Regolazione e Controllo dei Sistemi Meccanici — 29-01-2009

A Si consideri la risposta a gradino unitario riportata in figura 1 e si determini qualitativamente la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema che la ha generata. Si osservi che la pendenza iniziale della risposta è pari a $-\frac{15}{8}$, si assesta all'interno del 5% del valore di regime dopo un tempo pari a $2.3s$ e il periodo dell'oscillazione è $1.7s$. Infine, il valore di picco è di 0.332 a $1.13s$.

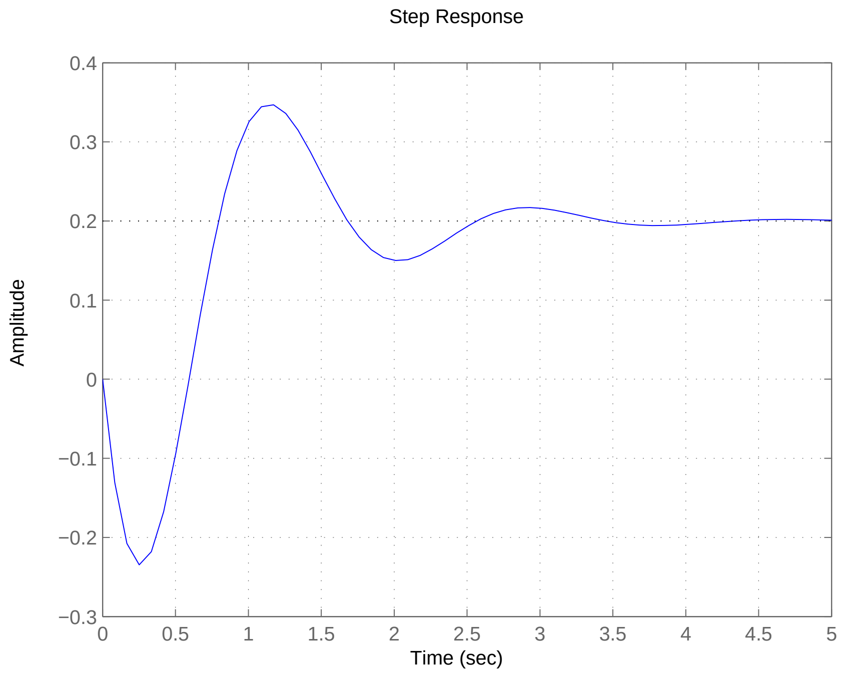


Figura 1: Risposta al gradino unitario di un sistema il cui modello non è noto.

B Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3\, y(t)}{dt} - 2\frac{d^2\, y(t)}{dt} - 16\frac{d\, y(t)}{dt} + 32y(t) = 16\left(\frac{d\, u(t)}{dt} + 2u(t)\right)$$

b1) Si scriva il sistema in forma di stato e si riporti la funzione di trasferimento tra l'ingresso u e l'uscita y;

b2) Si determini una legge di controllo per la variabile di ingresso u che agisca in modo tale da garantire le seguenti specifiche:

b2.1) Errore di inseguimento per un ingresso a rampa lineare del tipo $2tH(t)$ inferiore all' 1%. Tempo di assestamento al 2% inferiore a 30 ms e sovraelongazione massima pari al 15% del valore di regime;

b2.2) Si supponga che il sensore che misura l'uscita $y(t)$ sia affetta da errore per frequenze superiori a 10^4 rad/s pari al massimo a 10 unità. Si desidera che l'effetto sulla regolazione dell'uscita sia inferiore a ± 1 unità.

Si riporti esplicitamente il controllore ottenuto, il diagramma di Bode relativo alla f.d.t. di anello con le relative specifiche da rispettare, la risposta al gradino del sistema in anello chiuso e lo schema a blocchi complessivo.

Soluzione

A La risposta al gradino presenta delle oscillazioni smorzate, e come si può facilmente evincere dal grafico, la prima derivata non nulla in $t = 0$ è di segno opposto rispetto al valore di regime. Qualitativamente quindi l'andamento della risposta può essere approssimato a quello di un sistema del secondo ordine con uno zero a parte reale positiva, ovvero da una f.d.t. del tipo:

$$G(s) = K\frac{(1+\tau s)}{\frac{s^2}{\omega_n^2}+\frac{2\delta s}{\omega_n}+1}$$

I valori di $K, \delta, \omega_n, \tau$ possono essere calcolati facendo riferimento alla figura e ai dati a disposizione. In particolare poichè la risposta tende al valore di regime di 0.2, utilizzando il teorema del valore finale si deduce un guadagno statico pari a

$$K = \lim_{s\to 0}\, sG(s)\frac{1}{s} \approx 0.2 \approx \frac{1}{5}\,,$$

mentre la presenza di oscillazioni smorzate indica l'esistenza di una coppia di poli complessi coniugati la cui parte immaginaria β è legata alla pulsazione naturale e allo smorzamento attraverso la seguente relazione:

$$\beta = \omega_n\sqrt{1-\delta^2}\,.$$

Poichè la parte immaginaria dei poli è strettamente legata al periodo dell'oscillazione, cioè $\beta = \frac{2\pi}{T}$ con $T = 1,7\,\mathrm{s}$, vale che:

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T\sqrt{1-\delta^2}}\,. \tag{1}$$

Utilizzando poi la relazione approssimata che lega lo smorzamento e la pulsazione naturale di un sistema del secondo ordine al tempo di assestamento $T_a = 2,3\,\mathrm{s}$,

$$T_a \approx \frac{3}{\omega_n\delta} = \frac{3T\sqrt{1-\delta^2}}{2\delta\pi}$$

è possibile ricavare il valore dello smorzamento stesso:

$$\delta = \pm\sqrt{\frac{9T^2}{9T^2+4\pi^2T_a^2}} = \pm\,0,333\,.$$

Il valore di interesse è quello positivo in quanto il sistema che ha generato la risposta al gradino è asintoticamente stabile. Inserendo il valore di δ appena trovato nella 1, si trova che $\omega_n = 3,92\,\mathrm{rad/s}$.

Infine, rimane da determinare lo zero. Un valore opportuno per τ si ottiene utilizzando il teorema del valore iniziale applicato alla derivata della risposta al gradino $\dot{y}(t)$, cioè

$$\lim_{t\to 0}\dot{y}(t) = \lim_{s\to+\infty} s(sG(s))\frac{1}{s} = \frac{K\tau}{\frac{1}{\omega_n^2}} = -\frac{15}{8}$$

da cui si ricava che $\tau \approx -0,61$. Concludendo, una possibile f.d.t. $G(s)$ del sistema che ha generato la risposta al gradino riportata nella figura è la seguente:

$$G(s) = 0.2\frac{-0.61s+1}{0.0651s^2+0.1698s+1}$$

dalla quale si ottiene la risposta al gradino riportata in figura 2.

B

b1) Indicando con $x = [x_1,\, x_2,\, x_3]^T = [y,\, \dot{y},\, \ddot{y}]^T$, il sistema in forma canonica di controllo è il seguente,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A\,x + B\,u\\ y &= C\,x + D\,u\end{aligned}$$

con:

$$A = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -32 & 16 & 2\end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}; \qquad C = \begin{bmatrix}32 & 16 & 0\end{bmatrix}; \qquad D = 0\,.$$

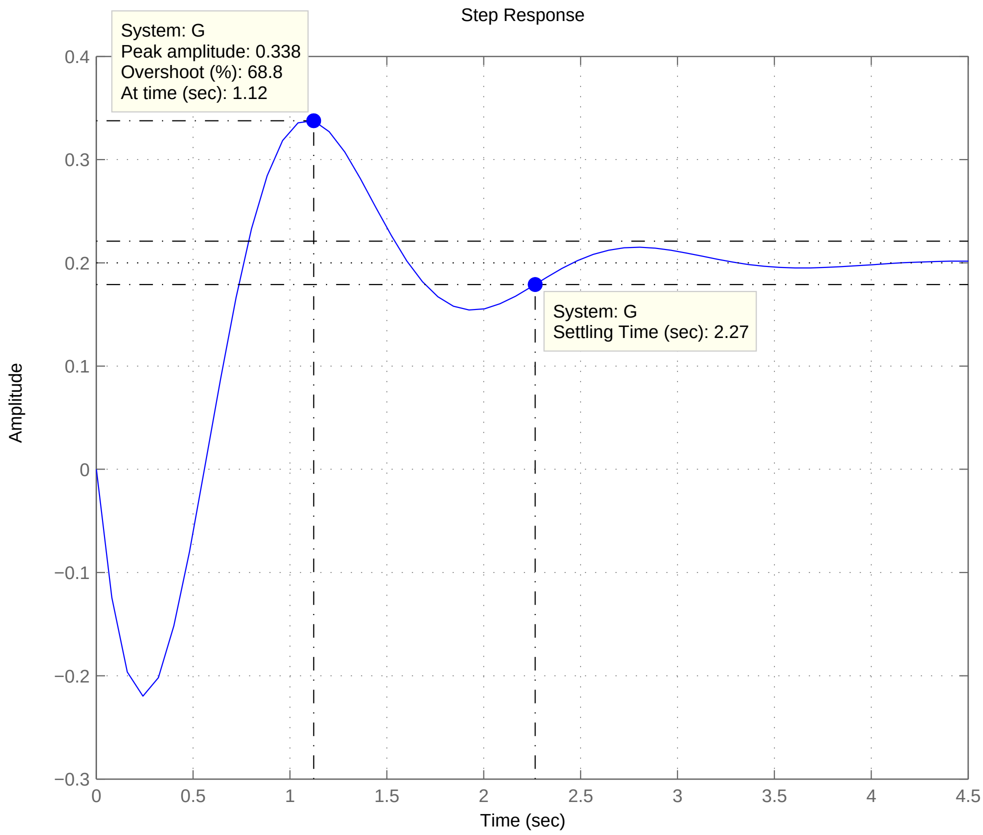


Figura 2: Risposta al gradino unitario della f.d.t. $G(s) = 0.2\frac{-0.16s+1}{0.0651s^2+0.1698s+1}$.

La funzione di trasferimento tra l'ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t)$ può essere ottenuta seguendo due strade; la prima si avvale dell'utilizzo della seguente formula:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D\,,$$

mentre la seconda richiede l'applicazione della trasformata di Laplace al sistema dinamico, costituito, in tal caso, da una equazione differenziale, e procedere poi per sostituzione. Indipendentemente dalla strada percorsa, la f.d.t. richiesta è:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{16(s+2)}{s^3 - 2s^2 - 16s + 32} = \frac{16(s+2)}{(s+4)(s-4)(s-2)}\,.$$

b2) La f.d.t. presenta tre poli reali, di cui due a parte reale positiva: questo indica che il sistema è instabile. Si procede quindi con la tecnica del doppio anello di retroazione o della retroazione in cascata (vedi figura 3); prima di realizzare un controllore $C_2(s)$ tale da garantire le specifiche richieste, si procede alla realizzazione, di solito per mezzo del luogo delle radici, di un controllore $C_1(s)$ tale che il sistema $G_1(s) = \frac{C_1(s)G(s)}{1+C_1(s)G(s)}$ sia asintoticamente stabile. Il controllore $C_2(s)$ sarà poi progettato sui diagrammi di Bode, in quanto la f.d.t. $G_1(s)$, in relazione alla quale viene effettuato il progetto, è asintoticamente stabile. Il luogo delle radici diretto ed inverso relativo alla f.d.t. $G(s)$ sono riportati in figura 4 e in figura 5 rispettivamente. È facile osservare che nessun controllore puramente proporzionale è in grado di rendere asintoticamente stabile la f.d.t. $G_1(s)$. Tuttavia, il luogo delle radici diretto, quello per $K_c > 0$, presenta due asintoti (eccesso poli zeri $n - m = 2$), il cui baricentro si trova sull'asse reale ad una ascissa di valore,

$$\sigma_a = \frac{\sum_1^n p_i - \sum_1^m z_i}{n - m} = 2$$

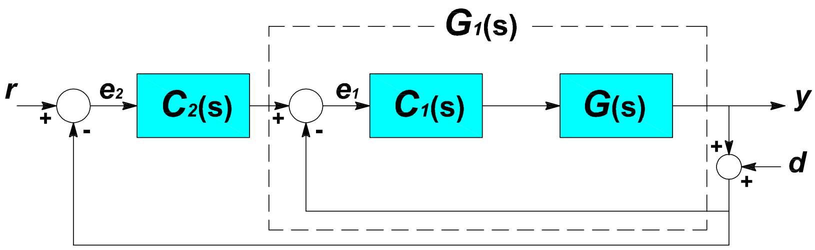


Figura 3: Schema a blocchi relativo ad una tipica retroazione in cascata.

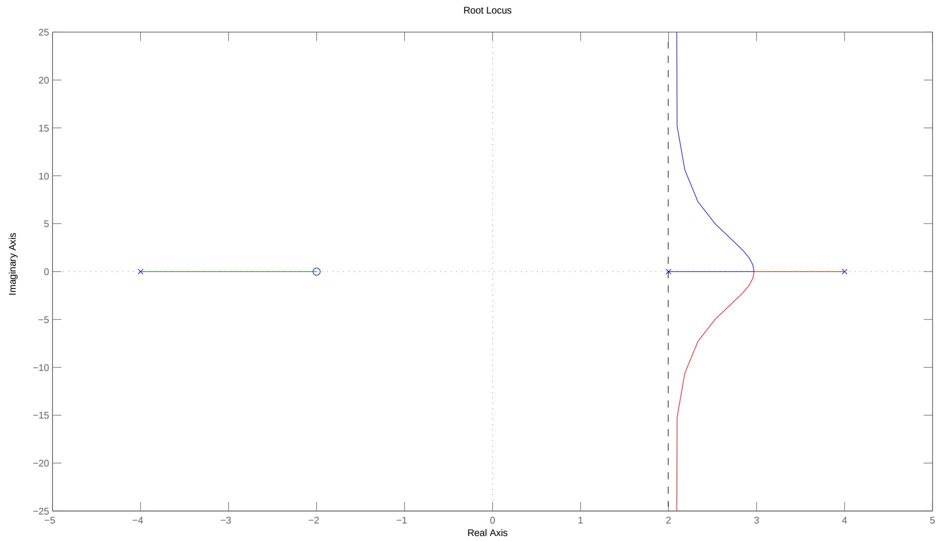


Figura 4: Luogo delle radici diretto di $G(s)$, $K_c > 0$.

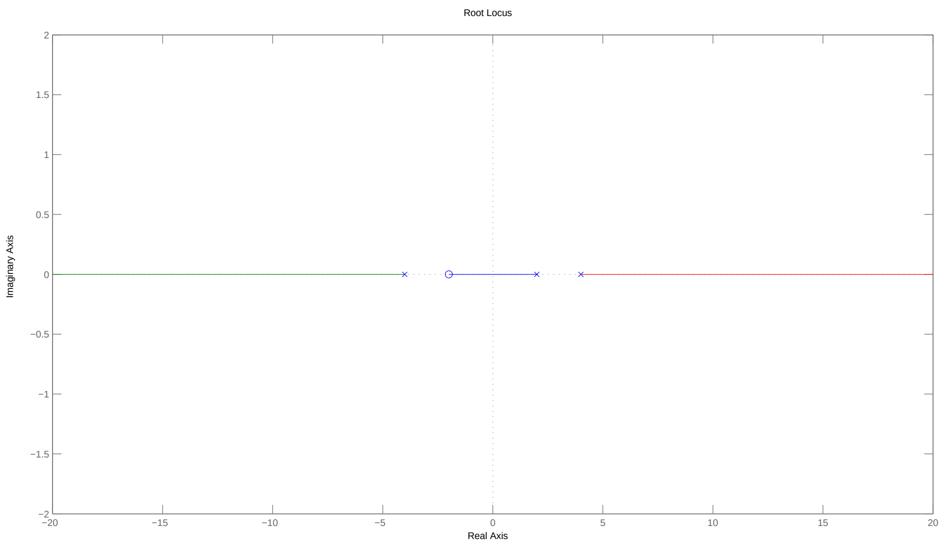


Figura 5: Luogo delle radici inverso di $G(s)$, $K_c < 0$.

e formano con l'asse reale angoli pari a

$$\gamma = \frac{(2r+1)\pi}{n-m}, \ r = 0, 1, \dots n-m-1 \, ,$$

cioè $\pi/2$ e $3\pi/2$. L'inserimento di un controllore $C_1(s)$ a fase minima tale da mantenere inalterato l'eccesso poli-zeri della f.d.t. $C_1(s)G(s)$ e tale da spostare il baricentro degli asintoti nel semipiano sinistro, permette di ottenere una f.d.t. $G_1(s)$ asintoticamente stabile per qualche valore del guadagno K_c del controllore stesso. A tal proposito consideriamo il seguente prototipo di controllore:

$$C_1(s) = K_c \frac{s + z_c}{s + p_c} .$$

Imponendo che il nuovo baricentro degli asintoti sia $\sigma_b = -2$, si ottiene che:

$$\sigma_b = \frac{\sum_1^n p_i - \sum_1^m z_i}{n - m} = 2 + \frac{|z_c| - |p_c|}{2} = -2$$

da cui si ricava che la distanza tra lo zero ed il polo, entrambi sul semiasse negativo, deve essere pari a 8. Ponendo $z_c = -1$ e $p_c = -9$ si ottiene il luogo delle radici riportato in figura 6 per la f.d.t. $C_1(s)G(s)$.

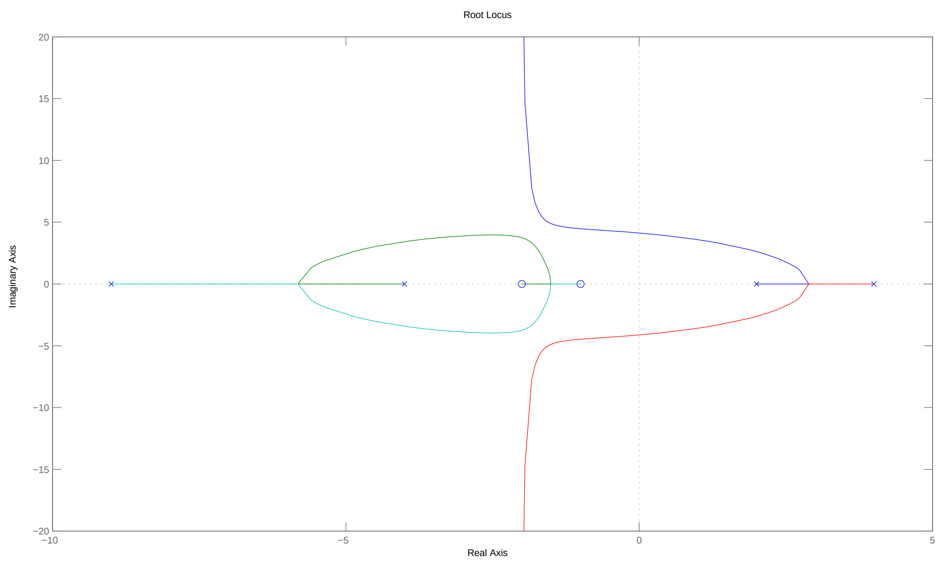


Figura 6: Luogo delle radici diretto di $C_1(s)G(s)$.

In definitiva, il controllore stabilizzante, con la scelta $K_c = 135$, ha la seguente f.d.t.:

$$C_1(s) = 135 \frac{s + 1}{s + 9} ,$$

mentre, la f.d.t. $G_1(s)$ dell'anello stabilizzante, risulta pari a:

$$G_1(s) = \frac{2160(s + 2)(s + 1)}{(s + 1.797)(s + 1.214)(s^2 + 3.989s + 2112)} ,$$

anch'essa a fase minima. La f.d.t. presenta quattro poli a parte reale negativa, di cui due corrispondenti a modi esponenzialmente convergenti e due corrispondenti a modi oscillanti convergenti anch'essi a zero, con pulsazione naturale $\omega_n \simeq 46\,\mathrm{rad/s}$ e smorzamento $\delta \simeq 0,05$. I diagrammi di Bode della f.d.t. $G_1(s)$ sono riportati in figura 7. Nelle figura 8-a,b sono invece riportate le risposte al gradino e all'impulso unitario, rispettivamente.

Data la f.d.t. $G_1(s)$ asintoticamente stabile, è possibile passare al progetto del secondo controllore $C_2(s)$ capace di soddisfare le specifiche richieste. Facendo riferimento al progetto di un controllore del tipo

$$C_2(s) = \frac{k_c}{s^t} \hat{C}_2(s), \text{ con } \hat{C}_2(0) = 1,$$

iniziamo con la scelta del *tipo* t e della costante di guadagno k_c del controllore basandoci sulle specifiche statiche.

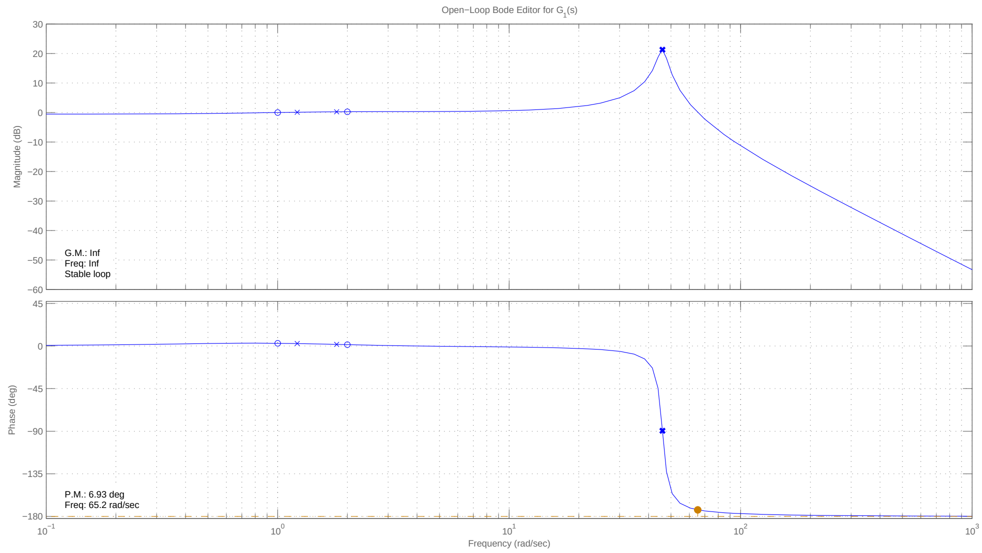
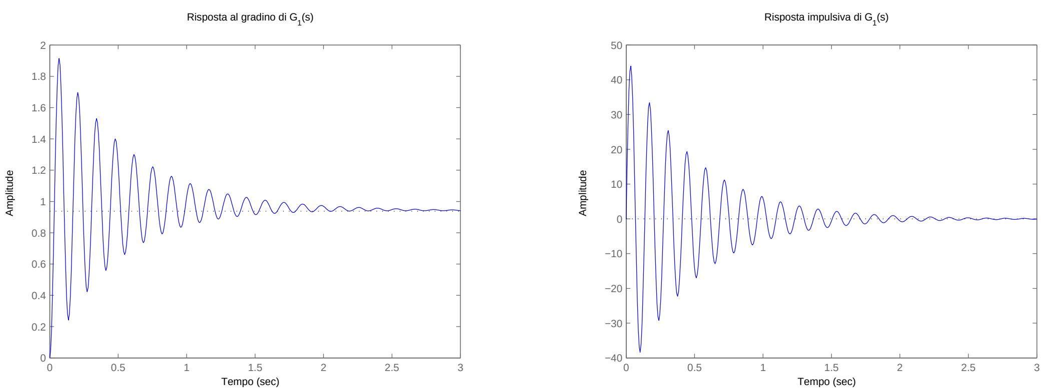


Figura 7: Diagramma di Bode della f.d.t. $G_1(s)$.



a) b)

Figura 8: Le risposte al gradino e impulsive della funzione di trasferimento $G_1(s)$ sono riportati in (a,b) e sono ottenute con il comando step e impulse di Matlab.

b2.1) Poichè la f.d.t. $G_1(s)$ è di tipo "0", affinchè l'errore per un ingresso a rampa lineare del tipo $btH(t)$ con $b = 2$ sia limitato, è necessario che il controllore sia di tipo "1", cioè $t = 1$, e il guadagno di velocità del sistema, $K_v = (sC_1(s)G(s))|_{s=0}$, deve essere almeno pari a 200. Questo implica che il diagramma di Bode deve stare, per le basse frequenze, al di sopra della retta di pendenza -1 passante per $(\omega = 1, |C_2(\jmath\omega)G(\jmath\omega)| = 46\,\mathrm{dB})$. Affinchè questo sia possibile, è necessario scegliere $k_c \geq 215$, essendo $G_1(0) \simeq -0.54\,\mathrm{dB}$.

Per soddisfare le specifiche sulla sovraelongazione e sul tempo di assestamento, tentiamo di progettare un controllore che permetta di approssimare il sistema in anello chiuso con un modello a doppio polo dominante, cioè un sistema del secondo ordine, rispetto al quale le due specifiche si traducono come segue:

$$\begin{aligned} S_{\%} &= 100\exp\left(\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\right) \Rightarrow \delta \approx 0,51 \Rightarrow M_\Phi \approx 51^\circ \\ \omega_T &= \frac{4}{\delta T_a} \Rightarrow \omega_T \approx 262\,\mathrm{rad/s} \end{aligned}$$

Il diagramma di Bode con i vincoli sulla pulsazione di taglio ω_T sono riportati in figura 9.

b2.2) Si tratta di una specifica relativa ad un disturbo di misura in alta frequenza. Sia quindi d il disturbo sul sensore di misura dell'uscita $y(t)$ del sistema (vedi figura 3). Come si può osservare,

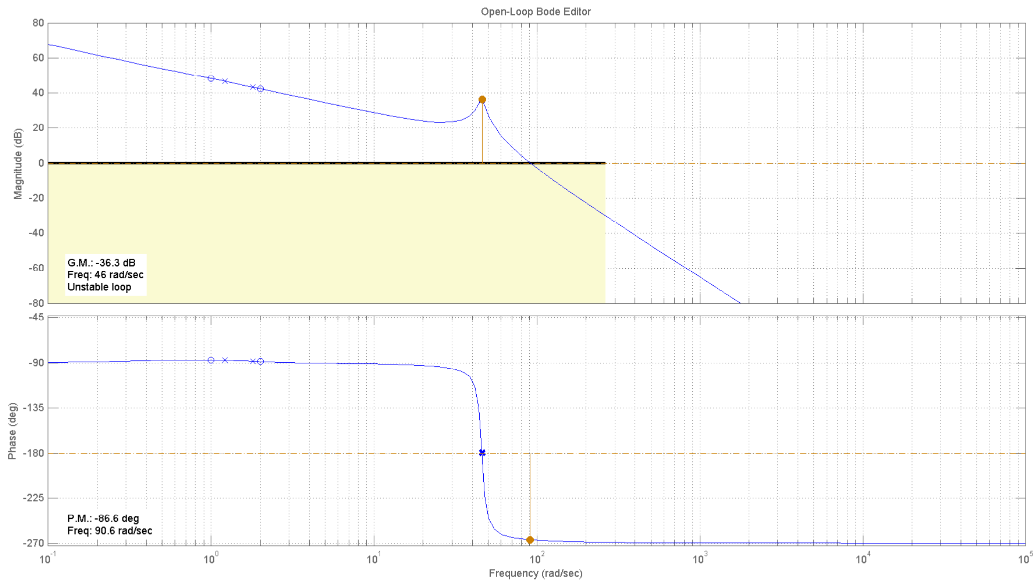


Figura 9: Diagramma di Bode della f.d.t. $\frac{215}{s}G_1(s)$ con specifica sulla pulsazione di taglio.

il disturbo di misura si ripercuote sia sull'anello più esterno che su quello stabilizzante. La funzione di trasferimento tra il disturbo $D(s)$ e l'uscita $Y(s)$ è:

$$Y(s) = -\frac{(1 + C_2(s))G_1(s)}{1 + C_2(s)G_1(s)}D(s)\,,$$

dove $G_1(s)$ è la f.d.t. dell'anello stabilizzante. Nella specifica analizzata in questo punto si richiede un basso guadagno della funzione d'anello $C_2\,(s)\,G_1\,(s)$ per pulsazioni superiori a circa 10^4 rad/s in modo che l'effetto sull'uscita sia inferiore a ± 1 unità quando il disturbo di misura è al suo massimo valore di 10 unità. Questo si traduce, applicando il teorema della risposta armonica, in una richiesta di attenuazione del disturbo pari a circa 1/10, ossia

$$|(1 + C_2(s))G_1(s)| \leq |C_2(s)G_1(s)| + |G_1(s)| \leq \frac{1}{10}\,,$$

da cui:

$$|C_2(s)G_1(s)| \leq 20 \log \left(\frac{1}{10} - |G_1(s)|_{\omega = 10^4\ \mathrm{rad/s}} \right)\,.$$

Essendo $|G_1(s)|_{\omega=10^4\ \mathrm{rad/s}} \simeq -94\,\mathrm{dB}$, si ottiene in definitiva:

$$|C_2(s)G_1(s)| \leq -20\,\mathrm{dB}\,,$$

per pulsazioni maggiori o uguali a 10^4 rad/s. Le limitazioni relative a questa specifica sono riportate in figura 10.

Progetto del controllore $C_2(s)$

La f.d.t. $G_1(s)$ con il controllore parziale $\frac{215}{s}$, non rispetta la specifica sulla pulsazione di taglio. È necessario prima di tutto alzare il diagramma aumentando il guadagno d'anello. Cosi facendo il diagramma attraversa l'asse a $0\,\mathrm{dB}$ oltre $262\,\mathrm{rad/s}$ ma con una pendenza pari a $-60\,\mathrm{dB/dec}$. Per ottenere un attraversamento pari a $-20\,\mathrm{dB/dec}$ è necessario inserire due zeri prima dell'attraversamento; per esempio due zeri coincidenti in -60. Infine, per soddisfare anche la specifica sul margine di fase, è utile l'inserimento di un polo oltre la pulsazione di taglio. Cosi facendo viene rispettata anche la causalità ed il controllore finale è il seguente:

$$C_2(s) = \frac{794(s + 60)^2}{s(s + 2300)}$$

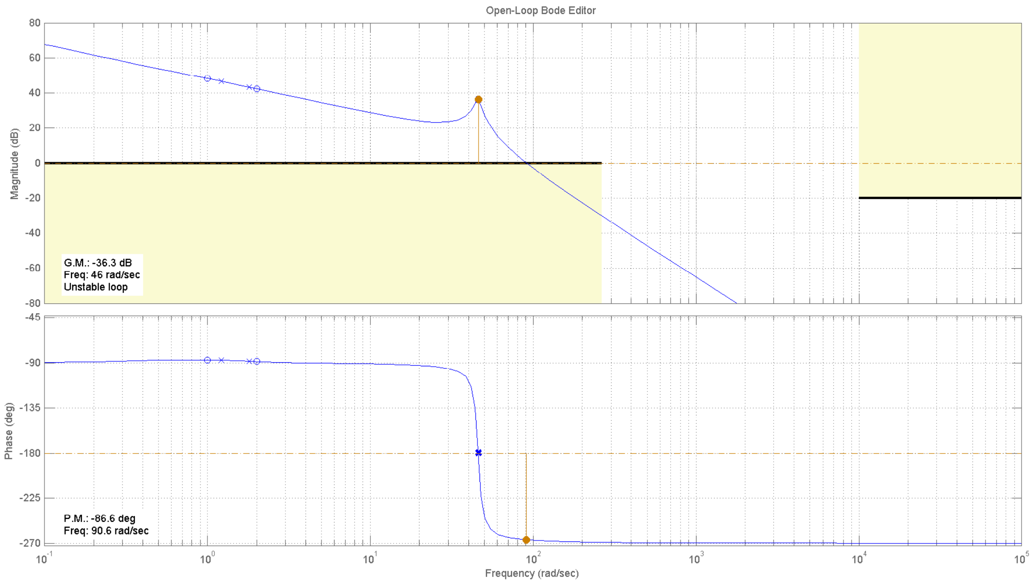


Figura 10: Diagramma di Bode della f.d.t. $\frac{215}{s}G_1(s)$ con specifica sulla pulsazione di taglio e sul rumore di misura.

In figura 12 è riportata la risposta al gradino dell'intero sistema controllato $G_2(s)$, con,

$$G_2(s) = \frac{1715040(s+60)^2(s+2)(s+1)}{(s+97.49)(s+44.77)(s+2)(s+1)(s^2+2162s+1.414\,10^6)}.$$

Come si può vedere, l'approssimazione a doppio polo dominante in tal caso non è del tutto riuscita, ma le specifiche sul tempo di assestamento e sulla sovraelongazione sono comunque rispettate.

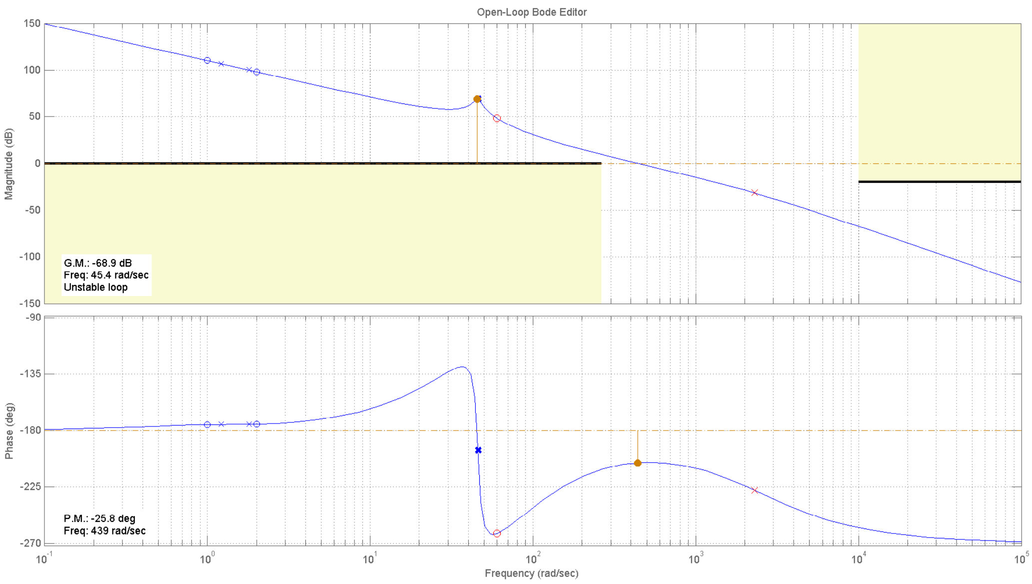


Figura 11: Diagramma di Bode finale della f.d.t. $C_2(s)G_1(s)$ con specifica sulla pulsazione di taglio e sul rumore di misura.

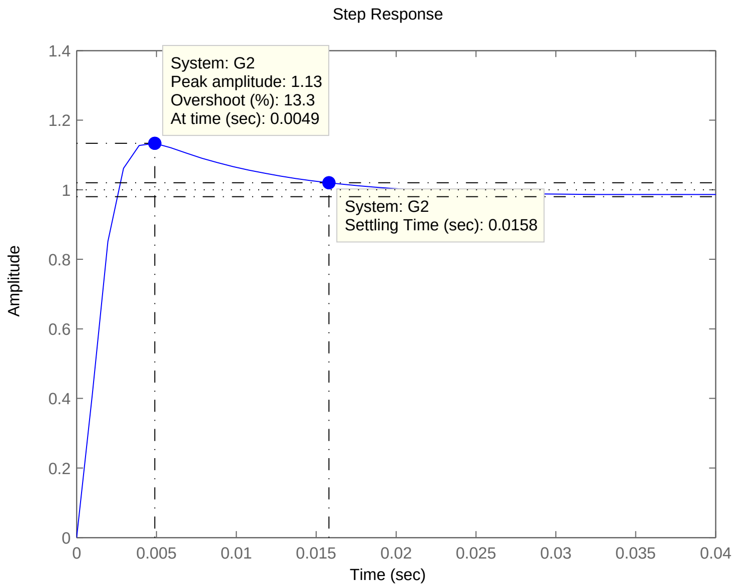


Figura 12: Risposta al gradino della f.d.t. $G_2 = \frac{C_2(s)G_1(s)}{1+C_2(s)G_1(s)}$, con $G_1(s)$ f.d.t. dell'anello stabilizzante.