar{x} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4] = [25 \cdot 10^{-6}, 4.9946 \cdot 10^{-4}, 0, 0]$ ,  $\bar{u}_1 = \pi$  e  $\bar{u}_2 = 0$ , precedentemente trovati, si ottiene:

$$\dot{x} = Ax + B_1u_1 + B_2u_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{6\pi R\Delta P}{2lm}\bar{x}_2 & -\frac{6\pi\eta R}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6\pi\eta R}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{F_m}{m}\sin(\bar{u}) \\ \frac{F_m}{m}\cos(\bar{u}) \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix} u_2$$

Infine, essendo l'uscita del sistema la distanza del robot dall'origine del sistema di riferimento, ( $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ ), si ottiene

$$d = \begin{bmatrix} \frac{\bar{x}_1}{\sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}} & \frac{\bar{x}_2}{\sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}} & 0 & 0 \end{bmatrix} x = Cx$$

**C** Sostituendo i valori numerici assegnati si ottiene:

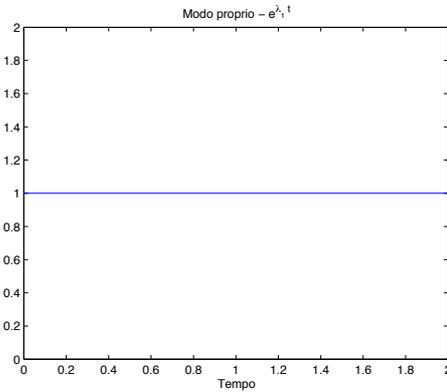
$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5230 & -4.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0028 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \cdot 10^9 \\ 0 \end{bmatrix} u_2$$

$$d = [0.05 \quad 0.9987 \quad 0 \quad 0] x = Cx$$

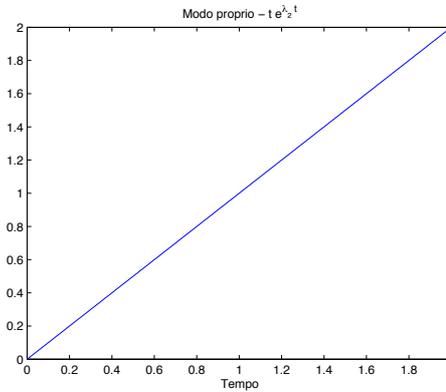
Dall'analisi del polinomio caratteristico della matrice  $A$ , si osserva che questo presenta due radici nulle  $\lambda_{1,2} \approx 0$  e due radici reali negative coincidenti  $\lambda_{3,4} \approx -4.3731$ . La forma di Jordan associata alla matrice  $A$  risulta

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4.3731 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4.3731 \end{bmatrix}$$

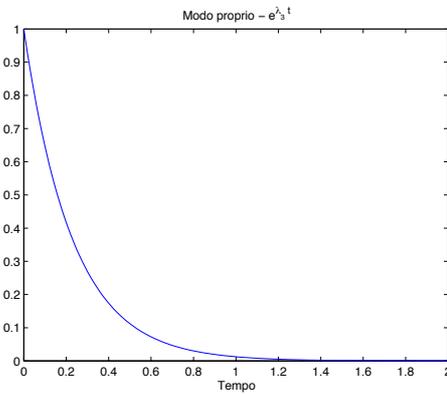
e indica che entrambi i blocchi associati agli autovalori  $\lambda \approx 0$  e  $\lambda \approx -4.3731$  sono di ordine due. Ne consegue che  $\lambda_1$  genera un modo costante (figura 2(a)),  $\lambda_2$  genera un modo polinomialmente divergente (figura 2(b)) e  $\lambda_3$  e  $\lambda_4$  generano modi convergenti (fig. 2(c), 2(d)).



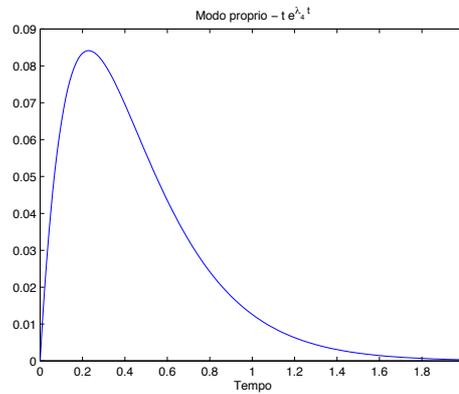
(a) Modo costante



(b) Modo polinomialmente divergente



(c) Modo convergente



(d) Modo convergente

Figura 2: Modi propri del sistema.

**D** La funzione di trasferimento tra l'ingresso  $\alpha$  e l'uscita  $d$  diviene complessivamente

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B_1 = \frac{-0.0027965(s + 18.51)(s - 14.14)}{s^2(s + 4.373)^2}.$$

Questa, oltre ai poli precedentemente visti, presenta due zeri, uno a parte reale negativa ed uno a parte reale positiva. Il secondo introduce un'inversione iniziale della risposta a gradino e conseguentemente un ritardo.

La f.d.t. tra il disturbo  $f_d$  e l'uscita risulta invece

$$G_{fd}(s) = C(sI - A)^{-1}B_2 = \frac{99981957}{s(s + 4.373)}.$$

**E** Il sistema presenta due poli nell'origine. Pertanto il progetto di un controllore che permetta al sistema complessivo di rispettare le specifiche può essere affrontato direttamente sui diagrammi di Bode. Faremo riferimento allo schema a blocchi di fig. 4 e al progetto di un controllore del tipo

$$C(s) = \frac{K_c}{s^t} C_0(s), \text{ con } C_0(0) = 1,$$

**e1)** La prima richiesta impone errore nullo a regime per l'inseguimento a segnali costanti  $d(t) = \bar{d}$ . Per tale motivo, poichè  $G(s)$  possiede già un polo nell'origine, non è necessario inserirne altri

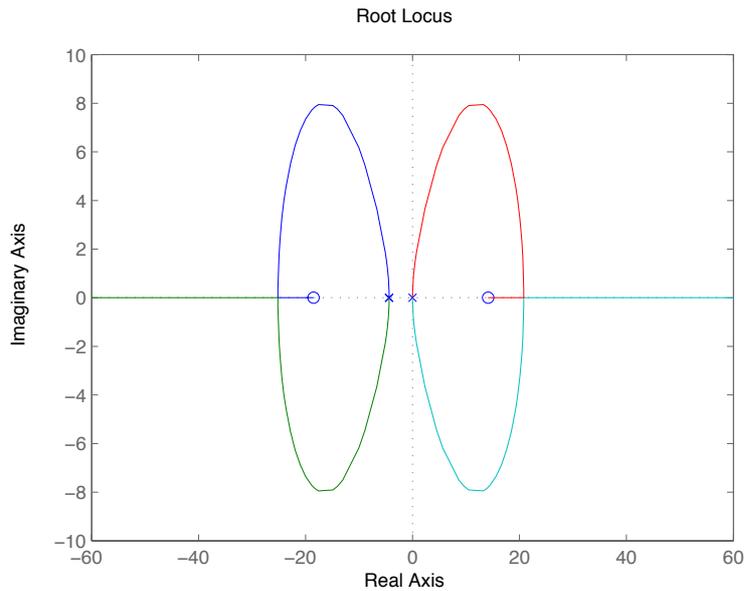


Figura 3: Luogo delle radici della f.d.t.  $G(s)$ .

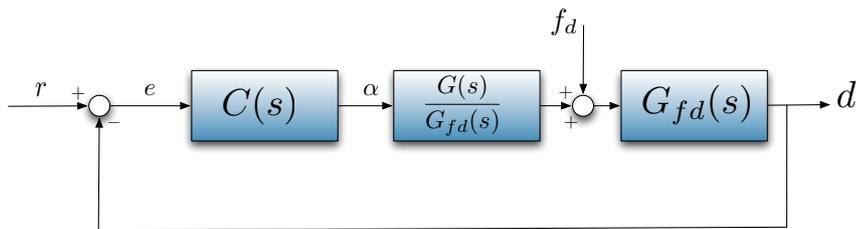


Figura 4: Schema a blocchi complessivo.

nel controllore. La costante  $K_c$  non è fissata dalle specifiche statiche (lo potrebbe essere se ad esempio fosse richiesto un errore di inseguimento limitato ad un riferimento a rampa lineare). Il valore di  $K_c$  sarà quindi determinato successivamente per rispettare le altre specifiche.

Nella seconda parte della specifica è richiesto un tempo di assestamento al 5% del valore di regime, inferiore a 10s, permettendo una sovraelongazione che al massimo sia pari al 10% del valore costante  $\bar{d}$  assegnato. Tentiamo di esaudire le specifiche sul tempo di assestamento e sulla sovraelongazione percentuale  $S\%$  progettando un controllore che permetta di approssimare il sistema in anello chiuso con un modello a due poli dominanti le cui caratteristiche frequenziali siano

$$S = e^{\left(-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\right)} \Rightarrow \delta = 0.59 \Rightarrow M_\phi \approx 60 \text{ deg}$$

$$\omega_T = \frac{3}{\delta T_a} \Rightarrow \omega_T \approx 0.5 \text{ rad/s}$$

Il diagramma di Bode con i vincoli sulla pulsazione di taglio  $\omega_T$  sono riportati in figura 5.

- d2)** Facendo riferimento allo schema a blocchi di fig. 4, per valutare l'effetto della componente costante del disturbo sull'uscita è necessario considerare la funzione di trasferimento tra  $e$  e  $f_d$ . Affinchè l'effetto di tale componente del disturbo sia completamente annullato è necessario che, per il teorema del valore finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)f_d(s) = 0.$$

In questo caso, poichè

$$E(s) = \frac{G_{fd}(s)}{1 + C(s)G(s)} f_d(s),$$

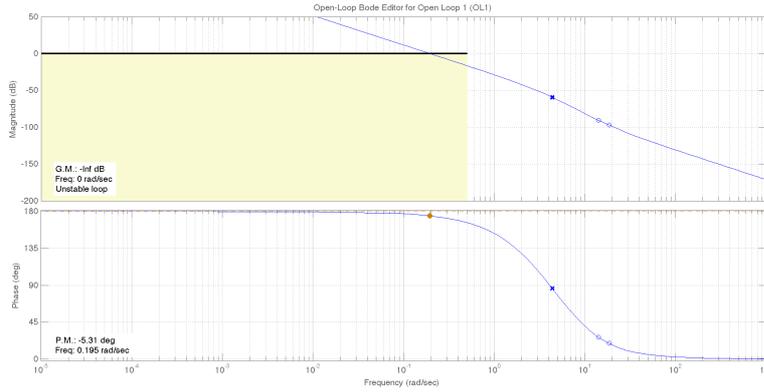


Figura 5: Diagramma di Bode della f.d.t.  $G(s)$  con specifica sulla banda passante.

per un ingresso  $f_d$  costante abbiamo

$$\lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G_{fd}(s)}{1 + C(s)G(s)} \frac{1}{s} = \frac{\bar{G}_{fd}(s)}{1 + \frac{K_c C_0(s)}{s^t} \frac{\bar{G}(s)}{s^2}} = \frac{s^{t+1} \bar{G}_{fd}(s)}{s^{t+2} + K_c C_0(s) \bar{G}(s)}$$

dove  $\bar{G}_{fd}$  e  $\bar{G}$  sono rispettivamente la f.d.t. del disturbo e del sistema private dei poli nell'origine. Perciò questa specifica risulta essere automaticamente soddisfatta senza dover inserire alcun integratore nel controllore.

Consideriamo adesso la componente sinusoidale del disturbo  $f_d$ . Partendo dal presupposto che il sistema controllato a ciclo chiuso sarà asintoticamente stabile in seguito al progetto del controllore  $C(s)$ , è possibile applicare il teorema della risposta armonica. La funzione di trasferimento tra il disturbo  $f_d$  sul robot e l'uscita  $d$  del sistema è data da

$$Y(j\omega) = \frac{G_{fd}}{1 + C(j\omega)G(j\omega)} \tilde{F}_d(j\omega) = \bar{G}(j\omega) \tilde{F}_d(j\omega)$$

Applicando, quindi, il teorema della risposta armonica

$$y(t) = |\bar{G}(j\omega)| F_d \sin(\omega t + \angle \bar{G}(j\omega)),$$

questa specifica è equivalente a richiedere che, per pulsazioni  $\omega \leq 0.01$  rad/s, si abbia  $|y(t)| < 10^{-8}$  m. Facendo riferimento al caso peggiore, si consideri la valutazione cautelativa  $\sin(\omega t + \angle \bar{G}(j\omega)) = 1$  e  $F_d = 10^{-16}$ . In questo caso la specifica richiede,

$$\Delta Y \leq \frac{G_{fd}}{1 + CG} F_d \leq 10^{-8}$$

Perciò, poichè nel campo di frequenze di interesse  $|G_{fd}|_{dB} < 187$  dB (figura 6), si cerca un guadagno di  $C(s)G(s)$  e quindi un controllore  $C(s)$  tale per cui

$$|C(s)G(s)| \geq 27dB$$

per pulsazioni inferiori a 0.01 rad/s.

Le limitazioni relative a questa specifica sono riportate in figura 7.

### Progetto del controllore.

Una possibile soluzione per il controllore  $C(s)$  in grado di rispettare tutte le specifiche proposte è la seguente

$$C(s) = 1027.5 \frac{(s + 0.06)}{(s + 45)}$$

che risulta essere costituito da una rete anticipatrice. Il diagramma di Bode della funzione di trasferimento in anello aperto è riportato in fig. 8. Si può notare che il controllore è costituito da

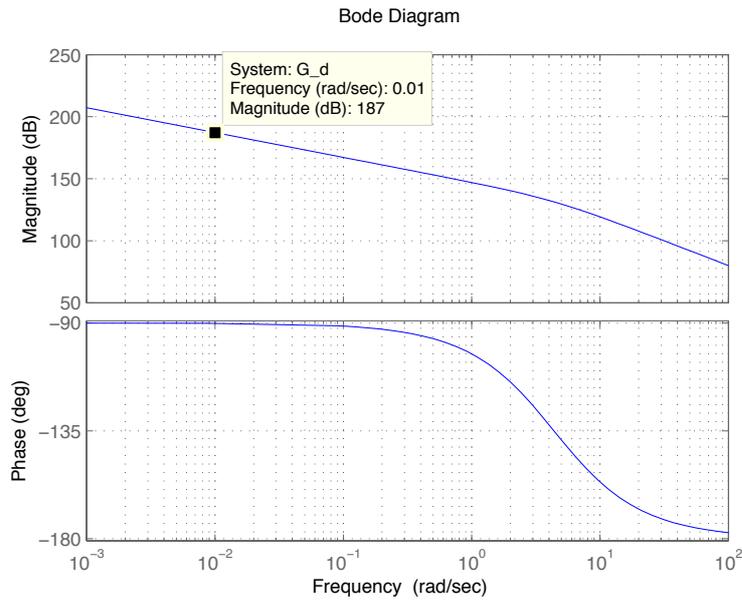


Figura 6: Diagramma di Bode della f.d.t.  $\bar{G}_{fd}(s)$ .

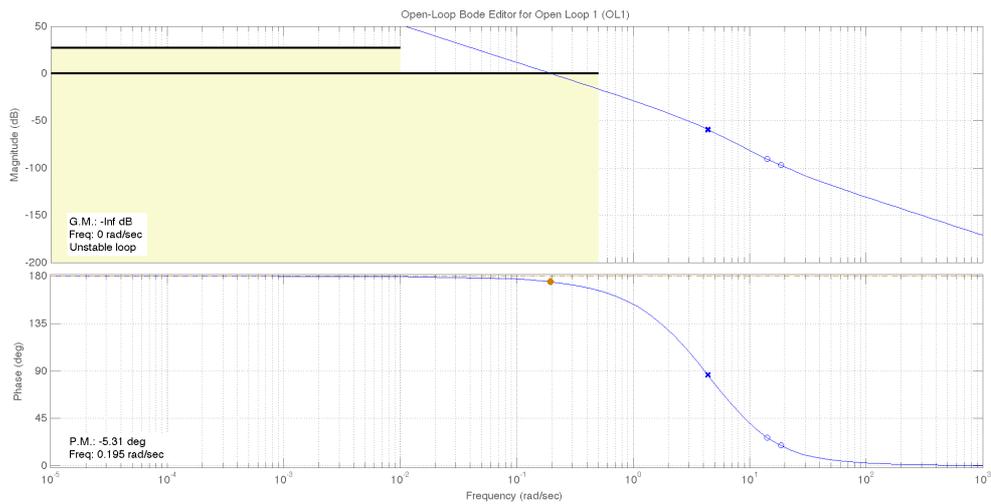


Figura 7: Diagramma di Bode della f.d.t.  $G(s)$  con le specifiche di progetto.

una semplice azione anticipatrice con lo zero (necessario per dare un incremento di fase ed alzare il diagramma di Bode per la specifica sulla pulsazione di taglio e sul margine di fase) in prossimità del doppio polo del sistema nell'origine ed un polo per ottenere la causalità del controllore a frequenza sufficientemente elevata da non alterare eccessivamente il diagramma nell'intorno della pulsazione di taglio. La funzione di trasferimento del sistema controllato risulta infine:

$$G_{cl}(s) = -2.8734 \frac{(s + 18.51)(s - 14.14)(s + 0.06)}{(s + 45.06)(s + 6.108)(s + 0.06463)(s^2 + 2.513s + 2.538)}$$

il cui diagramma di bode è riportato in fig. 9. In fig. 10 è invece riportata la risposta ad un ingresso a gradino del sistema controllato.

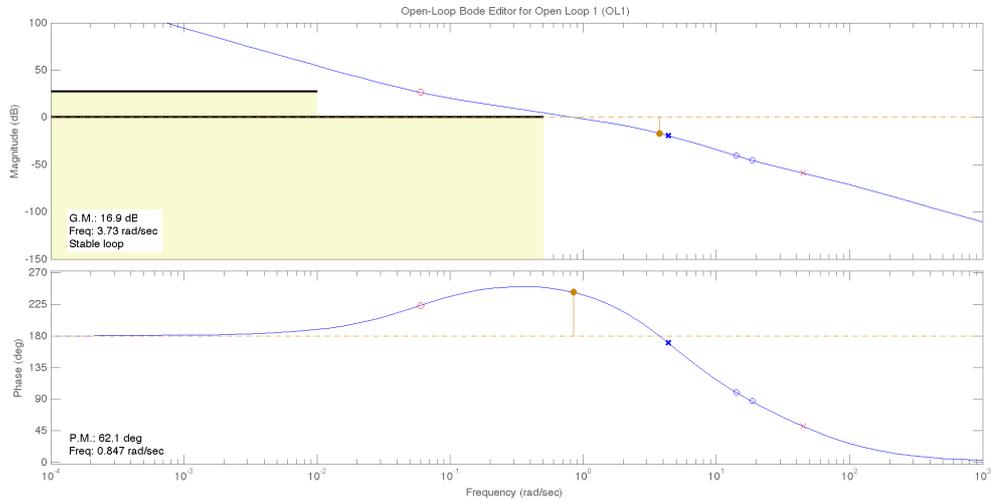


Figura 8: Diagramma di Bode risultante dal progetto della f.d.t. d'anello  $C(s)G(s)$ .

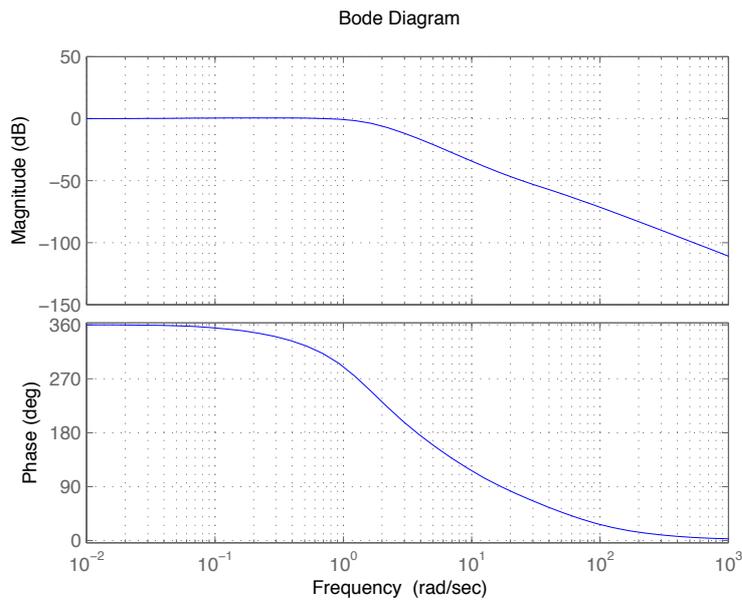


Figura 9: Diagramma di Bode del sistema controllato.

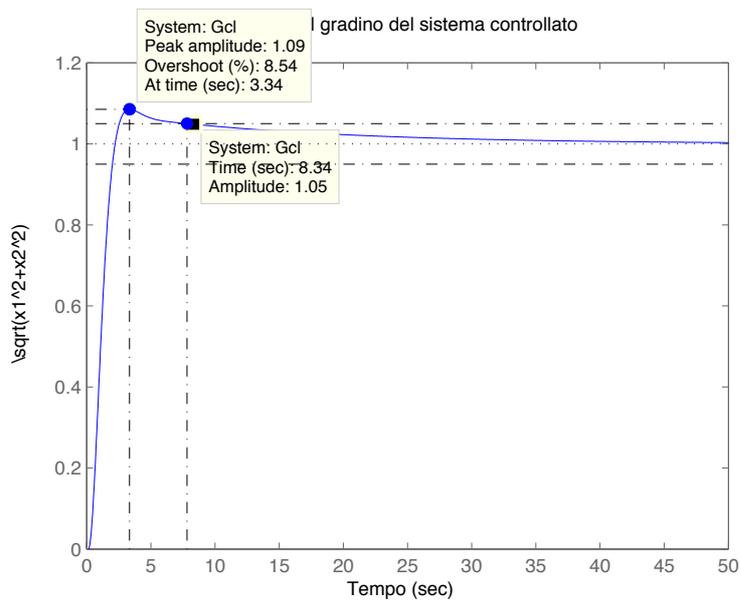


Figura 10: Risposta al gradino del sistema controllato.