

Si consideri il modello dinamico di un aquilone (figura 1).

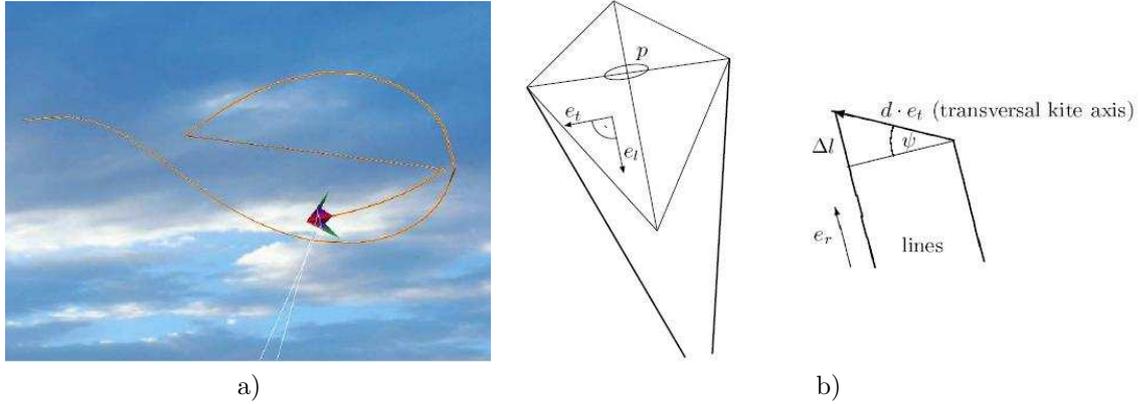


Figure 1: a) Foto di una aquilone reale che vola ad alta quota. b) A sinistra rappresentazione dell'aquilone dal punto di vista del pilota, a destra vista frontale dell'aquilone con visualizzazione dell'angolo di rollio ψ .

L'aquilone, di forma romboidale con asse trasversale (e_t) minore di quello longitudinale (e_l), è tenuto per mezzo di due fili ancorati alle estremità dell'asse minore. Le corde permettono di controllare l'angolo $\psi = \arcsin(\Delta l/d)$ di rollio dell'aquilone, dove Δl è la differenza di lunghezza dei due fili e d la misura dell'asse trasversale. La posizione $p \in \mathbb{R}^3$ del baricentro geometrico dell'aquilone può essere rappresentata nello spazio 3D scegliendo l'origine come posizione del pilota ed introducendo le coordinate polari (θ, ϕ, r) . Introducendo poi una terna locale con origine nel baricentro geometrico dell'aquilone e caratterizzata dai versori (e_θ, e_ϕ, e_r) , e supponendo che $r = \bar{r}$, cioè che la distanza dell'aquilone dall'origine si mantenga costante, le equazioni che descrivono la dinamica del sistema meccanico possono essere scritte nella forma

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= \frac{F_\theta}{r M} + \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 \\ \ddot{\phi} &= \frac{F_\phi}{r M \sin \theta} - \frac{2\dot{\phi}\dot{\theta}}{\tan \theta},\end{aligned}$$

dove M è la massa dell'aquilone. Supponendo poi che l'asse longitudinale e_l si mantenga sempre nella direzione individuata dal versore e_θ , allora le componenti F_θ e F_ϕ della forza cui è soggetto l'aquilone sono:

$$\begin{aligned}F_\theta &= M g \sin \theta + \frac{1}{2} \rho A C_D \left[v_w^2 + r^2 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right) - 2 r v_w \left(\dot{\theta} \cos \phi \cos \theta - \dot{\phi} \sin \phi \sin \theta \right) \right] \\ F_\phi &= -\frac{1}{2} \rho A C_L \left[v_w^2 + r^2 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right) - 2 r v_w \left(\dot{\theta} \cos \phi \cos \theta - \dot{\phi} \sin \phi \sin \theta \right) \right] \sin \psi,\end{aligned}$$

dove g è l'accelerazione di gravità, ρ è la densità dell'aria, A l'area caratteristica dell'aquilone, C_D e C_L il coefficiente di *drag* e *lift* rispettivamente e infine, v_w la velocità del vento.

A Si determini il regime di equilibrio, in forma simbolica, corrispondente al punto di lavoro desiderato $\phi = \bar{\phi}$ costante;

Supponiamo che la velocità del vento sia $v_w = 6$ m/s, e che la coordinata polare di equilibrio sia $\bar{\phi} = \pi/4$. Consideriamo il modello linearizzato approssimato vicino all'equilibrio associato a $\phi = \bar{\phi}$ dato dalla seguente f.d.t. tra l'ingresso $\Psi(s)$ e l'uscita misurata $\Theta(s)$:

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{\Psi(s)} = -\frac{23 \cdot 10^{-3} v_w^3}{s(s^2 + (0.25 v_w s - 1)\alpha(v_w))} \Big|_{v_w=6} = -\frac{5.04}{s(s^2 + 1.15 s - 0.75)},$$

dove $\alpha(v_w) = \cos(\arcsin(-18.35 \cdot 10^{-3} v_w^2))$.

B Si determini una legge di controllo per l'angolo di rollio ψ dell'aquilone che agisca in modo da garantire le seguenti specifiche:

- b1)** l'errore a regime per ingresso polinomiale del tipo $r(t) = a + bt$, con a costante e $b \leq 3$, deve mantenersi inferiore a 0.1 rad;
- b2)** la coordinata polare θ deve portarsi da zero ad un valore compreso nell'intervallo $\bar{\theta} \pm 0.05\bar{\theta}$ in un tempo non superiore a 13 ms senza mai eccedere un valore limite di $1.2\bar{\theta}$;
- b3)** in presenza di errori di stima della velocità del vento di ampiezza massima ± 1 m/s, l'errore relativo sull'uscita corrispondente a ingressi sul campo di frequenze $0 \leq \omega \leq 10$ rad/s, sia minore del $\pm 25\%$.

Si riporti esplicitamente il controllore ottenuto ed il diagramma di Bode del guadagno di anello con le relative specifiche da rispettare, nonché la risposta al gradino unitario, il diagramma di Bode del sistema in anello chiuso e il diagramma a blocchi complessivo.

C A partire dalle equazioni dinamiche dell'aquilone, si determini una rappresentazione del sistema in forma di stato, intorno all'equilibrio desiderato $\phi = \bar{\phi}$.

D si scriva il codice di un programma che simuli numericamente il sistema ricavato al punto precedente disponendo di un convertitore A/D e D/A con tempo di campionamento T_s generico ed ipotizzando di utilizzare il metodo delle differenze all'avanti.

Soluzione

A Il sistema è descritto da quattro variabili di stato θ , ϕ , $\dot{\theta}$ e $\dot{\phi}$. Essendo l'equilibrio caratterizzato dalla coordinata polare ϕ dell'aquilone costante e pari al valore $\bar{\phi}$ generico, si ricava che $\dot{\phi} = \ddot{\phi} = 0$. Inoltre, essendo l'equilibrio caratterizzato da valori costanti di tutte le variabili che compaiono nelle equazioni dinamiche, si ha che $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$. Sostituendo tali valori, si ottiene un sistema di due equazioni in due incognite, l'angolo di rollio $\bar{\psi}$ e la coordinata polare $\bar{\theta}$, che sono

$$\bar{\psi} = 0$$

$$\bar{\theta} = \arcsin\left(-\frac{\rho A C_D v_w^2}{2 M g}\right).$$

B Per il teorema di Descartes, la f.d.t. associata al sistema linearizzato attorno all'equilibrio corrispondente a $\bar{\phi} = \pi/4$ possiede un polo a parte reale positiva: il sistema è quindi instabile. Conseguentemente, prima di progettare un controllore in grado di soddisfare sia le specifiche statiche che quelle dinamiche, sarà necessario procedere con il progetto di un primo controllore stabilizzante e successivamente realizzare un controllo in cascata come riportato in figura 2. La f.d.t. $G(s)$ espressa in

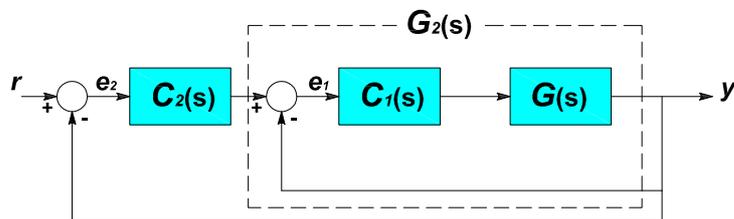


Figure 2: Schema a blocchi complessivo (controllo in cascata).

forma fattorizzata è

$$G(s) = -\frac{5.04}{s(s + 1.61)(s - 0.46)},$$

e presenta un polo nell'origine e due poli semplici di cui uno a parte reale negativa e uno a parte reale positiva.

La progettazione di un controllore stabilizzante si effettua utilizzando la tecnica del Luogo delle Radici. In figura 3 è riportato il luogo delle radici di $G(s)$. Essendo la costante $K_1 = -5.04 < 0$, il grafico riportato in figura è in realtà il luogo inverso delle radici. Un possibile controllore

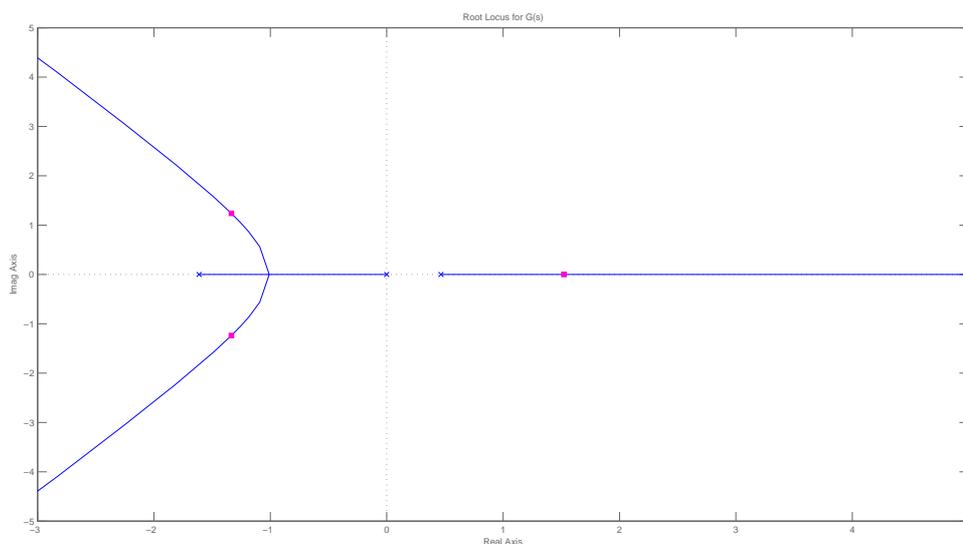


Figure 3: Luogo delle radici della f.d.t. $G(s)$.

stabilizzante è

$$C_1(s) = -\frac{7424(s^2 + 11s + 60.05)}{s^2 + 57.58s + 2436}.$$

Tale controllore presenta un guadagno negativo, una coppia di zeri e una coppia di poli entrambi complessi coniugati e a parte reale negativa. Il guadagno negativo è necessario per ottenere il luogo diretto della f.d.t. d'anello, eliminando di conseguenza il ramo sull'asse reale positivo del piano complesso. Il luogo delle radici che si otterrebbe ponendo un controllore puramente proporzionale con $K_g = -1$ è costituito ancora da due rami nel semipiano positivo ma uscenti dall'asse reale in un punto compreso fra il polo nell'origine e il polo instabile. Per attirare tali rami nel semipiano sinistro è opportuno inserire una coppia di zeri complessi coniugati nel semipiano sinistro. Aggiustando poi il guadagno del controllore si otterrebbe una f.d.t. in anello chiuso asintoticamente stabile. Il controllore tuttavia non sarebbe realizzabile: la coppia di poli complessi coniugati nel semipiano sinistro presenti nel controllore $C_1(s)$ è stata inserita proprio per soddisfare i requisiti di causalità. La figura 4 riporta il luogo delle radici della f.d.t. $C_1(s)G(s)$.

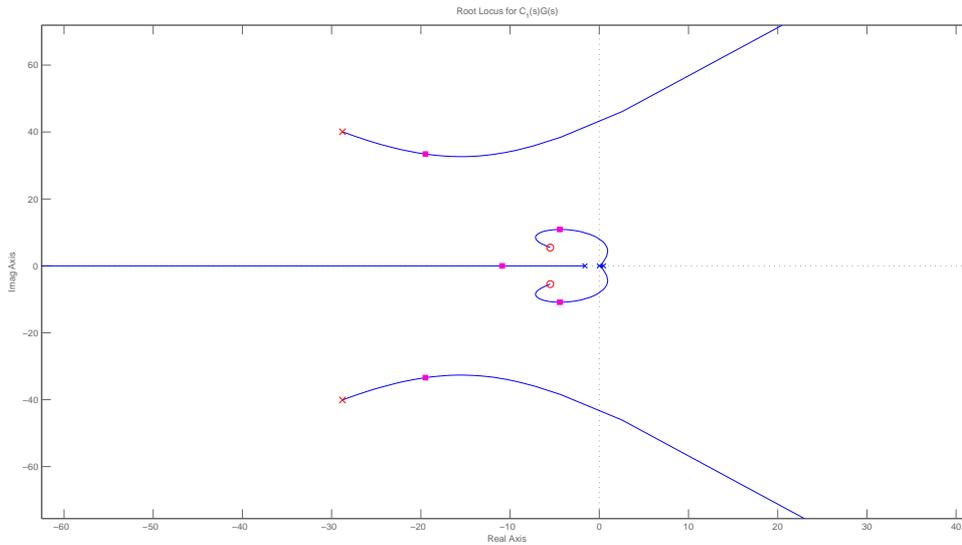


Figure 4: Luogo delle radici della f.d.t. $C_1(s)G(s)$.

La f.d.t. dell'anello stabilizzante è

$$G_2(s) = \frac{C_1(s)G(s)}{1 + C_1(s)G(s)} = \frac{37450.64(s^2 + 11s + 60.05)}{(s + 10.88)(s^2 + 8.86s + 138.1)(s^2 + 39s + 1497)}$$

il cui diagramma di Bode è riportato in figura 5.

Il progetto di un secondo controllore del tipo

$$C_2(s) = \frac{K}{s^t} C_0(s) \quad C_0(0) \geq 1,$$

tale da soddisfare le specifiche statiche e dinamiche può essere fatto direttamente sui diagrammi di Bode in quanto la f.d.t. $G_2(s)$ sulla quale il controllore $C_2(s)$ agisce è asintoticamente stabile.

b1) La specifica statica richiede che l'errore a regime per un riferimento polinomiale costituito dalla somma di un gradino di ampiezza a generica e una rampa lineare con pendenza $b \leq 3$ deve mantenersi limitato. Questo può essere garantito progettando un controllore di tipo "1" ($t=1$) con guadagno statico $K \geq \bar{K}$. Così facendo, l'effetto del gradino di ampiezza a sull'errore a regime viene completamente annullato mentre gli effetti della rampa lineare sono limitati dalla opportuna scelta di \bar{K} . Quest'ultimo può essere determinato applicando il teorema del valore finale, cioè

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + \frac{K}{s} C_0(s) G_2(s)} \frac{b}{s^2} = \frac{b}{K C_0(0) G_2(0)} \leq \frac{3}{K G_2(0)} \leq 0.1.$$

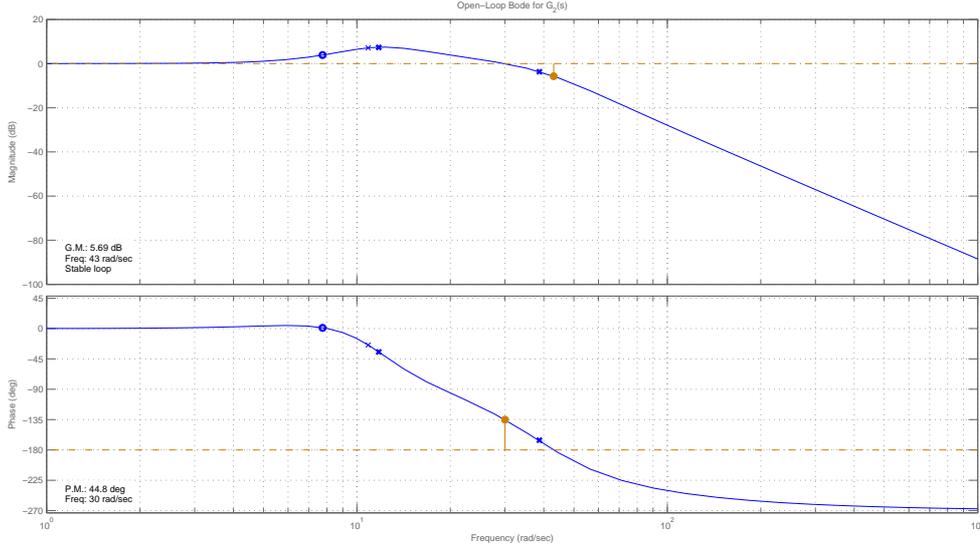


Figure 5: Diagramma di Bode della f.d.t. $G_2(s)$.

Questo si traduce in una richiesta sul valore minimo che deve avere il guadagno di velocità della f.d.t. d'anello $C_2(s)G_2(s)$, ovvero $|K G_2(0)| \geq 30 \text{ dB}$. In particolare, poichè $G_2(0) \simeq 1$ si deve avere $\bar{K} = 30$.

- b2)** la seconda specifica può essere soddisfatta qualora la f.d.t. a ciclo chiuso $G_c(s)$ sia un sistema a due poli dominanti (ovvero approssimabile con un sistema del secondo ordine), rispetto al quale le specifiche sulla sovraelongazione e tempo di assestamento al 5% si traducono, nel dominio della frequenza, come segue:

$$S = e\left(-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\right) \Rightarrow \delta = 0.46 \Rightarrow M_\phi \approx 46 \text{ deg}$$

$$\omega_T = \frac{3}{\delta T_a} \Rightarrow \omega_T \approx 500 \text{ rad/s}$$

Il diagramma di Bode con i vincoli sulla pulsazione di taglio ω_T sono riportati in figura 6.

- b3)** Si vuol limitare l'effetto sull'uscita θ di una imprecisione sul parametro v_w rispetto al suo valore nominale. Indicando con $G_c(s) = \frac{C_2 G_2}{1 + C_2 G_2}$ la f.d.t. in anello chiuso complessiva e con $G_2 = \frac{C_1 G}{1 + C_1 G}$ quella dell'anello stabilizzante, allora la specifica richiede che

$$\left| \frac{\Delta\Theta(s)}{\Theta(s)} \right| = \left| \frac{\Delta G_c(s)}{G_c(s)} \right| \leq 0.25, \quad s = j\omega, \quad 0 \leq \omega \leq 10.$$

Procedendo come di consueto, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\Delta G_c(s)}{G_c(s)} &\approx \frac{1}{G_c(s)} \frac{\partial G_c(s)}{\partial G(s)} \Delta G(s) = \frac{1}{G_c(s)} \frac{\partial G_c(s)}{\partial G_2(s)} \frac{\partial G_2(s)}{\partial G(s)} \Delta G(s) = \\ &= \frac{1}{1 + C_2(s)G_2(s)} \frac{1}{G_2(s)} \frac{\partial G_2(s)}{\partial G(s)} \Delta G(s) = \\ &= S_{C_2, G_2} \frac{1}{1 + C_1(s)G(s)} \frac{\Delta G(s)}{G(s)} = \\ &= S_{C_2, G_2} S_{C_1, G} S_{v_w, o}(s) \frac{\Delta v_w}{v_w}, \end{aligned}$$

dove, considerando che $G(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$, si ha

$$S_{v_w, o}(s) = \left. \frac{\partial G(s, v_w)}{\partial v_w} \right|_{v_w=6} \frac{v_w}{G(s)} = 3 + v_w \left. \frac{s[0.25 s(K_1 - v_w K_2) + K_2]}{d(s)} \right|_{v_w=6},$$

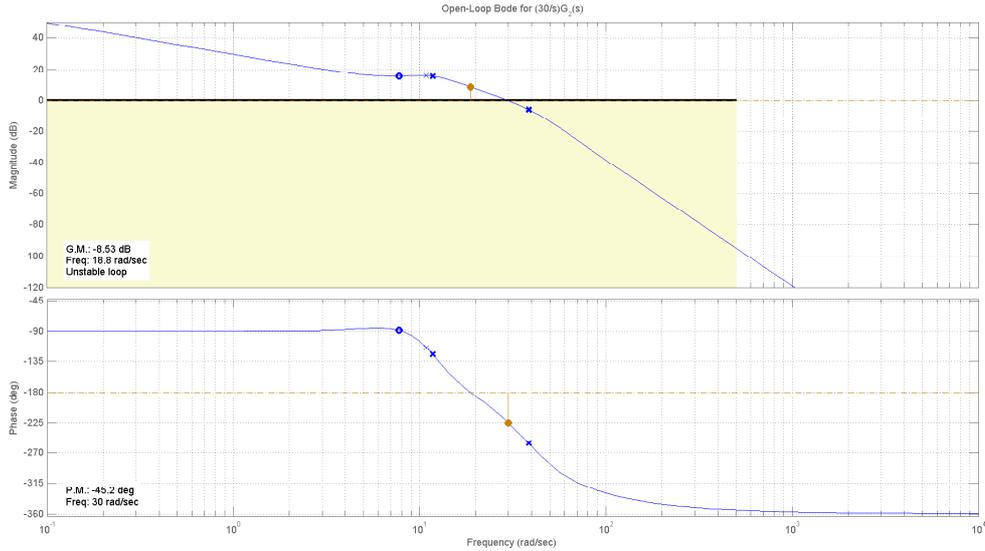


Figure 6: Diagramma di Bode della f.d.t. $\frac{30}{s}G_2(s)$ con specifica sulla banda passante e sul guadagno di velocità dell'anello aperto.

con

$$K_1 = \cos(\arcsin(-23 \cdot 10^{-3} v_w^2))$$

$$K_2 = \frac{2(23)^2 10^{-6} v_w^3}{\sqrt{1 - (23)^2 10^{-6} v_w^4}}$$

e sostituendo i valori numerici si ottiene

$$S_{v_w,o}(s) = \frac{3s^2 - 9.92s - 6.755}{s^2 + 1.15s - 0.75}$$

Osservando che

$$S_{C_1,G}(s) = \frac{s(s^4 + 58.73s^3 + 2501s^2 + 2750s - 1829)}{s^5 + 58.73s^4 + 2501s^3 + 4.02 \cdot 10^4 s^2 + 4.1 \cdot 10^5 s + 2.25 \cdot 10^6}$$

si ottiene che per la f.d.t. $S_{C_1,G}S_{v_w,o}(s)$ il diagramma di bode delle ampiezze riportato in figura 7 dal quale si osserva che

$$|S_{C_1,G}(s)S_{v_w,o}(s)| \leq 3.76, \quad s = j\omega, \quad 0 \leq \omega \leq 10.$$

Il soddisfacimento della specifica si traduce perciò nel richiedere che

$$\left| \frac{3.76}{1 + C_2(s)G_2(s)} \right| \frac{1}{3} \leq 0.25,$$

Per soddisfare questa specifica si deve avere un valore elevato per il guadagno di anello, ovvero $C_2(s)G_2(s) \gg 1$. In definitiva, si ottiene

$$|C_2(s)G_2(s)| \geq 20 \log \left(\frac{3.76}{0.25 \cdot 3} \right) \cong 14 \text{ dB},$$

La figura 8 riporta i diagrammi di bode di $\frac{30}{s}G_2(s)$ con tutte le specifiche riportate, compresa quest'ultima sulla sensitività parametrica.

Progetto del controllore. Possiamo progettare un controllore in grado di rispettare tutte le specifiche richieste procedendo come segue. Si ponga una coppia di zeri complessi coniugati a

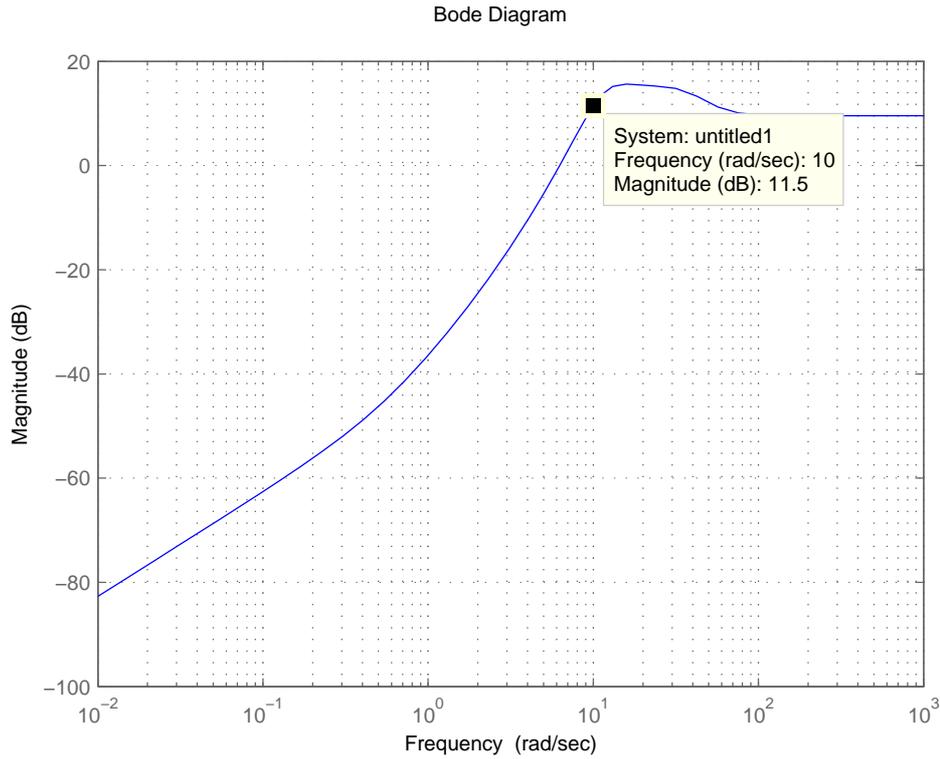


Figure 7: Diagramma di Bode della f.d.t. $SC_{1,G}(s)S_{v_w,o}(s)$.

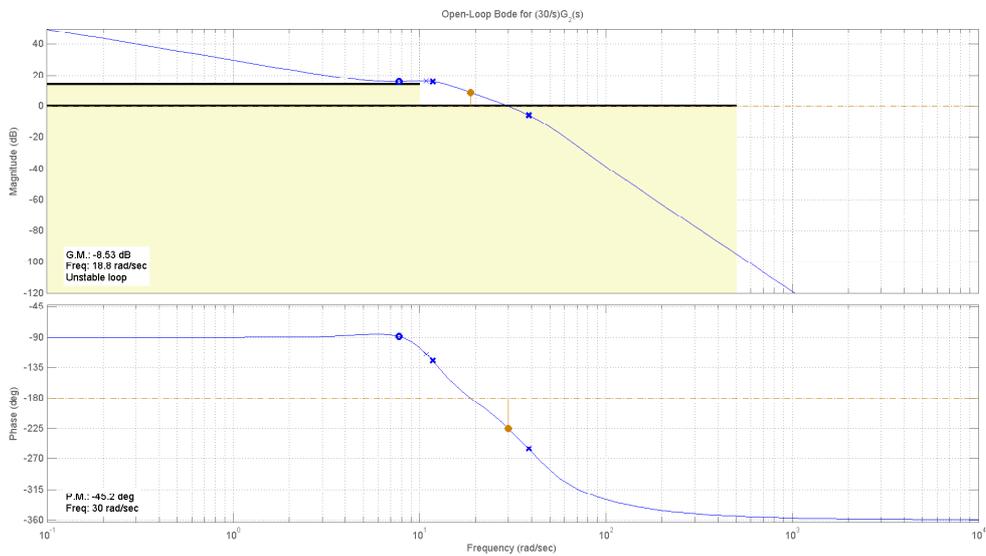


Figure 8: Diagrammi di Bode della f.d.t. $\frac{30}{s}G_2(s)$ con tutte le specifiche riportate, compresa quella sulla sensitività parametrica.

cancellare la corrispondente coppia di poli stabili della f.d.t. $G_2(s)$. Questo, con un adeguato valore del guadagno, permette un attraversamento oltre la banda passante richiesta ($\omega_T = 500$ rad/s) con pendenza pari a -40 dB/decade. Per alzare il valore del margine di fase si inserisce, vicino alla pulsazione di taglio, una rete anticipatrice

$$R(s) = k \frac{\tau s + 1}{\alpha \tau s + 1} = \frac{s + 46.48}{s + 1300}$$

Con questa rete anticipatrice, si ottiene un andamento caratterizzato da pendenza pari a -20 dB/decade prima della pulsazione di taglio e pari a -40 dB/decade immediatamente dopo, cioè un andamento che i sistemi a fase minima devono avere in anello aperto affinché la f.d.t. in anello chiuso sia ben approssimabile con un doppio polo dominante e $M_f \cong 45$ deg. Tuttavia, il controllore non è realizzabile: per soddisfare anche questo requisito si inserisce un polo in alta frequenza almeno una decade più veloce della pulsazione di taglio. Il controllore finale è

$$C_2(s) = \frac{3158918(s + 46.48)(s^2 + 8.44s + 132.8)}{s(s + 1300)(s + 6.58 \cdot 10^4)}.$$

In figura 9 sono riportati i diagrammi di bode della f.d.t. $C_2(s)G_2(s)$ con le relative specifiche.

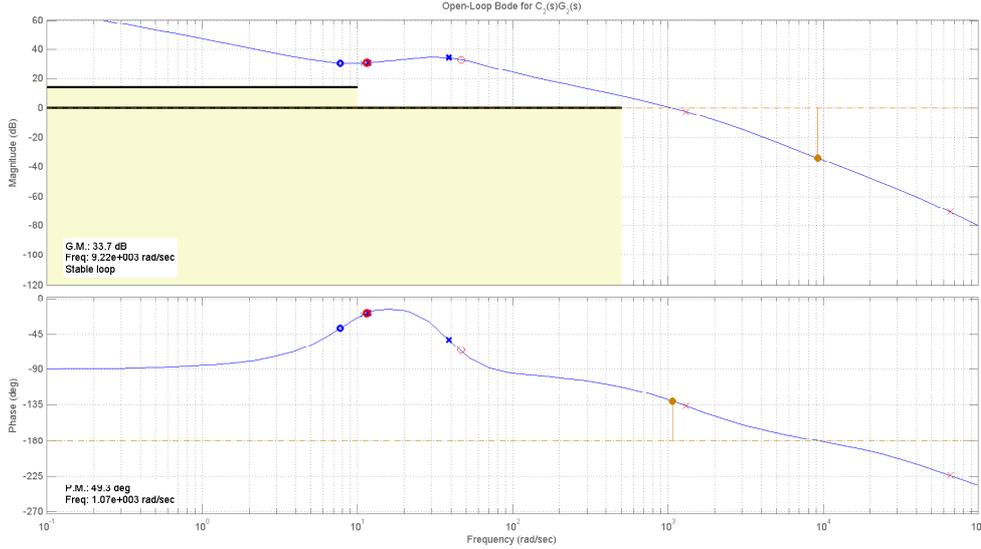


Figure 9: Diagrammi di Bode della f.d.t. $C_2(s)G_2(s)$ con tutte le specifiche riportate.

La f.d.t. complessiva del doppio anello è

$$G_c(s) = \frac{118303506015(s + 46.48)(s^2 + 10.99s + 60.05)(s^2 + 8.437s + 132.8)}{(s + 6.58 \cdot 10^4)(s + 47.76)(s^2 + 10.98s + 58.66)(s^2 + 8.453s + 132.9)(s^2 + 1264s + 1.79 \cdot 10^6)},$$

di cui in figura 10 è riportata la risposta al gradino. Come si può osservare la risposta è molto simile a quella relativa ad un sistema del secondo ordine, quindi si può concludere che il tentativo di progettare un controllore che renda il sistema in anello chiuso un sistema a due poli dominanti è comunque riuscito e le specifiche sul tempo di assestamento e sulla sovraelongazione sono rispettate ampiamente. Infine, in figura 11 sono riportati i diagrammi di bode della f.d.t. complessiva $G_c(s)$.

C Indicando con $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4]^T = [\theta - \bar{\theta}, \phi - \bar{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}]^T$ le nuove variabili di stato e con $\tilde{u} = \psi$ il nuovo ingresso, si ottiene il seguente sistema in forma di stato nonlineare, traslato nell'equilibrio¹,

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_3 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_4 \\ \dot{\tilde{x}}_3 = \frac{F_\theta(\tilde{x}, \tilde{u})}{rM} + \sin(\tilde{x}_1 + \bar{\theta}) \cos(\tilde{x}_1 + \bar{\theta}) \tilde{x}_4^2 \\ \dot{\tilde{x}}_4 = \frac{F_\phi(\tilde{x}, \tilde{u})}{rM \sin(\tilde{x}_1 + \bar{\theta})} - 2 \cot(\tilde{x}_1 + \bar{\theta}) \tilde{x}_3 \tilde{x}_4 \end{cases} \quad (1)$$

¹Il sistema nonlineare così ottenuto avrà l'origine come nuovo punto di equilibrio.

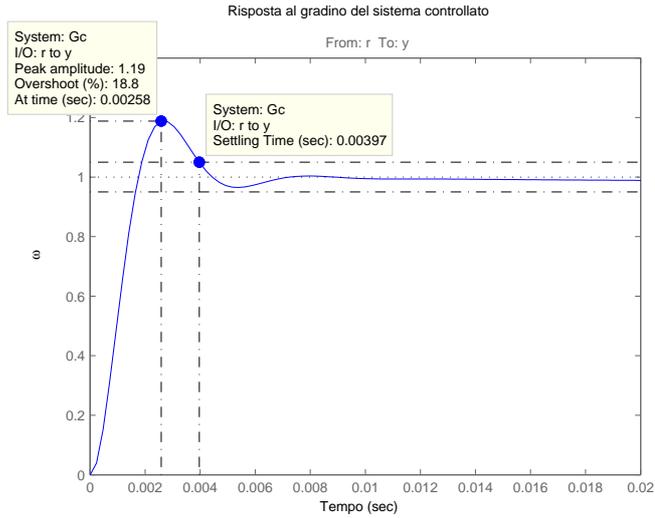


Figure 10: Risposta al gradino del sistema controllato $G_c(s)$.

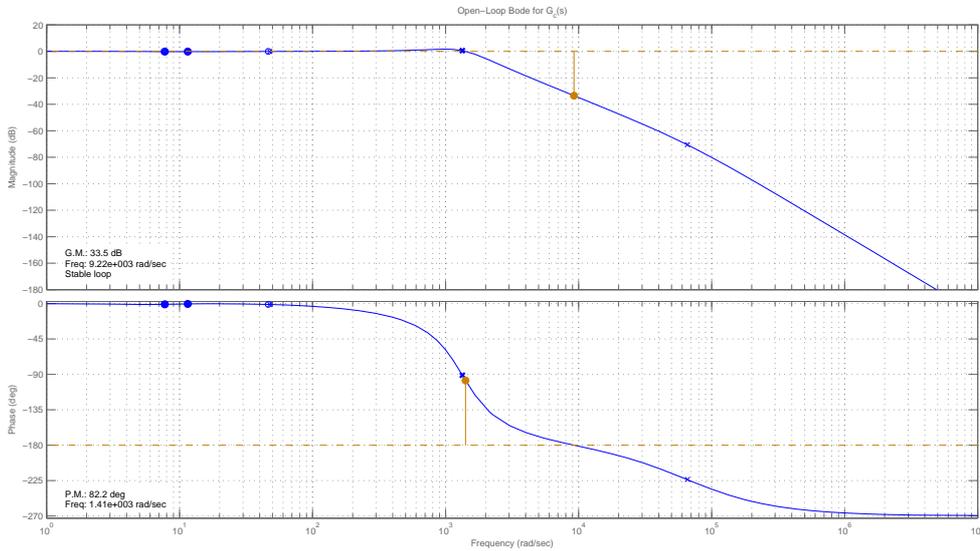


Figure 11: Diagrammi di Bode della f.d.t. $G_c(s)$.

dove,

$$\begin{aligned}
 F_\theta(\tilde{x}, \tilde{u}) &= Mg \sin(\tilde{x}_1 + \bar{\theta}) + \frac{1}{2} \rho A C_D [v_w^2 + r^2 (\tilde{x}_3^2 + \tilde{x}_4^2 \sin^2(\tilde{x}_1 + \bar{\theta})) + \\
 &\quad - 2 r v_w (\tilde{x}_3 \cos(\tilde{x}_2 + \bar{\phi}) \cos(\tilde{x}_1 + \bar{\theta}) - \tilde{x}_4 \sin(\tilde{x}_2 + \bar{\phi}) \sin(\tilde{x}_1 + \bar{\theta}))] \\
 F_\phi(\tilde{x}, \tilde{u}) &= -\frac{1}{2} \rho A C_L [v_w^2 + r^2 (\tilde{x}_3^2 + \tilde{x}_4^2 \sin^2(\tilde{x}_1 + \bar{\theta})) \\
 &\quad - 2 r v_w (\tilde{x}_3 \cos(\tilde{x}_2 + \bar{\phi}) \cos(\tilde{x}_1 + \bar{\theta}) - \tilde{x}_4 \sin(\tilde{x}_2 + \bar{\phi}) \sin(\tilde{x}_1 + \bar{\theta}))] \sin \tilde{u}.
 \end{aligned}$$

Al fine di ottenere il sistema linearizzato nella consueta forma di stato,

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{x}} &= A \tilde{x} + B \tilde{u} \\
 \tilde{y} &= C \tilde{x} + D \tilde{u}
 \end{aligned}$$

è necessario determinare gli elementi delle matrici A , B , C e D derivando ciascuna equazione del sistema (1) rispetto a ciascuna variabile di stato inclusa nel vettore \tilde{x} e calcolando poi il risultato

nell'origine, nuovo equilibrio del sistema (1). Le matrici del sistema sono:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_{41} \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad D = 0$$

in cui si ha:

$$a_{31} = \frac{g}{r} \cos \bar{\theta}$$

$$a_{33} = -\frac{\rho A C_D v_w}{M} \cos \bar{\phi} \cos \bar{\theta}$$

$$a_{34} = \frac{\rho A C_D v_w}{M} \sin \bar{\phi} \sin \bar{\theta}$$

$$b_{41} = -\frac{\rho A C_L v_w^2}{2r M \sin \theta}.$$

D) Partendo dalla forma di stato ottenuta al punto precedente, cioè dalle matrici A , B , C , D , ed utilizzando il metodo delle differenze in avanti si ottiene

$$\dot{x}(k+1) = \hat{A}x(k) + \hat{B}u(k)$$

$$y(k+1) = Cx(k) + Du(k),$$

dove $\hat{A} = I + AT$ e $\hat{B} = BT$.

Il codice che realizza una simulazione del controllore in forma discreta può essere scritto in un linguaggio che permette le operazioni tra matrici (ad esempio Matlab) nel modo seguente:

```
T=Ts; % scelta del tempo di campionamento T.

% Punto di equilibrio.
phi_eq = pi/4; theta_eq = arcsin(-(rho*v_w^2*Area*C_D)/(2*M*g));
% Elementi delle matrici dinamiche.
a31=g/r; a33=-2*(v_w/M)*cos(phi_eq)*cos(theta_eq);
a34=2*(v_w/M)*sin(phi_eq)*sin(theta_eq);
b41=-(rho*A*C_L*v_w^2)/(2*r*M*sin(theta_eq));
% Calcolo delle matrici.
A=[1, 0, 0, 0;0, 1, 0, 0;0, 0, 1, 0;0, 0, 0, 1]+...
    [0, 0, 1, 0; 0, 0, 0, 1;a31, 0, a33, a34;0, 0, 0, 0]*T;
B=[0;0;0;b41]*T; C=[1, 0, 0, 0]; D=0;
x=[0;0;0;0]; %condizioni iniziali
%
% ciclo indefinito fino ad interruzione
while(condizione_arresto == 0)
u = input('Next Input'); % Leggi ingresso
y=C*x+D*u;
disp(y); % Scrivi uscita
x=A*x + B*u;
end
```