

Figure 1: Sistema termico.

Si consideri il sistema termico mostrato in figura 1 dove la temperatura di un ambiente è regolata tramite un dispositivo che fornisce una potenza termica u . La capacità termica del dispositivo è C_R e la sua resistenza termica verso l'ambiente è R_{RA} . Si assuma poi che l'ambiente abbia una capacità termica C_A e una resistenza termica verso l'esterno R_{AE} . Il modello che descrive la dinamica di T_A e T_R , in relazione alla potenza termica u fornita è

$$\begin{cases} C_A \dot{T}_A = -\frac{T_A - T_R}{R_{RA}} - \frac{T_A - T_E}{R_{AE}} \\ C_R \dot{T}_R = -\frac{T_R - T_A}{R_{RA}} + u. \end{cases}$$

- A** Si determini il valore della potenza di ingresso u capace di mantenere un regime di equilibrio nel quale ad una temperatura esterna \bar{T}_E costante, corrisponda una temperatura \bar{T}_A dell'ambiente anch'essa costante ma superiore rispetto a quella esterna, di un valore di riferimento ΔT ;
- B** Considerando come uscita del sistema $y = T_A - T_E$ la differenza tra la temperatura ambiente e quella esterna, si determini una rappresentazione del sistema in forma di stato attorno all'equilibrio calcolato al punto precedente e si determinino le funzioni di trasferimento $G_u(s)$ tra u e y e $G_d(s)$ tra $d = T_E$ ed y . Si discutano le differenze tra le due f.d.t. e si dia una interpretazione fisica di tale differenza.

Considerando i seguenti valori numerici: $R_{RA} = 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C/W}$, $R_{AE} = 25 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C/W}$, $C_A = 500 \text{ J/}^\circ\text{C}$, $C_R = 100 \text{ J/}^\circ\text{C}$, $\bar{T}_E = 10^\circ\text{C}$ e $\Delta T = 5^\circ\text{C}$, si progetti un controllore tale da garantire le seguenti specifiche:

- C** A partire da condizioni iniziali $T_A = T_E$, si vuole che la differenza tra la temperatura dell'ambiente e quella dell'esterno torni esattamente al valore di riferimento ΔT , senza che la differenza ecceda il valore di regime di $\frac{\Delta T}{5}$, e con tempo di assestamento al 5% non superiore a 2 min;
- D** Se la temperatura esterna T_E subisce variazioni polinomiali del tipo

$$d(t) = (2 + 2t + 0.1t^2)H(t),$$

si assicuri che l'effetto a regime sull'uscita sia inferiore o al massimo uguale a 1°C ;

- E** Si consideri adesso una variazione del parametro C_A , pari al 50% del suo valore nominale. Il controllore deve garantire che l'effetto di tale variazione sull'uscita del sistema non sia superiore al 10% per tutte le frequenze di funzionamento inferiori a 0.1 rad/s .

Si riporti esplicitamente il controllore ottenuto, il diagramma di Bode con le relative specifiche da rispettare e la risposta al gradino ottenuta con le caratteristiche più significative.

- G** Utilizzando il metodo delle differenze in avanti, si scriva il codice di un programma che simuli numericamente il sistema termico;

- H** si effettuino simulazioni del sistema con diversi passi di integrazione, e si discutano le differenze tra i risultati.

Soluzione

A Il sistema è descritto da due variabili di stato: T_A , temperatura dell'ambiente e T_R , temperatura del dispositivo di condizionamento dell'ambiente. Essendo l'equilibrio caratterizzato da $\dot{T}_A = \dot{T}_R = 0$, sostituendo nelle equazioni dinamiche e considerando che $\bar{T}_A = \bar{T}_E + \Delta T$, si ottiene

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\bar{T}_E + \Delta T - \bar{T}_R}{R_{RA}} - \frac{\bar{T}_E + \Delta T - \bar{T}_E}{R_{AE}} \\ 0 = -\frac{\bar{T}_R - \bar{T}_E + \Delta T}{R_{RA}} + \bar{u}, \end{cases}$$

da cui,

$$\begin{cases} \bar{u} = \frac{\Delta T}{R_{AE}} \\ \bar{T}_R = \bar{T}_E + \left(\frac{R_{RA} + R_{AE}}{R_{AE}} \right) \Delta T. \end{cases}$$

B Indicando con $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2]^T = [T_A - \bar{T}_A, T_R - \bar{T}_R]^T$ le variabili di stato del sistema traslato nell'equilibrio, con $\tilde{u} = u - \bar{u}$ l'ingresso traslato e con $\tilde{d} = T_E - \bar{T}_E$ il disturbo anch'esso traslato, si ottiene il seguente sistema lineare in forma di stato traslato nell'equilibrio calcolato al punto precedente:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_{RA} + R_{AE}}{C_A R_{RA} R_{AE}} & \frac{1}{C_A R_{RA}} \\ \frac{1}{C_R R_{RA}} & -\frac{1}{C_R R_{RA}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_A R_{AE}} \\ \frac{1}{C_R} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{d} \end{bmatrix}.$$

Infine, essendo l'uscita del sistema la differenza di temperatura tra l'ambiente e l'esterno, allora $\tilde{y} = T_A - T_E - \Delta T$ e si ha

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{d} \end{bmatrix}.$$

Infine, la funzione di trasferimento $G_u(s)$ tra l'ingresso \tilde{u} e l'uscita misurata \tilde{y} risulta

$$G_u(s) = \frac{R_{AE}}{R_{RA} R_{AE} C_A C_R s^2 + (R_{AE} C_A + C_R (R_{RA} + R_{AE})) s + 1},$$

mentre la f.d.t. $G_d(s)$ tra il disturbo \tilde{d} e l'uscita misurata \tilde{y} risulta

$$G_d(s) = -\frac{R_{AE} s (R_{RA} C_A C_R s + C_A + C_R)}{R_{RA} R_{AE} C_A C_R s^2 + (R_{AE} C_A + C_R (R_{RA} + R_{AE})) s + 1}.$$

Le due f.d.t. differiscono solo per la presenza di due zeri di trasmissione nella seconda f.d.t., uno nell'origine e l'altro reale negativo. La presenza di uno zero implica la possibilità che, per un particolare disturbo non nullo esista una particolare condizione iniziale, tale che l'uscita rimanga nulla o invariata.

Come è possibile osservare dalla f.d.t. $G_u(s)$, il sistema risulta asintoticamente stabile per qualunque scelta dei parametri fisici. Pertanto il progetto di un controllore che permetta al sistema complessivo di rispettare le specifiche può essere affrontato direttamente sui diagrammi di Bode (la $G_u(s)$ è anche a fase minima). Si consideri quindi per il progetto un controllore del tipo

$$C(s) = \frac{k_c}{s^t} \hat{C}(s), \text{ con } \hat{C}(0) = 1,$$

dove la scelta del tipo t e della costante di guadagno k_c del controllore viene usualmente effettuata sulle specifiche relative alla condizione di regime mentre la restante parte $\hat{C}(s)$ su quelle dinamiche.

C La specifica richiede un errore nullo a regime per riferimento a gradino. Questo è garantito dalla presenza di un polo nell'origine in anello aperto. Poichè G_u non ne possiede, si dovrà progettare un controllore di tipo '1', cioè $t = 1$. Inoltre, la specifica richiede che l'uscita \tilde{y} , a partire da un valore iniziale tale che $T_A = T_E$, cioè $\tilde{y}(t=0) = -\Delta T$, raggiunga il suo valore di equilibrio, ovvero 0°C , senza mai superare un valore di $\frac{\Delta T}{5}$, ovvero una sovraelongazione percentuale inferiore al 20%, entrando e mantenendosi nella fascia di $\pm 0.05^\circ\text{C}$ in un tempo inferiore a $T_a = 120$ s. Questo, potendo approssimare il sistema in anello chiuso come un sistema a due poli dominanti, si traduce nel richiedere:

- smorzamento $\delta < 0.45$, ovvero $MF > 45^\circ$;
- pulsazione di taglio $\omega_T \geq \frac{3}{\delta T_a} = 0.055 \text{ rad/s}$.

In figura 2 è riportato il diagramma di Bode e la relativa specifica sulla pulsazione di taglio.

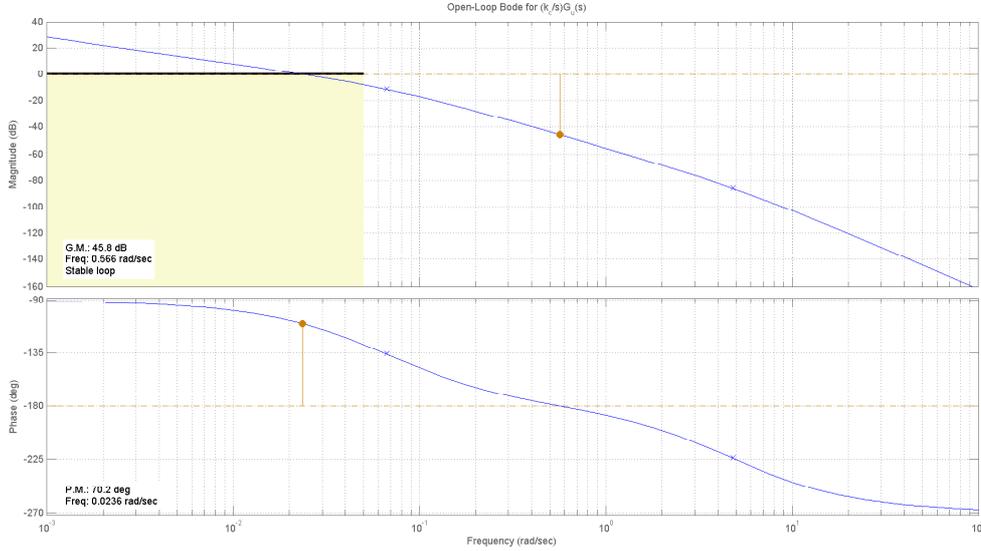


Figure 2: Diagrammi di Bode del sistema $\frac{k_c}{s} G_u(s)$ e relativa specifica sulla pulsazione di taglio.

D La specifica richiede che l'effetto sull'uscita di un segnale polinomiale, la cui trasformata di Laplace è

$$D(s) = \left(\frac{2}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{0.1}{s^3} \right),$$

risulti inferiore o al massimo uguale ad 1°C . A tal fine, si consideri la f.d.t. G_{du} tra il disturbo e l'uscita, considerando il prototipo di controllore riportato in precedenza:

$$G_{du} = \frac{G_d(s)}{1 + \frac{k_c}{s^t} \hat{C}(s) G_u(s)} = \frac{s^{t+1} \bar{G}_d(s)}{s^t + k_c \hat{C}(s) G_u(s)}.$$

dove $\bar{G}_d(s)$ è la f.d.t. del disturbo privata dello zero nell'origine. Applicando il teorema del valore finale a $Y(s) = G_{du} D(s)$, si ottiene:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{t+2} \bar{G}_d(s)}{s^t + k_c \hat{C}(s) G_u(s)} \left(\frac{2}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{0.1}{s^3} \right) < 1,$$

ovvero, scegliendo $t = 1$, si ha

$$\frac{\bar{G}_d(0)}{k_c \hat{C}(0) G_u(0)} < 1,$$

da cui:

$$k_c \geq 0.1 (C_A + C_R).$$

Poichè il polo nell'origine è stato già in precedenza inserito per soddisfare la specifica sull'errore a regime, di fatto si tratta soltanto di assicurare che k_c sia maggiore di $0.1 (C_A + C_R) = 60$.

E Si vuol limitare l'effetto sull'uscita causato da una imprecisione sul parametro C_A rispetto al suo valore nominale. Indicando con $G_c = \frac{C(s) G_u(s)}{1 + C(s) G_u(s)}$ la f.d.t. in anello chiuso, la specifica richiede che

$$\left| \frac{\Delta Y(s)}{Y(s)} \right| = \left| \frac{\Delta G_c(s)}{G_c(s)} \right| < 0.1, \quad s = j\omega, \quad 0 \leq \omega \leq 0.1 \text{ rad/s},$$

e procedendo come di consueto si ottiene:

$$\frac{\Delta G_c(s)}{G_c(s)} \approx \frac{1}{1 + C(s)G(s)} S_{C_A,o} \frac{\Delta C_A}{C_A},$$

dove,

$$S_{C_A,o} = -\frac{R_{AE}C_A s (R_{RA}C_R s + 1)}{(R_{RA}R_{AE}C_A C_R s^2 + (R_{AE}C_A + C_R (R_{RA} + R_{AE})) s + 1)}.$$

Dalla figura 3, considerando il caso peggiore nel range frequenziale di interesse ($|S_{C_A,o}|_{\omega < 0.1} < 0.7$),

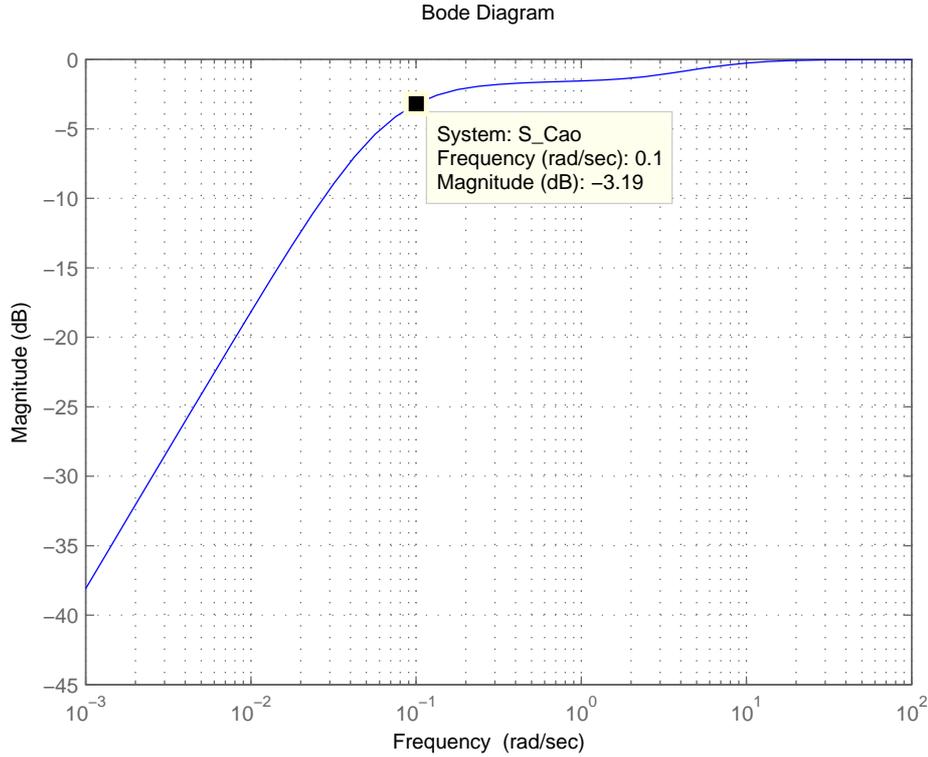


Figure 3: Diagramma di Bode della f.d.t. $S_{C_A,o}$.

ed effettuando le approssimazioni tipiche nei range di bassa frequenza, si ottiene

$$|C(s)G(s)| > 11 \text{ dB}.$$

In figura 4 è riportato il diagramma di Bode con riportate sia la specifica sulla banda passante che quella sulla variazione del parametro C_A .

Progetto del controllore Un possibile controllore in grado di rispettare tutte le specifiche è il seguente:

$$C(s) = \frac{60}{s} \frac{1 + 9.3 s}{1 + 0.64 s}.$$

Il controllore è caratterizzato da un polo nell'origine necessario per rispettare sia la specifica sull'errore a regime, sia quella relativo al disturbo polinomiale per il quale è necessario inoltre un $k_v \geq 60$. La rete anticipatrice in corrispondenza della pulsazione di taglio è infine necessaria per portare il margine di fase ad un valore superiore a 45° e tale per cui la sovralongazione percentuale sia inferiore al 20%.

In figura 5 e 6 sono riportati i diagrammi di Bode del sistema in anello aperto con le relative specifiche e la risposta al gradino con le grandezze significative, rispettivamente.

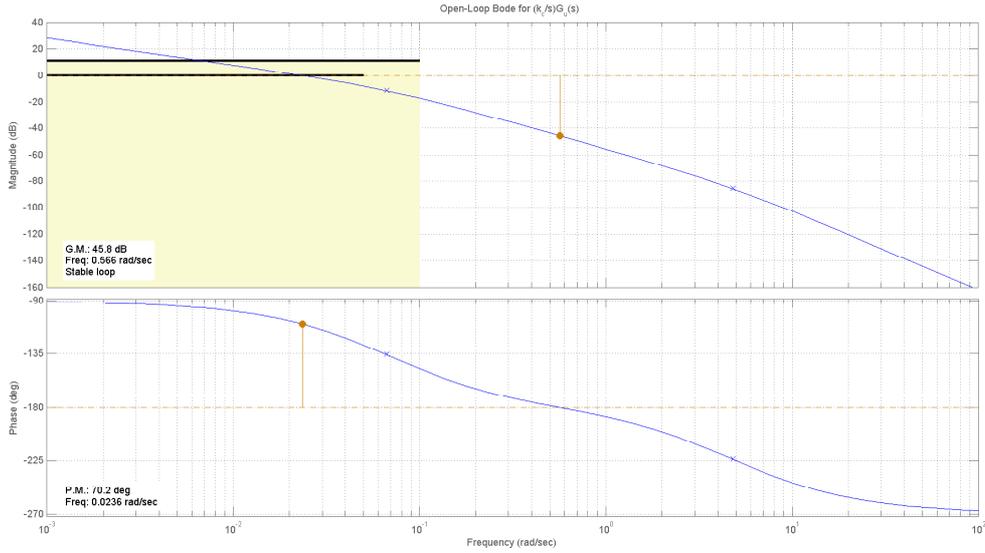


Figure 4: Diagrammi di Bode del sistema $\frac{k_c}{s} G_u(s)$ e relative specifiche sulla pulsazione di taglio e sulla variazione parametrica.

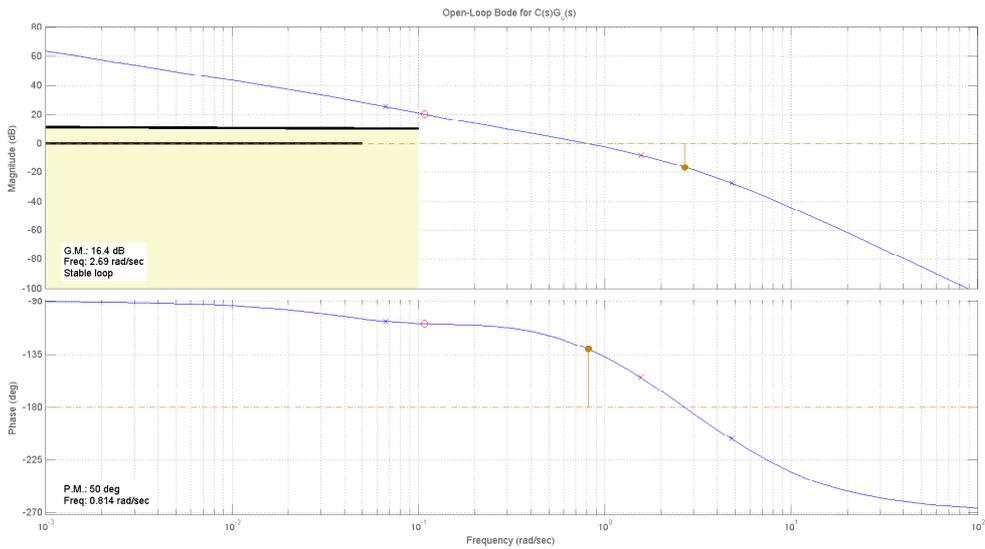


Figure 5: Diagrammi di Bode del sistema in anello aperto $C(s)G_u(s)$ e relative specifiche da rispettare.

G Utilizzando il metodo delle differenze in avanti alle equazioni dinamiche del sistema, sia ha

$$\begin{cases} T_A(k+1) = \left[1 - \left(\frac{R_{RA} + R_{AE}}{R_{RA}R_{AE}} \right) \right] T_A(k) + \frac{T_s}{C_A R_{RA}} T_R(k) + \frac{T_s}{C_A} \bar{T}_E \\ T_R(k+1) = \left(1 - \frac{T_s}{C_R R_{RA}} \right) T_R(k) + \frac{T_s}{C_R R_{RA}} T_A(k) + \frac{T_s}{C_R} \bar{u} \\ y(k) = T_A(k) - T_E(k). \end{cases}$$

A partire da condizioni iniziali corrispondenti all'equilibrio associato a $T_A = T_E$ con $u = 0$, il programma in linguaggio Matlab necessario alla simulazione del sistema che lo porta, ad esempio, nella condizione di regime corrispondente all'equilibrio calcolata al punto A è il seguente:

```
% Passo di integrazione Ts.
Ts = 0.5;
```

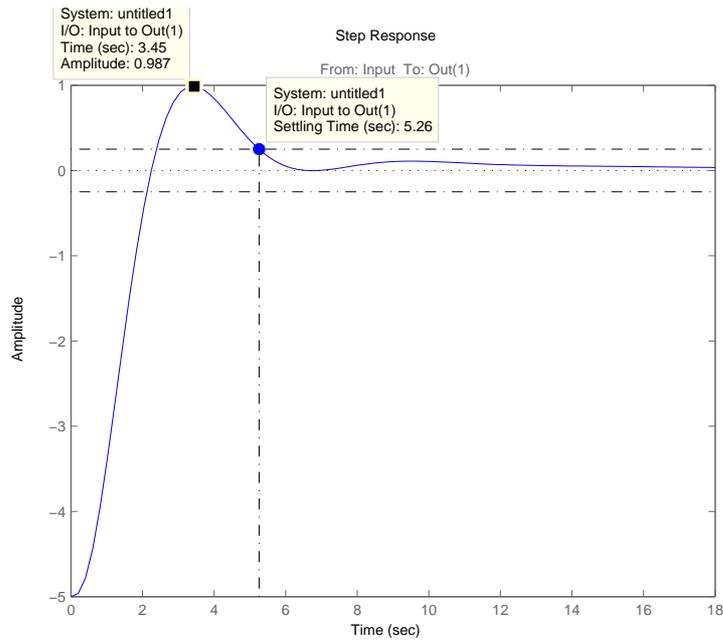


Figure 6: Risposta ad un gradino di ampiezza ΔT del sistema controllato a partire da condizioni iniziali corrispondenti ad $u = 0$, cioè $T_A = T_E$.

```

% Condizioni iniziali.
TR = TEbar;
TA = TEbar;
TE = TEbar;
y = TA-TE;
% Simulazione per un periodo di DT = 20.
for k = 0:Ts:20
    y = TA-TE;
    plot(k,y,'*k') % Plot del risultato.
    hold on
    TA = (1-(Ts/Ca)*((Rra+Rae)/(Rra*Rae)))*TA+(Ts/Ca)*TR/Rra+(Ts/Ca)*TE/Rae;
    TR = (1-Ts/(Cr*Rra))*TR+Ts*TA/(Cr*Rra)+(Ts/Cr)*u;
end

```

F Effettuando la simulazione per diversi valori di T_s si ottengono i risultati di figura 7.

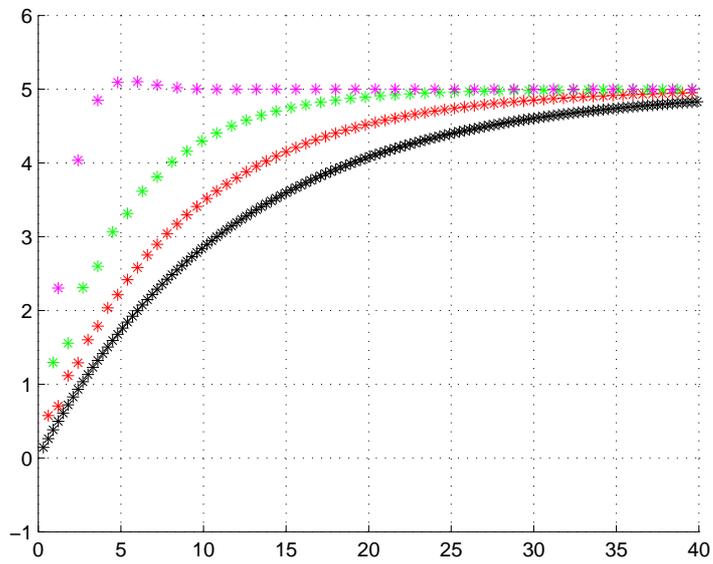


Figure 7: Simulazione del sistema per diversi valori del passo di integrazione: $T_s = 0.3$ in nero, $T_s = 0.6$ in rosso, $T_s = 0.9$ in verde e $T_s = 1.3$ in magenta.