Regolazione e Controllo dei Sistemi Meccanici — 10-06-2010

Si consideri lo schema meccanico di un sistema di posizionamento riportato in figura 1.



Figure 1: Sistema Meccanico.

Il sistema è costituito da una leva libera di ruotare senza attrito attorno alla cerniera in O, rispetto alla quale ha momento di inerzia J, e da due corpi di massa m_2 e m_3 rispettivamente, che si muovono senza attrito su un piano. I corpi sono collegati tra loro da elementi elastici e smorzatori lineari come descritto in figura. Lo scopo del meccanismo è di posizionare il corpo di massa m_3 con precisione in un riferimento assegnato, agendo sulla forza f applicata in direzione orizzontale alla leva. Indicando con $q_1 = \vartheta$ l'angolo della leva, e con q_2 , q_3 le posizioni delle due masse rispetto al sistema di riferimento rappresentato in figura 1, le equazioni che regolano la dinamica del sistema sono:

$$J\ddot{q}_{1} - l_{2} k_{2} \left(q_{2} - l_{2} \sin q_{1} - \frac{L}{3}\right) \cos q_{1} = \tau f l_{1} \cos q_{1} + \beta_{2} l_{2} \cos q_{1} \left(\dot{q}_{2} - l_{2} \dot{q}_{1} \cos q_{1}\right)$$
$$m_{2}\ddot{q}_{2} + k_{2} \left(q_{2} - l_{2} \sin q_{1} - \frac{L}{3}\right) - k_{3} \left(q_{3} - q_{2} - \frac{L}{3}\right) = -\beta_{2} \left(\dot{q}_{2} - l_{2} \dot{q}_{1} \cos q_{1}\right) + \beta_{3} \left(\dot{q}_{3} - \dot{q}_{2}\right)$$
$$m_{3}\ddot{q}_{3} + k_{3} \left(q_{3} - q_{2} - \frac{L}{3}\right) - k_{4} \left(\frac{2L}{3} - q_{3}\right) = -\beta_{3} \left(\dot{q}_{3} - \dot{q}_{2}\right)$$

 $\operatorname{con} \tau = \frac{l_1}{l_2}$ (vedi figura 1).

- **A** Si determini l'equilibrio del sistema relativo ad una generica forza $f = \bar{f}$ costante. Si fornisca inoltre una rappresentazione del sistema in forma di stato linearizzato attorno all'equilibrio corrispondente a $\bar{f} = 0$;
- **B** considerando ancora il caso particolare $\bar{f} = 0$, e dati i seguenti valori numerici dei parametri: L = 10 m, $l_1 = 3$ m, $l_2 = 7$ m, $m_2 = 6$ Kg, $m_3 = 9$ Kg, $k_1 = 9$ N/m, $k_2 = 6$ N/m, $k_3 = 3$ N/m, $k_4 = 6$ N/m, $\beta_2 = 6$ Ns/m, $\beta_3 = 10$ Ns/m, $\tau = l_1/l_2$, J = 27 Kgm² si tracci l'andamento qualitativo dei modi associati, e si discuta la stabilità del sistema, dando di questi risultati una interpretazione fisica.
- **C** si supponga di poter misurare la posizione q_3 della massa m_3 con un sensore di posizione con caratteristica $R(s) = 1/(s10^{-5} + 1)$. Supponendo di rimanere nel campo di funzionamento lineare, si determini una legge di controllo per agire sulla forza f in maniera da garantire le seguenti specifiche:
 - c1) a partire dalla configurazione di equilibrio calcolata precedentemente, si desidera che la massa m_3 raggiunga una posizione di riferimento a distanza 0.1 m, senza mai superare un valore massimo di sicurezza pari a 0.12 m. Si desidera che la posizione del corpo di massa m_3 raggiunga e superi l'obiettivo, e si mantenga vicina ad esso con una precisione non inferiore all'1%, portandosi a $\pm 5\%$ del valore di regime, in un tempo non superiore a 5 millesimi di secondo a partire dall'istante di attivazione del sistema;

- c2) si vuole che in presenza di un rumore di misura v(t) che si somma alla misura del sensore di posizione descritto da R(s), e modellabile come un segnale limitato in ampiezza $v(t) \leq 0.1$, $\forall t$, di natura armonica con frequenze non inferiori a 159 kHz, abbia effetti sulla uscita non superiori all'un percento.
- c3) si riporti esplicitamente il controllore ottenuto ed il diagramma di Bode del guadagno di anello con le relative specifiche da rispettare. Si riporti infine il diagramma della risposta a gradino, verificando il rispetto dei parametri sopra specificati.
- **D** Si scriva il codice di un programma che simuli numericamente il controllore ricavato al punto precedente, disponendo di un convertitore A/D e D/A con tempo di campionamento Ts generico ed ipotizzando di utilizzare il metodo delle differenze in avanti. Si discutino, in maniera qualitativa, le motivazioni che guidano la scelta del valore del tempo di campionamento Ts.

Soluzione

A Il sistema è descritto da sei variabili di stato q_1 , q_2 , q_3 , \dot{q}_1 , \dot{q}_2 e \dot{q}_3 . L'equilibrio corrispondente alla forza $f = \bar{f}$ costante, può essere calcolato direttamente a partire dalle equazioni dinamiche del sistema ponendo come di consueto $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \dot{q}_3 = 0$ e $\ddot{q}_1 = \ddot{q}_2 = \ddot{q}_3 = 0$. In questo modo si ottiene un sistema algebrico di tre equazioni in tre incognite, ovvero la posizione angolare \bar{q}_1 dell'asta incernierata in O e le posizioni \bar{q}_2 e \bar{q}_3 delle due masse, cioè

$$\begin{aligned} & (-l_2 k_2 \left(\bar{q}_2 - l_2 \sin \bar{q}_1 - \frac{L}{3} \right) = \bar{f} \, l_1 \, \tau \\ & k_2 \left(\bar{q}_2 - l_2 \sin \bar{q}_1 - \frac{L}{3} \right) - k_3 \left(\bar{q}_3 - \bar{q}_2 - \frac{L}{3} \right) = 0 \\ & k_3 \left(\bar{q}_3 - \bar{q}_2 - \frac{L}{3} \right) - k_4 \left(\frac{2L}{3} - \bar{q}_3 \right) = 0 \end{aligned}$$

dalle quali otteniamo,

$$\bar{q}_{1} = \arcsin\left\{\frac{1}{l_{2}}\left[\tau^{2}\bar{f}\left(\frac{1}{k_{3}} + \frac{1}{k_{4}} + \frac{1}{k_{2}}\right)\right]\right\}$$
$$\bar{q}_{2} = \frac{\tau^{2}\bar{f}}{k_{3}}\left(1 + \frac{k_{3}}{k_{4}}\right) + \frac{L}{3}$$
$$\bar{q}_{3} = \frac{\bar{f}\tau^{2}}{k_{4}} + \frac{2L}{3}.$$

Per ottenere il sistema traslato nel punto di equilibrio corrispondente a $\bar{f} = 0$, cioè $\bar{q}_1 = 0$, $\bar{q}_2 = \frac{L}{3}$ e $\bar{q}_3 = \frac{2L}{3}$, è sufficiente definire le variabili errore $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4, \tilde{x}_5, \tilde{x}_6]^T = [q_1 - \bar{q}_1, q_2 - \bar{q}_2, q_3 - \bar{q}_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3]^T$, $\tilde{u} = f - \bar{f}$. In questo modo il sistema avrà una rappresentazione di stato con equilibrio nell'origine per ingresso nullo, riportata di seguito

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_{1} &= \tilde{x}_{4} \\ \dot{\tilde{x}}_{2} &= \tilde{x}_{5} \\ \dot{\tilde{x}}_{3} &= \tilde{x}_{6} \\ \dot{\tilde{x}}_{4} &= \frac{1}{J} \left[\tau l_{1} \left(\tilde{u} + \bar{f} \right) \cos \left(\tilde{x}_{1} + \bar{q}_{1} \right) + \beta_{2} l_{2} \cos \left(\tilde{x}_{1} + \bar{q}_{1} \right) \left(\tilde{x}_{5} - l_{2} \cos \left(\tilde{x}_{1} + \bar{q}_{1} \right) \tilde{x}_{4} \right) + \\ &+ l_{2} k_{2} \left(\tilde{x}_{2} + \bar{q}_{2} - l_{2} \sin \left(\tilde{x}_{1} + \bar{q}_{1} - \frac{L}{3} \right) \cos \left(\tilde{x}_{1} + \bar{q}_{1} \right) \right) \right] \\ \dot{\tilde{x}}_{5} &= \frac{1}{m_{2}} \left[-\beta_{2} \left(\tilde{x}_{5} - l_{2} \cos \left(\tilde{x}_{1} + \bar{q}_{1} \right) \tilde{x}_{4} \right) + \beta_{3} \left(\tilde{x}_{6} - \tilde{x}_{5} \right) + k_{3} \left(\tilde{x}_{3} + \bar{q}_{3} - \tilde{x}_{2} - \bar{q}_{2} - \frac{L}{3} \right) + \\ &- k_{2} \left(\tilde{x}_{2} + \bar{q}_{2} - l_{2} \sin \left(\tilde{x}_{1} + \bar{q}_{1} \right) + \frac{L}{3} \right) \right] \\ \dot{\tilde{x}}_{6} &= \frac{1}{m_{3}} \left[-\beta_{3} \left(\tilde{x}_{6} - \tilde{x}_{5} \right) - k_{3} \left(\tilde{x}_{3} + \bar{q}_{3} - \tilde{x}_{2} - \bar{q}_{2} - \frac{L}{3} \right) + k_{4} \left(\frac{2L}{3} - \tilde{x}_{3} - \bar{q}_{3} \right) \right] \end{aligned}$$

dalla quale, derivando e calcolando nell'equilibrio suddetto, si ottiene il sistema linearizzato, nella consueta forma di stato

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{v} \tilde{z} = C\tilde{x} + D\tilde{v}$$

dove:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & a_{44} & a_{45} & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ 0 & a_{62} & a_{63} & 0 & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_{41} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad D = 0$$

con:

$$\begin{aligned} a_{41} &= -\frac{l_2^2 k_2}{J}; \qquad a_{42} = \frac{l_2 k_2}{J}; \qquad a_{44} = -\frac{\beta_2 l_2^2}{J}; \qquad a_{45} = \frac{\beta_2 l_2}{J}; \\ a_{51} &= \frac{l_2 k_2}{m_2}; \qquad a_{52} = -\frac{k_2 + k_3}{m_2}; \qquad a_{53} = \frac{k_3}{m_2}; \qquad a_{54} = \frac{l_2 \beta_2}{m_2}; \qquad a_{55} = -\frac{\beta_2 + \beta_3}{m_2}; \\ a_{56} &= \frac{\beta_3}{m_2}; \\ a_{62} &= \frac{k_3}{m_3}; \qquad a_{63} = -\frac{k_3 + k_4}{m_3}; \qquad a_{65} = \frac{\beta_3}{m_3}; \qquad a_{66} = -\frac{\beta_3}{m_3}; \\ b_{41} &= \frac{\tau l_1}{J}. \end{aligned}$$

B Sostituendo i valori numerici assegnati nelle matrici associate al sistema linearizzato attorno all'equilibrio corrispondente a $\bar{f} = 0$, si ottiene:

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -10.89 & 1.55 & 0 & -10.89 & 1.55 & 0 \\ 7 & -1.5 & 0.5 & 7 & -2.67 & 1.67 \\ 0 & 0.33 & -1 & 0 & 1.11 & -1.11 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0476 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{u}$$

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x} .$$

La matrice dinamica del sistema presenta una coppia di radici complesse e coniugate a parte reale negativa: $\lambda_{1,2} \approx -0.0516 \pm \jmath 0.6040 = \sigma_1 \pm \jmath \omega_1$, le quali generano modi oscillanti con pulsazione naturale $\omega_{n1} \approx 0,6$ rad/s e smorzamento $\delta_1 \approx 0,08$ (figura 2-a,b), e 5 poli reali nel semipiano sinistro i cui valori sono $\lambda_3 \approx -10,98$, $\lambda_4 \approx -2,06$, $\lambda_5 \approx -1,13$, $\lambda_6 \approx -0,38$ che genera modi esponenziali decrescente (figura 2-c,d,f,g).

Il calcolo della funzione di trasferimento tra l'ingresso \tilde{u} e l'uscita \tilde{x}_3 del sistema linearizzato può essere effettuato in due modi diversi; il primo richiede l'applicazione della seguente formula

$$G(s) = \frac{\tilde{X}_3(s)}{\tilde{U}(s)} = C (sI - A)^{-1} B,$$

mentre il secondo richiede l'applicazione diretta di alcuni comandi Matlab, ovvero G(s) = tf(ss(A, B, C, D)). Indipendentemente dalla strada percorsa, sostituendo i valori numerici dati, la funzione di trasferimento diviene complessivamente

$$G(s) = \frac{0.37037(s+1)(s+0.3)}{(s+10.98)(s+2.065)(s+1.1128)(s+0.386)(s^2+0.103s+0.367)}$$

In figura 3 è riportata la risposta al gradino, mentre in figura 4 il diagramma di bode, entrambi della funzione di trasferimento G(s).

C Il sistema risulta asintoticamente stabile con i valori numerici dati. Pertanto il progetto di un controllore che permetta al sistema complessivo di rispettare le specifiche può essere affrontato direttamente sui diagrammi di Bode (la G(s) è anche a fase minima). Facendo riferimento al progetto di un controllore del tipo

$$C(s) = \frac{k_c}{s^t} \hat{C}(s), \text{ con } \hat{C}(0) = 1,$$

iniziamo con la scelta del tipo t
 e della costante di guadagno k_c del controllore basando
ci sulle specifiche statiche.

c1) La specifica richiede di raggiungere una posizione di riferimento a distanza 0.1 m dalla posizione di equilibrio con un errore inferiore a 0.001 m. A questo scopo è sufficiente un controllore di tipo "0" (t = 0) con guadagno statico scelto in base alla relazione

$$\frac{1}{1 + k_c \, R(0) \, G(0)} \le 0.01$$



Figure 2: Modi propri del sistema: modi oscillanti e smorzati (a,b) e modi esponenziali negativi (c,d,e,f), ottenuti con il comando initial di Matlab.

Essendo R(0) = 1 si ricava

$$1 + k_c \, 0.03 > 100$$

Perciò, in definitiva, affinchè sia rispettata la specifica sull'errore a regime, è necessario che

$$k_c \ge 3300$$

che equivale a richiedere che

$$|kc G(0)| \ge 40 \, dB.$$

La specifica richiede inoltre che la massa m_3 raggiunga il valore di regime in un tempo inferiore a 5 ms evitando di superare il valore massimo di sicurezza pari a 0.12 m. Questo può essere garantito tentando la progettazione di un controllore tale che il sistema in anello chiuso sia ben approssimabile con un sistema a due poli dominanti rispetto al quale tali specifiche si



Figure 3: Risposta al gradino unitario della f.d.t. G(s).



Figure 4: Diagramma di Bode della f.d.t. G(s).

traducono come segue: una specifica sulla sovraelongazione, ovvero

$$S \le \frac{|x_{max} - x_r|}{|x_r|} = \frac{|0.12 - 0.1|}{|0.1|} = 20\%$$

che equivale a chiedere uno smorzamento dei poli dominanti dell'ordine di 0.4. Scegliendo cautelativamente $\delta \approx 0.45$, se ne ricava un margine di fase $\phi_m \geq 45^\circ$ e una specifica sul tempo di assestamento (riportato al gradino di ampiezza unitaria) pari a $T_a \leq \frac{0.005}{0.1}$ s che si traduce in termini di valore minimo da imporre sulla banda passante del sistema in anello chiuso,

ovvero sulla pulsazione di taglio di quella di anello che deve essere maggiore di $\omega_T \geq \frac{3}{\delta T_a} \approx 2.5 * 10^3$ rad/s, come riportato in figura 5.



Figure 5: Diagramma di Bode della f.d.t. G(s) con la specifica sulla pulsazione di taglio.

c2) La specifica riguarda la reiezione di un disturbo ν in alta frequenza che si somma al segnale prodotto dal sensore di caratteristica R(s), come riportato in figura 6. Per garantire tale richiesta, si consideri la f.d.t tra uscita e disturbo,

$$\frac{Y}{N} = -\frac{C(S)G(s)}{1 + C(s)G(s) R(s)}.$$

Considerando che l'effetto sull'uscita causata dal disturbo deve essere inferiore a 0.01m, che il massimo valore in ampiezza del disturbo è pari a 0.1 ed, infine, che il massimo valore in ampiezza assunto da R, nel range frequenziale di interesse è $|R|_{\omega_{int}} \approx -20$ dB (vedi figura 7), si può scrivere

$$\frac{|CG|}{|1+CGR|} \le \frac{0.01}{0.1} ;$$

Per ottenere questo risultato, si deve avere |CG| sufficientemente piccolo nelle pulsazioni di interesse, quindi, trascurando CGR rispetto a 1, si chiede che per frequenze superiori a 159kHz, ovvero per pulsazioni superiori a 10^{6} rad/s, si deve avere

$$|CG| \leq 0.1 = -20 \, dB$$
.

In figura 8 è riportato il diagramma di Bode di G(s) con la suddetta specifica.



Figure 6: Schema a blocchi utilizzato per il controllo del sistema comprensivo di trasduttore di misura R(s) posto nella catena di retroazione



Figure 7: Diagramma di Bode per R(s).



Figure 8: Diagramma di Bode di G(s) con la specifica sul rumore.

c3 Al fine di ottenere un sistema in anello chiuso a due poli dominanti e con smorzamento prossimo a quello richiesto, sarebbe opportuno progettare un controllore tale che la f.d.t. in anello aperto attraversi l'asse a 0 dB oltre la frequenza imposta dal tempo di assestamento, con una pendenza pari a -20 dB/dec e con un cambio di pendenza a -40 dB/dec vicino alla pulsazione di taglio. Se le altre singolarità sono sufficientemente lontane dalla pulsazione di taglio (maggiore di una decade), e se il cambio di pendenza avviene esattamente sul taglio, lo smorzamento sarebbe praticamente pari a 0.45, quindi il margine di fase pari a 45 deg. Per ottenere questo risultato si possono porre due zeri in prossimità dei poli più in alta frequenza del sistema ottenendo cosi un'attraversamento a -20 dB/dec e poi, per ottenere il corretto valore per il margine di fase, si può inserisce una rete anticipatrice in prossimità della pulsazione di taglio garantendo al contempo l'approssimazione della f.d.t con un sistema a due poli dominanti. In tal modo, la specifica sul rumore in alta frequenza risulta essere automaticamente soddisfatta; tuttavia è necessario inserire altri due poli in alta frequenza (circa una decade oltre la pulsazione di taglio) per garantire la causalità del controllore. Un possibile controllore in grado di rispettare

tutte le specifiche sopraindicate, è il seguente:

$$C = 643215275364038020 \frac{(s+10.12)(s+14.15)(s+1.805)}{(s+3487)(s+1.39210^5)^2}$$

Il guadagno abbastanza elevato è necessario sia per rispettare la specifica sull'errore a regime sia l'attraversamento dell'asse a 0 dB oltre la frequenza imposta dalla specifica sul tempo di assestamento.

In realtà, poiché in anello chiuso si deve considerare anche l'effetto del sensore di misura R, per rispettare la specifica sull'ivershoot dovremmo spostare il polo (s + 3487) ad esempio in (s + 3600). In caso contrario, la specifica su sovraelongazione viene violata, verificandosi un overshoot del 20.7%. In figura 10 è riportato il diagramma di Bode di anello del sistema controllato, con le specifiche da rispettare.



Figure 9: Diagramma di Bode di anello del sistema controllato, con le specifiche indicate

La risposta al gradino, in figura 10, mostra il rispetto dei parametri specificati, in particolare tempo di assestamento e sovraelongazione.

D Per poter simulare numericamente il controllore ottenuto, è necessario in primo luogo fornire una rappresentazione in forma di stato ad esempio in forma canonica di controllo. A tal fine, si consideri il controllore espresso come rapporto di polinomi riportato di seguito:

$$C(s) = \frac{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{1.013 \, 10^{16} \, s^3 + 2.64 \, 10^{17} \, s^2 + 1.9 \, 10^{18} \, s + 2.62 \, 10^{18}}{s^3 + 281015 \, s^2 + 2 \, 10^{10} \, s + 5.1 \, 10^{13}}$$

E' importante notare che in questo caso il sistema è non strettamente causale, quindi le matrici del sistema espresso in forma canonica di controllo saranno:

$$A_{c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_{0} & -a_{1} & a_{2} \end{bmatrix} \quad B_{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$C_{c} = \begin{bmatrix} b_{0} - b_{3}a_{0} & b_{1} - b_{3}a_{1} & b_{2} - b_{3}a_{2} \end{bmatrix}, \quad D_{c} = \begin{bmatrix} b_{3} \end{bmatrix}$$

Per ottenere il sistema discretizzato si utilizza il metodo di Eulero in avanti, ottenendo così il seguente:

$$\begin{cases} x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k) \\ y(k) = C_d x(k) + D_d u(k) \end{cases}$$



Figure 10: Risposta al gradino del sistema controllato

con $A_d = I + A_c Ts$, $B_d = Ts B_d C_d = C \in D_d = D$. Le parti essenziali di un programma che implementa il sistema tempo-discreto per simulare il controllore, scritto in uno pseudo-linguaggio che contempla le operazioni tra matrici, possono essere scritte nel modo seguente (si suppone che le costanti siano assegnate):

```
Costanti Assegnate: A_d, B_d, C_d, D_d, Ts
x=[0;0]; %Condizioni iniziali
% ciclo indefinito fino ad interruzione
while(condizione_arresto == 'false')
u = read(input); % Leggi l'ingresso
y=C_d*x+D_d*u;
write(y,output); % Scrivi l'uscita
x=A_d*x + B_d*u; % Aggiorna lo stato
end
```

Il valore del tempo di campionamento Ts, necessario a garantire una corretta simulazione della dinamica del controllore, dovrà essere scelto in maniera che $\frac{1}{T_s}$ sia maggiore della massima pulsazione associata alle singolarità del sistema, salvaguardandone nel contempo la stabilità (ovvero, gli autovalori della matrice A_d ottenuta devono cadere all'interno del cerchio unitario). In figura 11 è riportata la risposta al gradino del sistema controllore tempo continuo e del sistema tempo discreto, simulato per diversi valori di Ts. I tre valori indicati per il tempo di campionamento rispettano sia il requisito di stabilità che il requisito che impone che $\frac{1}{T_s}$ sia maggiore della massima pulsazione associata alle singolarità del sistema. Tuttavia, si può notare che la simulazione tempo-discreto approssima in maniera migliore il sistema tempo-continuo scegliendo mano a mano tempi di campionamento più piccoli. In altri termini; una volta individuato il tempo di campionamento che rispetta i requisiti sopraindicati per una corretta simulazione, andando a ridurlo progressivamente, si ottengono approssimazioni sempre più buone.



Figure 11: Risposta al gradino per il sistema controllore tempo-continuo e tempo-discreto, per vari valori del tempo Ts.