

A Si consideri la seguente funzione di trasferimento di un ipotetico controllore:

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K \frac{\tau_z s + 1}{(\tau_{p1} s + 1)(\tau_{p2} s + 1)}.$$

- a1) Si scriva un programma di calcolo che simuli il comportamento del controllore;
- a2) Si discuta la scelta del valore appropriato del tempo di campionamento in relazione alle costanti di tempo del controllore, in modo da garantire la stabilità del controllore discretizzato.

B Si consideri il sistema meccanico costituito di una funivia orizzontale rappresentato in Figura 1.

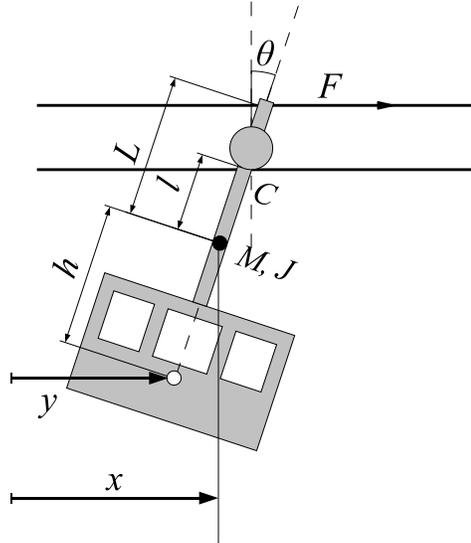


Figura 1: Schema meccanico di una funivia.

La cabina si poggia su di un cavo di sostegno tramite un sistema di cuscinetti, e viene mossa da un motore situato nella stazione fissa, che esercita una forza  $F$  sulla cabina attraverso un cavo di traino. Il modello dinamico associato al moto sul piano è descritto da un sistema di equazioni non lineari. Linearizzando il sistema attorno ad uno dei suoi due punti di equilibrio, cioè quello corrispondente a  $\theta = 0$ , si ottengono le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} M\ddot{x} &= -C_a\dot{x} + C_a l\dot{\theta} + F \\ J\ddot{\theta} &= -Mgl\theta + C_a l\dot{x} - C_a l^2\dot{\theta} - LF \end{aligned}$$

$$y = x + h\theta$$

dove  $M$  è la massa totale della cabina,  $J = Ml^2$  il momento di inerzia associato,  $C_a$  il coefficiente di attrito viscoso e  $g$  l'accelerazione gravitazionale.

Si consideri come ingresso del sistema la forza trainante  $F$  e come uscita la posizione della cabina  $y$ .

- b1) Considerando come ingresso del sistema la forza trainante  $F$  e come uscita la posizione  $y$  della cabina,
  - si calcoli la funzione di trasferimento in forma simbolica;
  - si discuta qualitativamente la posizione degli zeri in relazione ai parametri del sistema.

Si considerino i seguenti valori numerici:  $M = 500$  kg,  $J = 500$  kgm<sup>2</sup>,  $C_a = 15$  Ns/m,  $l = 1$  m,  $L = 2.2$  m,  $h = 1$  m e  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>.

- b2) Si determini una legge di controllo per la variabile di ingresso  $F$  che agisca in modo tale da garantire:

- errore nullo per inseguimento di un ingresso a gradino;
- tempo di assestamento al 5% inferiore a 10 s e sovraelongazione massima non superiore al 5% del valore di regime;
- errore a regime sulla variabile di uscita  $y$ , inferiore a 10 cm in presenza di un disturbo di attuazione di tipo sinusoidale di ampiezza massima 3 N e frequenza inferiore a 1.6 mHz

Si riporti esplicitamente il controllore ottenuto, il diagramma di Bode relativo alla f.d.t. di anello con le relative specifiche da rispettare, la risposta al gradino del sistema in anello chiuso e lo schema a blocchi complessivo.

## Soluzione

A Poniamo il controllore nella forma

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_1 \frac{\tau_z s + 1}{s^2 + bs + c}$$

con

$$K_1 = \frac{K}{\tau_{p1} \tau_{p2}} \quad b = \frac{\tau_{p1} + \tau_{p2}}{\tau_{p1} \tau_{p2}} \quad c = \frac{1}{\tau_{p1} \tau_{p2}},$$

che corrisponde all'equazione differenziale

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + b \frac{du(t)}{dt} + c u(t) = K_1 \left( \tau_z \frac{de(t)}{dt} + e(t) \right)$$

con condizioni iniziali nulle. Una realizzazione nello spazio degli stati di questo sistema dinamico è data facilmente dalla forma canonica di controllo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Be \\ y &= Cx + De \end{aligned}$$

con:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = [K_1 \quad K_1 \tau_z]; \quad D = 0.$$

Per simulare la derivata prima dello stato, si può utilizzare ad esempio il metodo di Eulero in avanti, ottenendo così il sistema in tempo discreto

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d e(k) \quad (1)$$

$$y(k) = C_d x(k) + D_d e(k), \quad (2)$$

con

$$A_d = I + TA; \quad B_d = TB; \quad C_d = C; \quad D_d = D.$$

a1) Le parti essenziali di un programma che implementa il sistema tempo-discreto per simulare il controllore, scritto in uno pseudo-linguaggio che contempla le operazioni tra matrici, possono essere scritte nel modo seguente (si suppone che le costanti siano assegnate):

```
...      %Costanti Assegnate: A_d, B_d, C_d, D_d, T
x=[0;0]; %Condizioni iniziali
% ciclo indefinito fino ad interruzione
while(condizione_arresto == 'false')
    u = read(input); % Leggi l'ingresso
    y=C_d*x+D_d*u;
    write(y,output); % Scrivi l'uscita
    x=A_d*x + B_d*u; % Aggiorna lo stato
end
```

Il confronto tra la risposta del programma ed il controllore originale può essere visualizzato in modo molto efficace usando uno strumento di simulazione numerica, ad esempio il pacchetto **Simulink** di Matlab. Questo pacchetto (il cui uso verrà introdotto in corsi successivi, ma che è comunque intuitivo) si basa su una interfaccia grafica in cui si possono costruire schemi a blocchi usando una vasta libreria di elementi, che comprende tutti i comuni segnali e sistemi dinamici incontrati sinora. Con riferimento alla fig. 2, si osserva che il controllore originale è rappresentato da un blocco di tipo "Transfer Function", mentre il programma che lo deve realizzare è scritto in una funzione Matlab creata appositamente e denominata **Codice\_SS**. Ai due sistemi viene fornito lo stesso ingresso (ad esempio, una sinusoide generata da un blocco di tipo "Sine Wave"), ed i segnali di uscita sono posti in ingresso ad uno strumento di visualizzazione di tipo "Scope". La funzione Matlab **Codice\_SS** nell'esempio è

```
function output = codice_SS(input)
    global x
    global A_d B_d C_d D_d

    output = C_d*x+D_d*input;
    x = A_d*x+B_d*input;
```

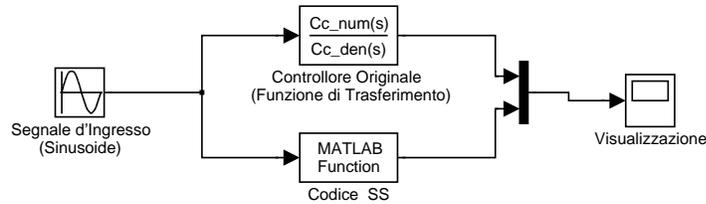


Figura 2: Schema Simulink per il confronto della risposta ad una sinusoide del controllore dato e di un programma che lo simula.

Si noti l'utilizzo della dichiarazione `global` per variabili definite nello spazio di memoria generale di Matlab, che vengono così condivise con quelle dello spazio di memoria assegnato alla funzione stessa. Questo permette in particolare di conservare una copia dello stato corrente nella variabile `x` che viene aggiornata ad ogni chiamata della funzione `Codice_SS` (fatta tacitamente da Simulink).

Per il funzionamento dello schema, è necessario predisporre il valore di alcune variabili, che può essere fatto lanciando una sequenza di comandi pre-registrata (o *script*) come segue:

```
% Inizializzazione parametri del controllore.
global x
global A_d B_d C_d D_d

tau_z = 0.1;
tau_p1 = 0.2;
tau_p2 = 1;
K = 10;
% Parametri derivati.
K1 = K/(tau_p1*tau_p2);
b = (tau_p1+tau_p2)/(tau_p1*tau_p2);
c = 1/(tau_p1*tau_p2);
% Visualizzazione del controllore.
s = tf('s');
disp('La f.d.t. ottenuta è:');
disp('C(s) = ');
Cc = K*(tau_z*s+1)/((tau_p1*s+1)*(tau_p2*s+1));
[Cc_num, Cc_den]=tfdata(Cc,'v');
% Matrici del sistema in forma canonica di controllo in tempo continuo.
A = [0 1;-c -b];
B = [0 1]';
C = K1*[1 tau_z];
D = 0;
% Tempo di campionamento.
T = 0.1;
% Oppure
% T = input('Inserire il tempo di campionamento:\n T = ');
% Condizioni iniziali.
x = [0; 0];
% Oppure
% x = input('Condizioni iniziali (x_o = [x_01 x_02]):\n X_o = ');
% Sistema scritto in forma di stato discreta.
A_d = eye(size(A))+T*A;
B_d = T*B;
C_d = C;
D_d = D;
```

Il confronto tra le risposte ottenute è riportato in fig. 3.

- a2)** Affinchè il comportamento del controllore discretizzato sia asintoticamente stabile e abbastanza fedele al corrispondente tempo continuo, è necessario scegliere opportunamente il tempo di

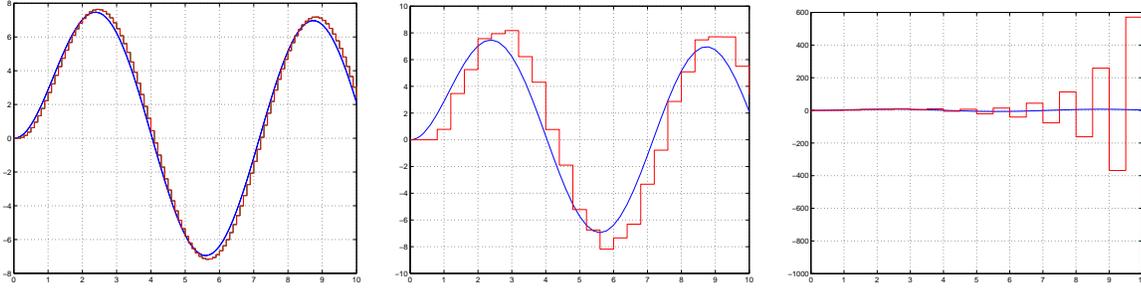


Figura 3: Confronto tra le risposte ad una sinusoide di frequenza 1Hz del controllore  $C(s)$  e del programma che lo approssima per tempi di campionamento diversi. Per  $T = 0.1s$  (a sinistra) l'approssimazione è molto migliore che per  $T = 0.4s$  (al centro), mentre per  $T = 0.5s$  (a destra) il sistema discreto diviene instabile e la risposta diverge.

campionamento  $T$ . Per avere un'idea del valore massimo accettabile per  $T$  che garantisce la stabilità del sistema tempo discreto, si faccia riferimento agli autovalori della matrice  $A_d$ , cioè

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(bT - 2) \pm T\sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

Sostituendo le espressioni di  $b$  e  $c$ , si ottiene

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\frac{(\tau_{p1} + \tau_{p2})T - 2\tau_{p1}\tau_{p2}}{2\tau_{p1}\tau_{p2}} \pm \frac{T}{2} \sqrt{\frac{\tau_{p1}^2 + \tau_{p2}^2 + 2\tau_{p1}\tau_{p2} - 4\tau_{p1}\tau_{p2}}{\tau_{p1}^2\tau_{p2}^2}} = \\ &= \frac{2\tau_{p1}\tau_{p2} - (\tau_{p1} + \tau_{p2})T \pm (\tau_{p1} - \tau_{p2})T}{2\tau_{p1}\tau_{p2}}, \end{aligned}$$

da cui segue che

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\tau_{p1} - T}{\tau_{p1}} \\ \lambda_2 &= \frac{\tau_{p2} - T}{\tau_{p2}}. \end{aligned}$$

Affinchè il sistema discretizzato sia asintoticamente stabile è necessario che il modulo di entrambi gli autovalori sia inferiore all'unità, cioè siano entrambi dentro il cerchio unitario. Imponendo tali condizioni si ottiene

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \left| \frac{\tau_{p1} - T}{\tau_{p1}} \right| \Rightarrow 0 < T < 2\tau_{p1} \\ \lambda_2 &= \left| \frac{\tau_{p2} - T}{\tau_{p2}} \right| \Rightarrow 0 < T < 2\tau_{p2}. \end{aligned}$$

Si giunge pertanto alla conclusione che, per garantire asintotica stabilità del controllore discretizzato, è necessario scegliere un tempo di campionamento inferiore al doppio della costante di tempo più piccola associata ai poli della f.d.t. tempo continuo. In altre parole,

$$\begin{aligned} \text{iff } \tau_{p1} < \tau_{p2} &\Rightarrow 0 < T < 2\tau_{p1} \\ \text{iff } \tau_{p1} > \tau_{p2} &\Rightarrow 0 < T < 2\tau_{p2}. \end{aligned}$$

Il valore dello zero viene automaticamente portato in:

$$\tau_{zT} = \frac{T - \tau_d}{\tau_d}.$$

e per  $T \rightarrow 0$  il valore dello zero tende al valore  $-1$ .

**B b1** L'esercizio richiede innanzitutto il calcolo della f.d.t. in forma simbolica. Per far questo possono essere seguite due differenti strade:

- portare il sistema in forma di stato e poi calcolarne la f.d.t. come  $C(sI - A)^{-1}B$ ;
- trovare  $\frac{Y(s)}{F(s)}$  dopo aver esplicitato  $\Theta(s)$  e  $X(s)$  direttamente dal sistema di equazioni differenziali utilizzando la trasformata di Laplace.

Nel primo caso, ponendo  $x_1 = x$ ;  $x_2 = \theta$ ;  $x_3 = \dot{x}$ ;  $x_4 = \dot{\theta}$ , il sistema in forma di stato risulta descritto da

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{C_a}{M} & \frac{C_a l}{M} \\ 0 & -\frac{Mgl}{J} & \frac{C_a l}{J} & -\frac{C_a l^2}{J} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \\ -\frac{l}{J} \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad h \quad 0 \quad 0], \quad D = 0.$$

Nel secondo caso invece, utilizzando la trasformata di Laplace, si ottiene un sistema di 2 equazioni in due incognite dal quale è possibile esplicitare  $\Theta(s)$ ,  $X(s)$ , per poi ricavare l'espressione di  $Y(s)$  in funzione di  $U(s) = F(s)$  mediante la

$$Y(s) = X(s) + h\Theta(s).$$

La f.d.t. in forma simbolica risulta quindi:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{(J - MLh)s^2 + (C_a l^2 + C_a hl - LC_a h - C_a Ll)s + Mgl}{JM s^4 + (C_a M l^2 + J C_a) s^3 + (M^2 gl) s^2 + C_a M gl s}.$$

Per effettuare una analisi degli zeri è possibile utilizzare la regola di Cartesio. In particolare l'equazione al numeratore può essere riscritta come  $as^2 + bs + c$  con coefficienti

$$\begin{aligned} a &= M(l^2 - Lh) \\ b &= C_a(l + h)(l - L) \\ c &= Mgl. \end{aligned}$$

Come si può facilmente vedere il termine  $c = Mgl$  è sempre positivo. Il coefficiente  $b$  è invece sempre minore o uguale di zero, poichè risulta composto da  $C_a$  (sempre positivo),  $(l + h)$  (sempre positivo) e da  $(l - L) \leq 0$  (come si può vedere dalla figura 1). Quindi nel caso in cui  $(l^2 - Lh) < 0$  il sistema ha uno zero a parte reale positiva e uno a parte reale negativa, mentre nel caso  $(l^2 - Lh) > 0$  il sistema ha due zeri a parte reale positiva.

La presenza di almeno uno zero a parte reale positiva, può essere facilmente interpretata da un punto di vista fisico: la forza trainante infatti tende a spostare la cabina nella propria direzione, ma il momento da essa generato rispetto al punto di appoggio sulla fune, sul quale si applica la forza di attrito, tende inizialmente a far ruotare il supporto, e quindi si può verificare il fenomeno della inversione iniziale della risposta tipico dei sistemi a fase non minima (Figura 4(a), 4(b)). Nel caso di due zeri a parte reale positiva (Figura 4(c), 4(d)), si osserva invece un flesso della risposta.

- b2** Per la scelta dei parametri assegnata, il sistema è marginalmente stabile in anello aperto ed ha un solo zero a parte reale positiva. I luoghi delle radici inverso (corrispondente a retroazione negativa) e diretto (per retroazione positiva) sono riportati rispettivamente in figura 5(b) ed in figura 5(a). Il controllore può quindi essere progettato direttamente con tecniche basate sui diagrammi di Bode, assumendo retroazione negativa. La specifica sull'errore a regime risulta automaticamente rispettata in quanto la f.d.t. in anello aperto, avendo un polo nell'origine, è di tipo 1.

Per soddisfare le specifiche sulla sovraelongazione e sul tempo di assestamento, tentiamo di progettare un controllore che permetta di approssimare il sistema in anello chiuso con un modello a doppio polo dominante, cioè un sistema del secondo ordine, rispetto al quale le due specifiche si traducono come segue:

$$\begin{aligned} S_{\%} &= 100 \exp\left(\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\right) \Rightarrow \delta \approx 0,69 \Rightarrow M_{\Phi} \approx 70^\circ \\ \omega_T &= \frac{3}{\delta T_a} \Rightarrow \omega_T \approx 0,44 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

Poiché il sistema controllato a ciclo chiuso è asintoticamente stabile, è possibile applicare il teorema della risposta armonica. La funzione di trasferimento tra il disturbo di attuazione

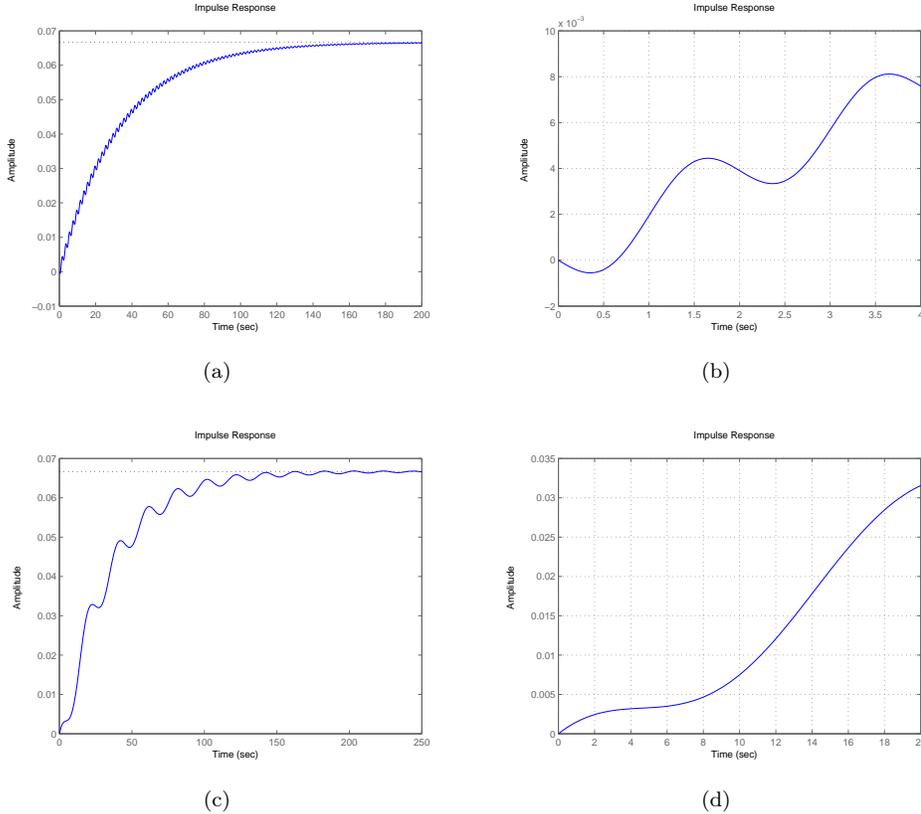


Figura 4: Risposta impulsiva nel caso di un solo zero a parte reale positiva (a, con ingrandimento in b) e nel caso di due zeri a parte reale positiva (c, con ingrandimento in d).

$F_d$  e l'uscita  $y$  del sistema è pari a quella tra l'ingresso  $F$  e  $y$ , quindi in anello chiuso si ha (ponendo  $F = 0$ )

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)} F_d(s) = \bar{G}(s) F_d(s).$$

Applicando il teorema della risposta armonica al disturbo sinusoidale  $F_d(t) = F_d \sin(\omega t)$  si ha, a regime,

$$y(t) = |\bar{G}(j\omega)| F_d \sin(\omega t + \angle \bar{G}(j\omega)).$$

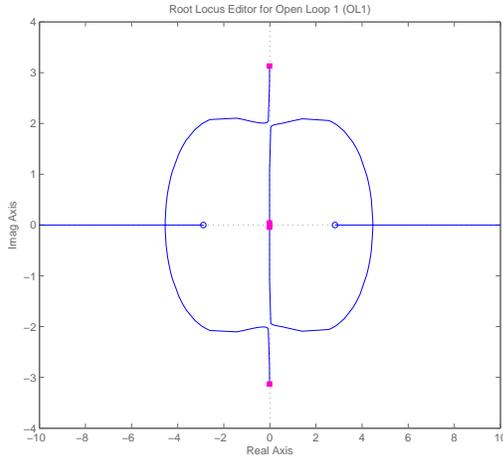
La terza specifica è quindi equivalente a richiedere che, per pulsazioni  $\omega < \omega_d = 0.01 \text{ rad/s}$  e  $F_d \leq 3 \text{ N}$ , si abbia  $|y(t)| < 0.1 \text{ m}$ , ovvero

$$\left| \frac{3 \cdot G(j\omega)}{1 + C(j\omega)G(j\omega)} \right| < 0.1.$$

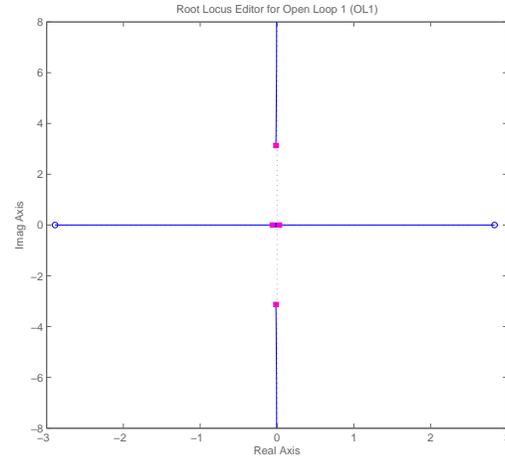
Nel regime di bassa frequenza si ha sicuramente  $|C(j\omega)G(j\omega)| \gg 1$ , pertanto il controllore dovrà soddisfare

$$|C(j\omega)|_{dB} > 30, \quad 0 \leq \omega \leq \omega_d.$$

Per visualizzare questa specifica sul diagramma di Bode del modulo della f.d.t. in anello aperto  $C(s)G(s)$ , si deve quindi tracciare nel piano una curva corrispondente al diagramma di Bode della  $G(s)$  nelle pulsazioni  $0 \leq \omega \leq \omega_d$  traslato verso l'alto di  $30 \text{ dB}$ . Essendo  $|G(j\omega_d)| = 16 \text{ dB}$ , il diagramma di  $C(s)G(s)$  dovrà rimanere al di sopra della semiretta di pendenza  $-20 \text{ dB}$  per decade che passa per il punto  $(\omega_d = 0.01 \text{ rad/s}, |C(j\omega_d)G(j\omega_d)| = 46 \text{ dB})$ . Il diagramma di Bode con i vincoli sulla pulsazione di taglio  $\omega_T$  sono riportati in figura 7. Per rispettare le specifiche desiderate è necessario innanzitutto limitare l'effetto dei due poli complessi coniugati situati molto vicino all'asse immaginario. Questo può essere ottenuto inserendo due zeri complessi coniugati molto vicini a questi due poli. A questo punto, per rispettare le specifiche sul margine



(a)



(b)

Figura 5: Luogo delle radici inverso (a) e diretto (b) di  $G(s)$ .

di fase, è possibile inserire una rete anticipatrice con uno zero molto vicino al polo reale posto nell'intorno dell'origine e con un polo in alta frequenza, ad esempio in -10, mentre per rispettare le specifiche sul tempo di assestamento è possibile alzare il diagramma aumentando il guadagno d'anello. A questo punto il nostro controllore ha 3 zeri, di cui 2 complessi e coniugati, e un solo polo. Per renderlo causale è possibile inserire due poli reali ad alta frequenza. Il controllore ottenuto risulta

$$C = \frac{1854035.8444(s + 0.22)(s^2 + 0.04s + 9.61)}{(s + 70)^2(s + 10)}$$

Come si può vedere dalla figura 8, anche se le specifiche sono rispettate, il diagramma di ampiezza rimane troppo vicino all'asse dei 0 dB proprio in corrispondenza della quasi cancellazione dei poli. Questo produce un comportamento indesiderato nella risposta a gradino. (Figura 9(a), 9(b))

Si procede quindi all'aggiunta di un'ulteriore azione correttiva. In particolare si decide di aggiungere una rete anticipatrice complessa, in modo da amplificarne gli effetti. In particolare inserendola a monte di quella precedentemente inserita si riesce ad ottenere l'effetto desiderato. Il controllore finale risulta quindi

$$\frac{951219.8254(s + 0.28)(s^2 + 0.04s + 0.004)(s^2 + 0.044s + 9.735)}{(s + 70)^2(s + 4.75)(s^2 + 0.19s + 0.01114)}$$

Come si può vedere, l'approssimazione a doppio polo dominante in tal caso non è del tutto riuscita, ma le specifiche sul tempo di assestamento e sulla sovraelongazione sono comunque rispettate.

Per completezza si riportano anche i diagrammi di Bode delle reti anticipatrici utilizzate, ovvero

$$R1 = \frac{s+0.22}{s+10} \quad R2 = \frac{(s^2+0.04s+0.004)}{(s^2+0.19s+0.01114)} \quad R3 = \frac{(s+0.3)(s^2+0.04s+0.004)}{(s+4.75)(s^2+0.19s+0.01114)}.$$

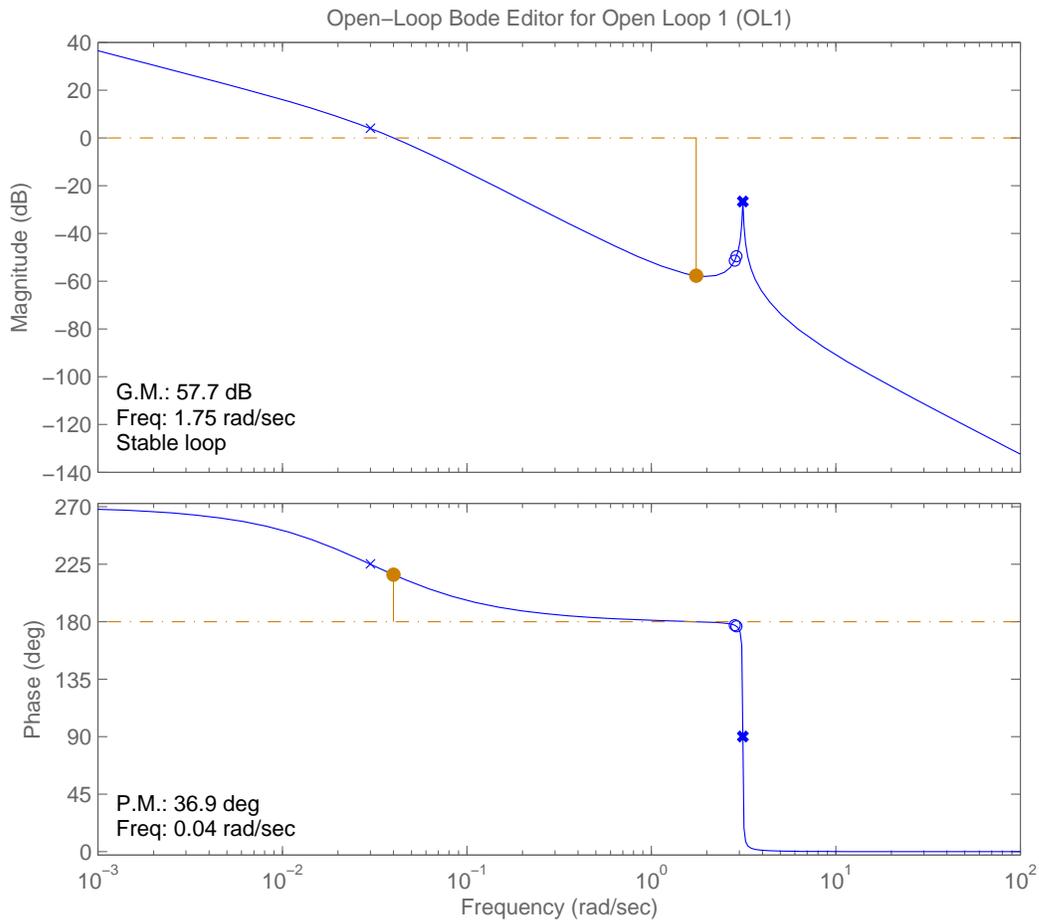


Figura 6: Diagramma di Bode di  $G(s)$

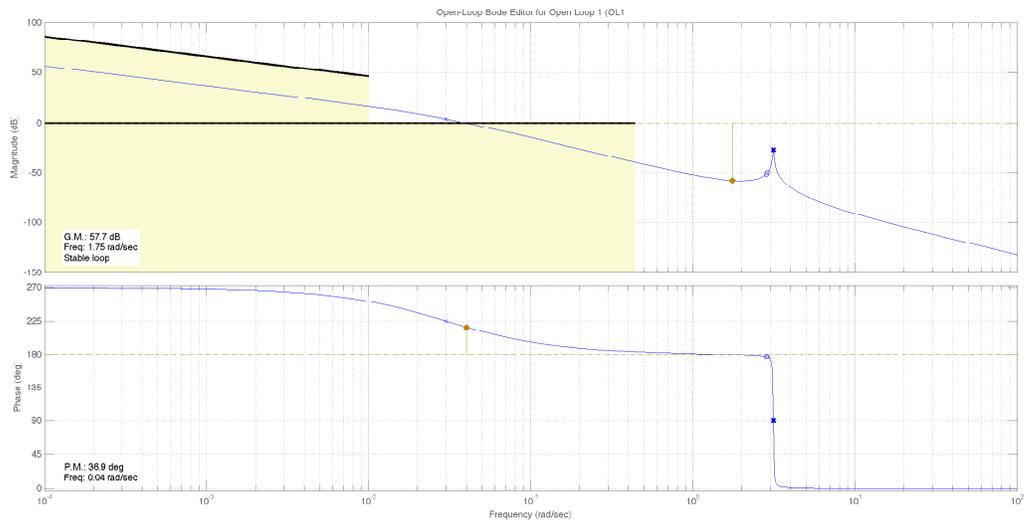


Figura 7: Diagramma di Bode della f.d.t.  $G(s)$  con specifica sulla pulsazione di taglio e sul guadagno del controllore in bassa frequenza.

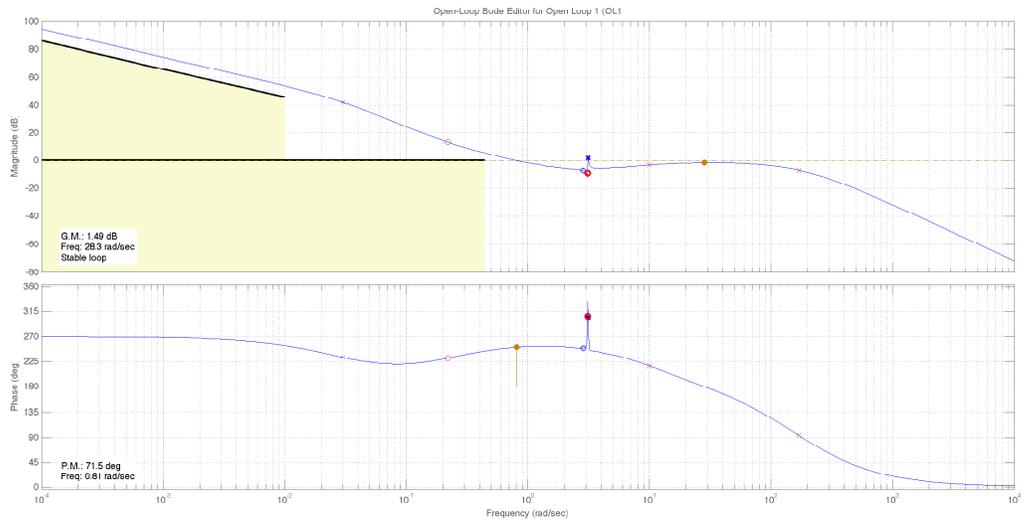


Figura 8: Diagramma di Bode della f.d.t.  $C(s)G(s)$  con rete ad anticipo semplice.

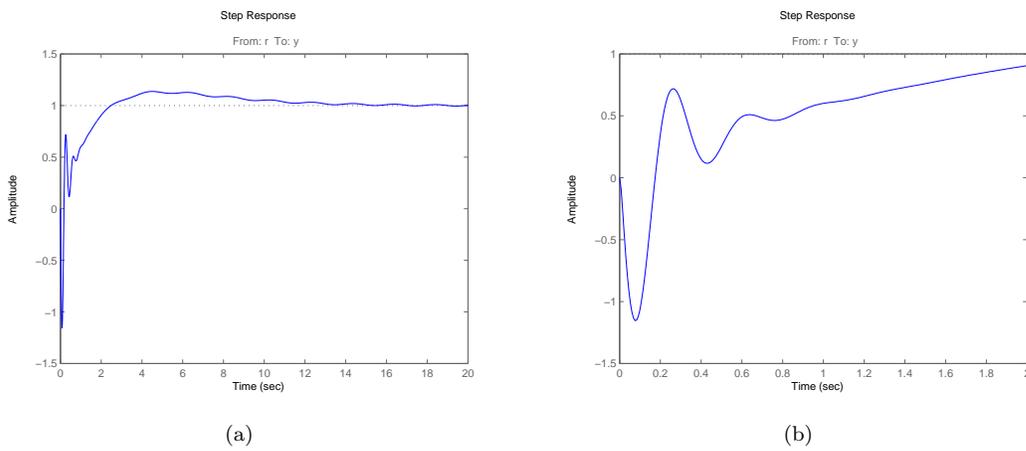


Figura 9: Risposta a gradino nel caso di controllore con rete di anticipo semplice.

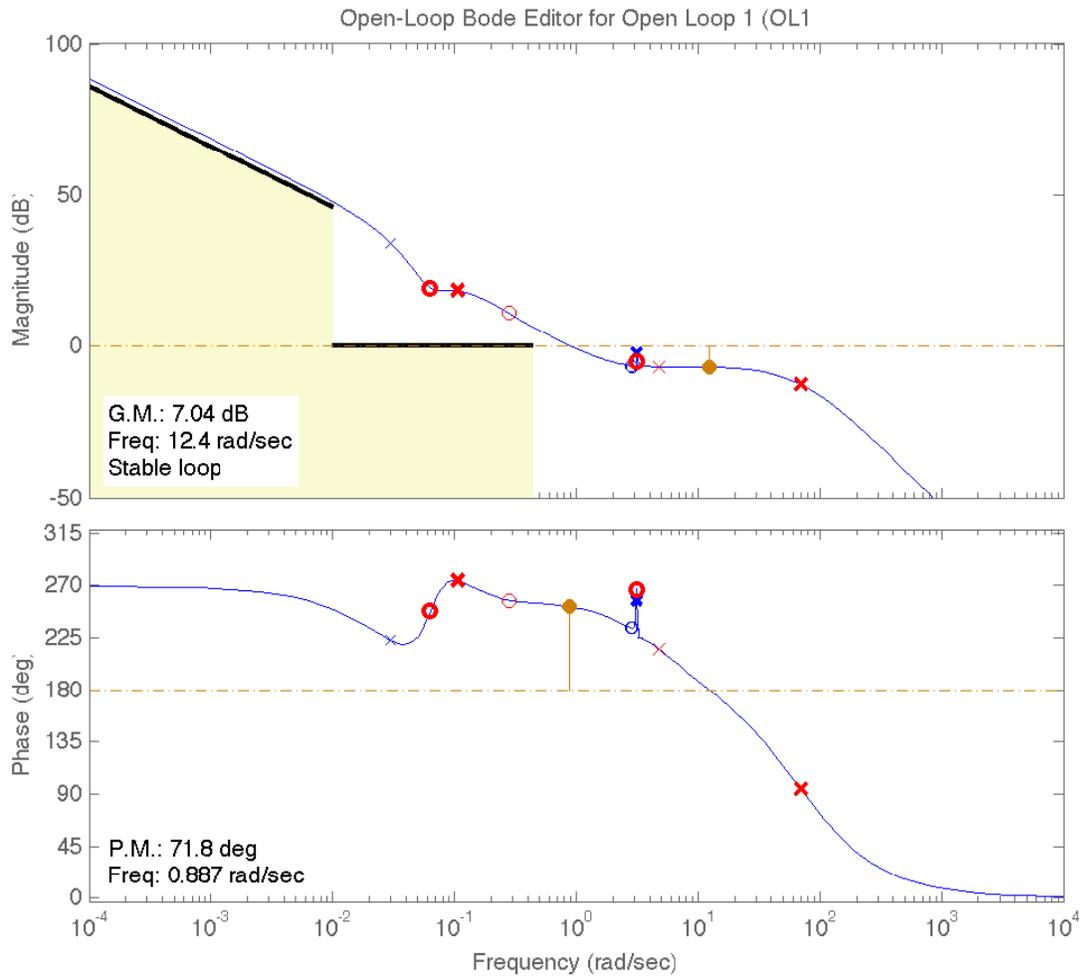


Figura 10: Diagramma di Bode finale della f.d.t.  $C(s)G(s)$  con specifica sulla pulsazione di taglio.

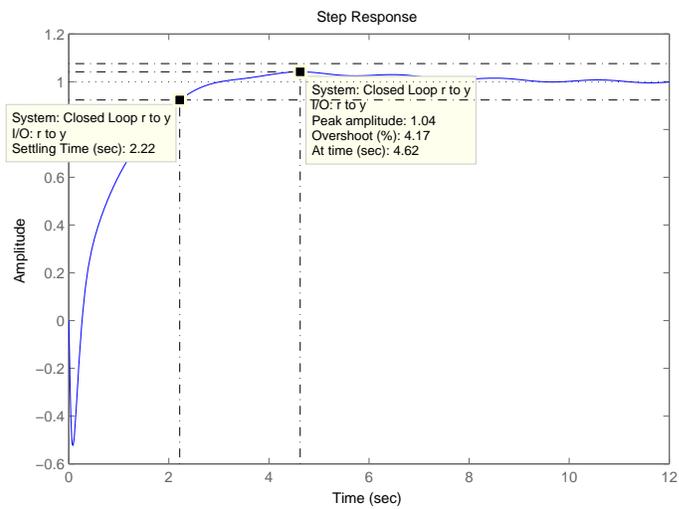


Figura 11: Risposta al gradino della f.d.t.  $G_1 = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}$ .

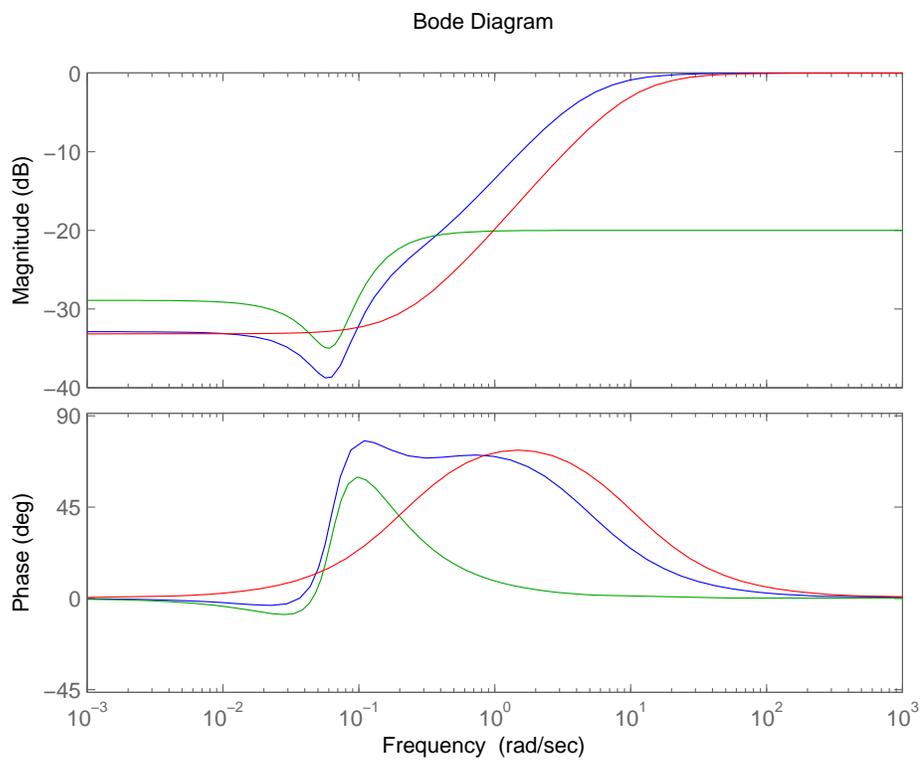


Figura 12: Diagrammi di Bode di R1, R2 e R3 sovrapposti.