

Si consideri lo schema di principio di un apparato sperimentale riportato in figura 1.

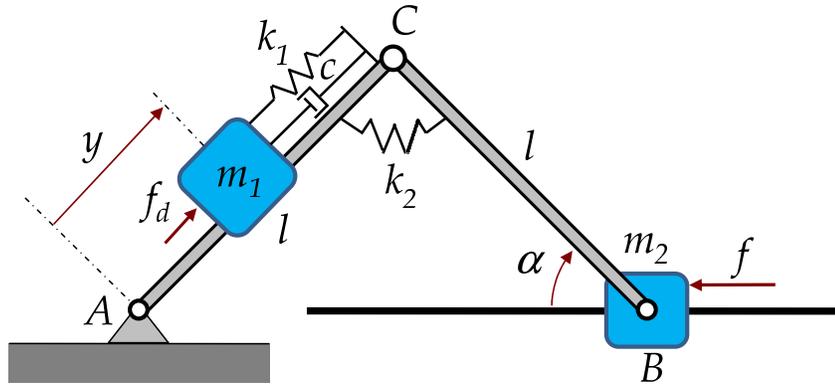


Figure 1: Apparato sperimentale.

L'apparato consiste di due travi,  $AC$  e  $BC$ , di lunghezza  $l$ , incerniate tra di loro in  $C$ ; in corrispondenza della cerniera, che permette la rotazione reciproca di una trave rispetto all'altra, è posta una molla torsionale di costante elastica  $k_2$ . L'altra estremità della trave  $AC$  è connessa a terra nel punto  $A$  mediante un'altra cerniera, mentre la trave  $BC$  è ancorata a terra attraverso un carrello di massa  $m_2$  nel punto  $B$ . Il carrello è libero di muoversi senza attrito lungo la direzione  $AB$ .

Sulla trave  $AC$  è stato posto un corpo di massa  $m_1$  ancorato al nodo  $C$  per mezzo di una molla lineare di costante elastica  $k_1$  e di uno smorzatore viscoso di costante  $c$ . Il corpo di massa  $m_1$  scivola sul piano inclinato  $AC$  senza attrito.

Indicando con  $y$  la posizione della massa sulla trave  $AC$  rispetto al punto  $A$  e con  $\alpha$  l'angolo che la trave  $BC$  forma con la direzione di moto del carrello, la dinamica del sistema può essere descritta dalle seguenti equazioni differenziali:

$$m_1 \ddot{y} + c \dot{y} - m_1 y \dot{\alpha}^2 - k_1 \left( \frac{l}{2} - y \right) + m_1 g \sin \alpha = f_d \quad (1)$$

$$J(y, \alpha) \ddot{\alpha} + 2m_1 y \dot{y} \dot{\alpha} + 4m_2 l^2 \dot{\alpha}^2 \sin \alpha \cos \alpha + 2k_2 \left( 2\alpha - \frac{\pi}{2} \right) + m_1 g y \cos \alpha = fl \sin \alpha \quad (2)$$

dove  $J(y, \alpha) = 4m_2 l^2 \sin^2 \alpha + m_1 y^2$ ,  $f_d$  è una forza di disturbo che agisce sul corpo di massa  $m_1$ , mentre  $f$  è la forza di attuazione che agisce sul carrello di massa  $m_2$ .

- A** Supponendo che il sistema sia controllato dalla forza  $f$  e che la variabile controllata sia la posizione  $y$  della massa  $m_1$  sulla trave  $AC$ , si determini il regime di equilibrio, in forma simbolica, corrispondente al punto di lavoro desiderato  $\alpha = \bar{\alpha}$  con  $\bar{f}_d = 0$ ;
- B** Supponendo di disporre della misura della posizione  $y$  della massa  $m_1$  e di poter controllare la forza di spinta del carrello  $f$ , si determini una rappresentazione del sistema linearizzato in forma di stato, in forma simbolica, intorno all'equilibrio  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{f}$  e  $\bar{f}_d = 0$ ;

Si considerino i seguenti valori numerici:  $l = 3$  m,  $m_1 = 2$  kg,  $m_2 = 3$  kg,  $k_1 = 25$  N/m,  $k_2 = 15$  Nm/rad,  $c = 15$  Ns/m e  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>. Supponiamo, inoltre, di essere interessati al punto di equilibrio corrispondente a  $\bar{\alpha} = \pi/6$  rad.

- C** Si scriva la funzione di trasferimento tra ingresso  $f$  e uscita  $y$  e quella tra il disturbo  $f_d$  e l'uscita  $y$  e si tracci l'andamento qualitativo dei modi associati, specificandone i parametri di interesse.
- D** Si determini una legge di controllo per la forza  $f$  di spinta del carrello che agisca in modo tale da garantire le seguenti specifiche:
- d1)** a partire da condizioni iniziali nulle, la posizione  $y$  della massa  $m_1$  deve raggiungere il valore di regime con errore minore del 2%, portandosi entro tale tolleranza in meno di 40 ms;
- d2)** ipotizzando che la forza  $f_d$  agente sulla massa  $m_1$  vari nel tempo piuttosto lentamente, con frequenze non superiori a 1.6 Hz, e non superiori in valore assoluto 1 N, si garantisca che la variazione indotta sulla posizione del corpo di massa  $m_1$  sia inferiore a 5 mm;

- d3)** si supponga che il sensore che misura lo spostamento della massa  $m_1$  garantisca una misura corretta per pulsazioni inferiori a 4000 rad/s, ma sia affetta al di sopra di queste pulsazioni da un errore pari al massimo a 30 mm. Si desidera che l'effetto sulla regolazione dell'uscita sia inferiore a  $\pm 1$  mm.

Si riporti esplicitamente il controllore ottenuto, il diagramma di Bode del guadagno di anello con le relative specifiche da rispettare, la risposta al gradino del sistema in anello chiuso e lo schema a blocchi complessivo.

## Soluzione

**A** Il sistema è descritto da due variabili di stato  $y$  e  $\alpha$ . Essendo l'equilibrio caratterizzato dalla posizione angolare  $\alpha$  della trave  $BC$  rispetto alla direzione di moto del carrello costante e pari al valore  $\bar{\alpha}$  generico, si ricava che  $\dot{\alpha} = \ddot{\alpha} = 0$ . Tuttavia in condizioni di equilibrio statico anche  $\dot{y}$  e  $\ddot{y}$  sono nulle. Sostituendo tali valori nelle equazioni dinamiche, si ottiene un sistema di due equazioni in due incognite, la posizione  $\bar{y}$  della massa  $m_1$  e la forza  $\bar{F}$  necessaria per mantenere in equilibrio il sistema. Il sistema è il seguente:

$$\begin{cases} -k_1 \left( \frac{l}{2} - \bar{y} \right) + m_1 g \sin \bar{\alpha} = 0 \\ 2k_2 \left( 2\bar{\alpha} - \frac{\pi}{2} \right) + m_1 g \bar{y} \cos \bar{\alpha} = \bar{f} l \sin \bar{\alpha} \end{cases}$$

dalle quali otteniamo,

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{l}{2} - \frac{m_1 g \sin \bar{\alpha}}{k_1} \\ \bar{f} &= \frac{2k_2 (4\bar{\alpha} - \pi) + 2m_1 g \bar{y} \cos \bar{\alpha}}{2l \sin \bar{\alpha}} \end{aligned}$$

con  $\bar{\alpha} \neq 0 \pm k\pi$ . Questa configurazione è ottenibile quando le due travi sono perfettamente allineate lungo la direzione di moto del carrello di massa  $m_2$ . In tal caso la forza di spinta del carrello sarebbe scaricata interamente a terra, senza permettere il sollevamento della struttura e della massa  $m_1$ .

**B** Per ottenere il sistema traslato nel punto di equilibrio calcolato in precedenza, è sufficiente definire le variabili errore  $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4]^T = [y - \bar{y}, \alpha - \bar{\alpha}, \dot{y}, \dot{\alpha}]^T$ ,  $\tilde{f} = f - \bar{f}$  e  $\tilde{f}_d = f_d$ . In questo modo il sistema avrà una rappresentazione di stato con equilibrio nell'origine per ingresso nullo, riportata di seguito

$$\dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_3$$

$$\dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_4$$

$$\dot{\tilde{x}}_3 = (\tilde{x}_1 + \bar{y}) \tilde{x}_4^2 + \frac{k_1}{m_1} \left[ \frac{l}{2} - (\tilde{x}_1 + \bar{y}) \right] - g \sin (\tilde{x}_2 + \bar{\alpha}) - \frac{c}{m_1} \tilde{x}_3 + \frac{\tilde{f}_d}{m_1}$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_4 &= -\frac{1}{J(\tilde{x}_2, \tilde{x}_2)} \left\{ 4m_2 l^2 \sin (\tilde{x}_2 + \bar{\alpha}) \cos (\tilde{x}_2 + \bar{\alpha}) \tilde{x}_4^2 + 2m_1 (\tilde{x}_1 + \bar{y}) \tilde{x}_3 \tilde{x}_4 + \right. \\ &\quad \left. + 2k_2 \left[ 2(\tilde{x}_2 + \bar{\alpha}) - \frac{\pi}{2} \right] + m_1 g (\tilde{x}_1 + \bar{y}) \cos (\tilde{x}_2 + \bar{\alpha}) - (\tilde{f} + \bar{f}) l \sin (\tilde{x}_2 + \bar{\alpha}) \right\} \end{aligned}$$

dove

$$J(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = 4m_2 l^2 \sin^2 (\tilde{x}_2 + \bar{\alpha}) + m_1 (\tilde{x}_1 + \bar{y})^2 .$$

Derivando e calcolando nell'equilibrio delle nuove variabili di stato, cioè nell'origine, si ottiene il sistema linearizzato nel generico punto di equilibrio, nella consueta forma di stato

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + B\tilde{u} \\ \tilde{z} &= C\tilde{x} + D\tilde{u} \end{aligned}$$

dove  $\tilde{u} = [\tilde{f}, \tilde{f}_d]^T$  mentre,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_{32} \\ b_{41} & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ 0]; \quad D = 0$$

con:

$$\begin{aligned}
 a_{31} &= -\frac{k_1}{m_1}; & a_{32} &= -g \cos \bar{\alpha}; & a_{33} &= -\frac{c}{m_1} \\
 a_{41} &= \frac{1}{J_o^2} \left[ -m_1 g \cos(\bar{\alpha}) J_o + 2m_1 y \left( m_1 g \bar{y} \cos(\bar{\alpha}) + 2k_2 \left( 2\bar{\alpha} - \frac{\pi}{2} \right) - \bar{f} l \sin(\bar{\alpha}) \right) \right]; \\
 a_{42} &= \frac{1}{J_o^2} \left[ (m_1 g \bar{y} \sin(\bar{\alpha}) + \bar{f} l \cos(\bar{\alpha}) - 4k_2) J_o - \right. \\
 &\quad \left. - 8m_2 l^2 \sin(\bar{\alpha}) \cos(\bar{\alpha}) \left( \bar{f} l \sin(\bar{\alpha}) - 2k_2 \left( 2\bar{\alpha} - \frac{\pi}{2} \right) - m_1 g \bar{y} \cos(\bar{\alpha}) \right) \right]; \\
 b_{41} &= \frac{l \sin(\bar{\alpha})}{J_o}; & b_{32} &= \frac{1}{m_1};
 \end{aligned}$$

dove

$$J_o = J|_{\bar{x}=0} = 4m_2 l^2 \sin^2(\bar{\alpha}) + m_1 \bar{y}^2$$

**C** Il calcolo della funzione di trasferimento tra l'ingresso  $\tilde{f}$  e l'uscita  $\tilde{x}_1$  del sistema, e di quella tra il disturbo  $\tilde{f}_d$  e l'uscita  $\tilde{x}_1$ , sostituendo i valori numerici dati, risultano

$$\begin{aligned}
 G_f(s) &= \frac{\tilde{Y}_1(s)}{\tilde{F}(s)} = \frac{-0.433}{(s + 5.07)(s + 2.226)(s^2 + 0.2042s + 1.211)} \\
 G_{f_d}(s) &= \frac{\tilde{Y}_1(s)}{\tilde{F}_d(s)} = \frac{0.5(s^2 + 1.485)}{(s + 5.07)(s + 2.226)(s^2 + 0.2042s + 1.211)}.
 \end{aligned}$$

Le funzioni di trasferimento presentano due radici complesse e coniugate a parte reale negativa,  $\lambda_{1,2} \approx -0.1021 \pm j1.0957 = \sigma_1 \pm j\omega_1$ , le quali generano modi oscillanti con pulsazione naturale  $\omega_{n1} \approx 1.1$  rad/s e smorzamento  $\delta_1 \approx 0,1$  (figura 2-a,b). Gli altri due poli sono reali a parte reale negativa,  $\lambda_3 = -5.0701$  e  $\lambda_4 = -2.2256$ , che generano modi esponenzialmente decrescente (figura 2-c,d). In figura 2-e,f è riportata anche la risposta al gradino e impulsiva della funzione di trasferimento  $G_f(s)$ .

**D** Il sistema risulta asintoticamente stabile con i valori numerici dati. Pertanto il progetto di un controllore che permetta al sistema complessivo di rispettare le specifiche può essere affrontato direttamente sui diagrammi di Bode (la  $G_f(s)$  è anche a fase minima). Facendo riferimento al progetto di un controllore del tipo

$$C(s) = \frac{k_c}{s^t} \hat{C}(s), \text{ con } \hat{C}(0) = 1,$$

iniziamo con la scelta del *tipo*  $t$  e della costante di guadagno  $k_c$  del controllore basandoci sulle specifiche statiche.

**d1)** La specifica impone un errore di inseguimento al più pari al 2% del valore desiderato per riferimenti costanti di ampiezza generica  $\bar{y}$ . A questo scopo è sufficiente un controllore di tipo "0" con guadagno statico negativo scelto in base alla relazione

$$\frac{1}{1 + k_c G_f(0)} \leq 0.02 \Rightarrow k_c \geq \frac{1 - 0.02}{0.02 G_f(0)} = -1.5478 \cdot 10^4.$$

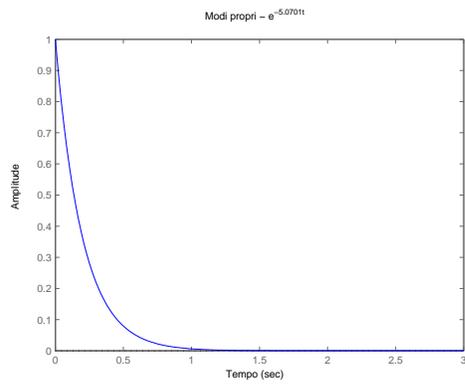
Perciò, in definitiva, affinché sia rispettata la specifica sull'errore a regime, è necessario che

$$|k_c G_f(0)| \geq 34 \text{ db}.$$

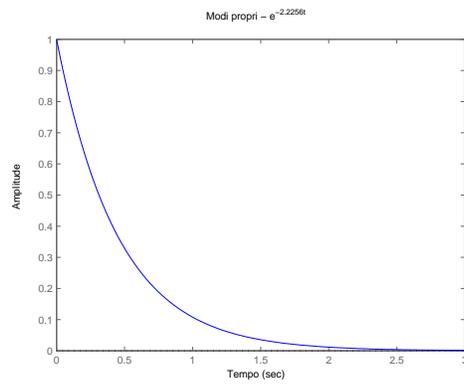
Nella seconda parte della specifica, è richiesto un tempo di assestamento al 2% del valore di regime, pari a 0.04s, senza alcuna specifica sulla sovraelongazione. Tentiamo di esaudire le specifiche sul tempo di assestamento progettando un controllore che permetta di approssimare il sistema in anello chiuso con un modello ad un polo dominante, cioè un sistema del primo ordine, rispetto al quale, il legame tra banda passante e tempo di assestamento (al 2%) è

$$\omega_T = \frac{4}{T_a} \Rightarrow \omega_T \geq 100 \text{ rad/s}$$

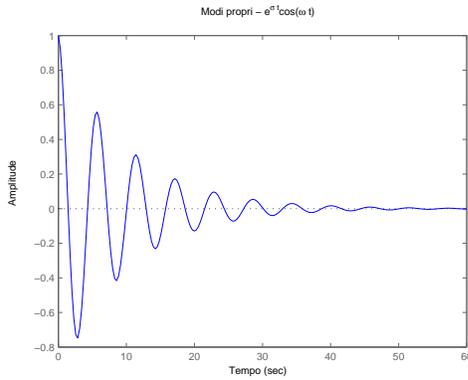
Il diagramma di Bode con i vincoli sulla pulsazione di taglio  $\omega_T$  sono riportati in figura 4.



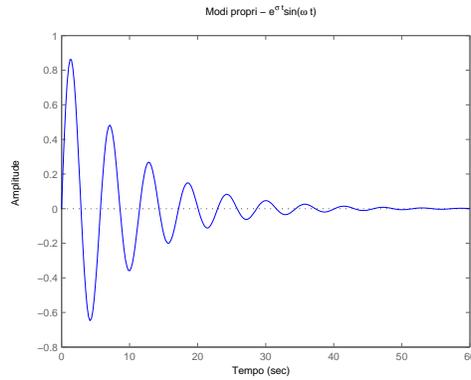
a)



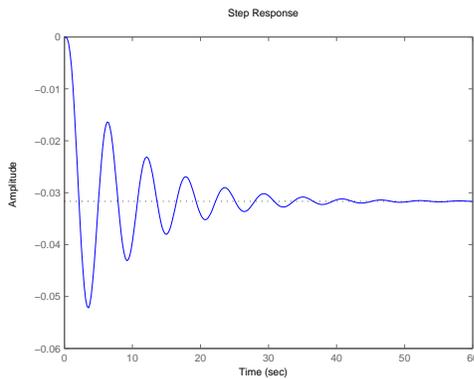
b)



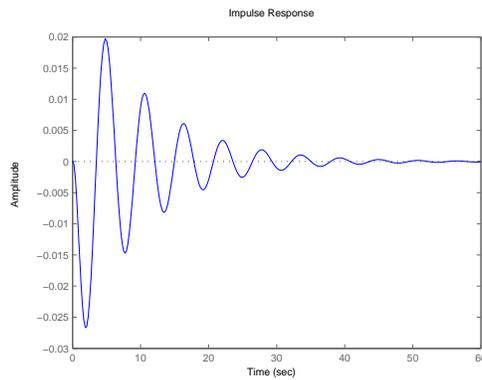
c)



d)



e)



f)

Figure 2: Modi propri del sistema: modi esponenziali negativi (a,b), modi oscillanti e smorzati (c,d), ottenuti con il comando `initial` di Matlab. La risposta al gradino e impulsiva della funzione di trasferimento  $G_f(s)$  è riportata in (d,f), ottenute rispettivamente con il comando `step` e `impz` di Matlab.

**d2)** Partendo dal presupposto che il sistema controllato a ciclo chiuso sarà asintoticamente stabile in seguito al progetto del controllore  $C(s)$ , è possibile applicare il teorema della risposta armonica. La funzione di trasferimento tra il disturbo  $f_d$  applicato al corpo di massa  $m_1$  e l'uscita  $y$  del sistema, cioè la posizione della massa stessa sul piano inclinato, è pari a (figura 6)

$$y(j\omega) = \frac{G_{f_d}(j\omega)}{1 + C(j\omega)G_f(j\omega)} \tilde{F}_d(j\omega) = \bar{G}(j\omega) \tilde{F}_d(j\omega).$$

Applicando quindi il teorema della risposta armonica

$$y(t) = |\bar{G}(j\omega)| A_v \sin(\omega_v t + \angle \bar{G}(j\omega)),$$

questa specifica è equivalente a richiedere che, per pulsazioni  $\omega < 10$  rad/s, si abbia  $|y(t)| < 0.005$  m.

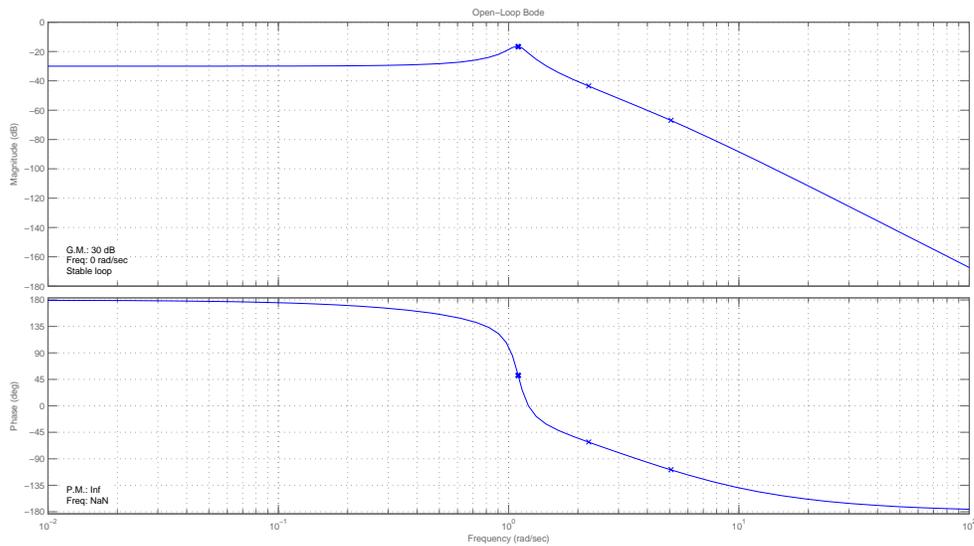


Figure 3: Diagramma di Bode della f.d.t.  $G_f(s)$ .

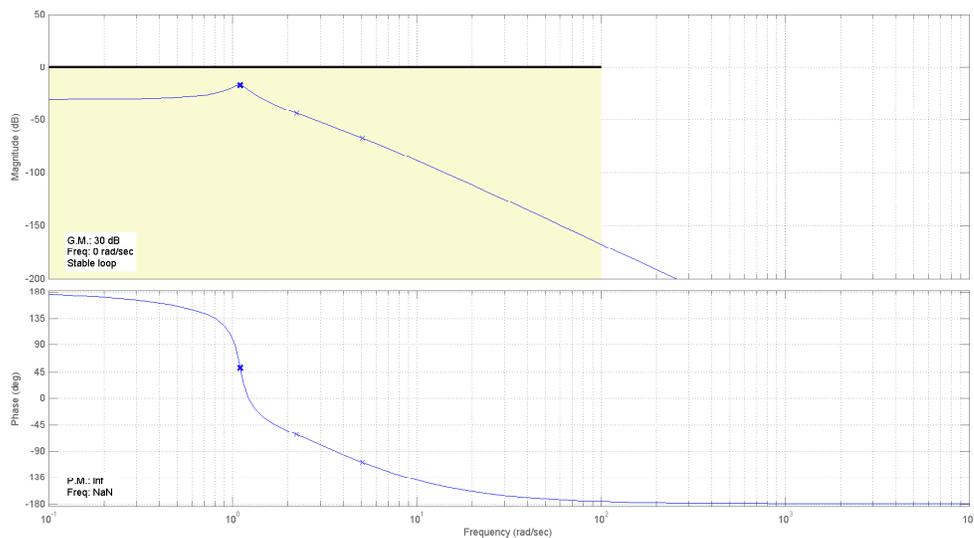


Figure 4: Diagramma di Bode della f.d.t.  $G_{f_d}(s)$  con specifica sulla banda passante.

Facendo riferimento al caso peggiore, si consideri la valutazione cautelativa  $|\sin(\omega_d t + \angle \overline{G}(j\omega))| = 1$  e, dal diagramma di Bode di  $G_{f_d}$  (figura 5) si prenda l'amplificazione massima nel range frequenziale considerato (pari al guadagno statico di  $G_{f_d}$  equivalente a 0.0543 cioè  $-25.3$  db, rilevabile sui diagrammi di Bode o calcolabile esplicitamente imponendo  $s = 0$  nella f.d.t. di  $G_{f_d}(s)$ ). In questo caso la specifica richiede,

$$\left| \frac{1 \cdot G_{f_d}(j\omega)}{1 + C(j\omega)G_f(j\omega)} \right| < -46 \text{ db.}$$

Approssimando la  $G_{f_d}(j\omega)$  a numeratore della relazione a primo membro con il valore che essa assume nel range di frequenze considerato, cioè con il suo guadagno statico, otteniamo

$$\left| \frac{1 \cdot 0.0543}{1 + C(j\omega)G_f(j\omega)} \right| < -46 \text{ db.}$$

Perciò, per basse frequenze si cerca un guadagno elevato di  $C(s)G_f(s)$  e quindi un controllore

$C(s)$  tale per cui  $\left| \frac{C(s)G_f(s)}{0.0543} \right|_{\text{db}} > 46 \text{ db}$ , o, equivalentemente

$$|C(s)G_f(s)| > 21 \text{ db},$$

per pulsazioni inferiori a 10 rad/s. Il vincolo relativo a questa specifica è riportato esplicitamente nella fig. 7.

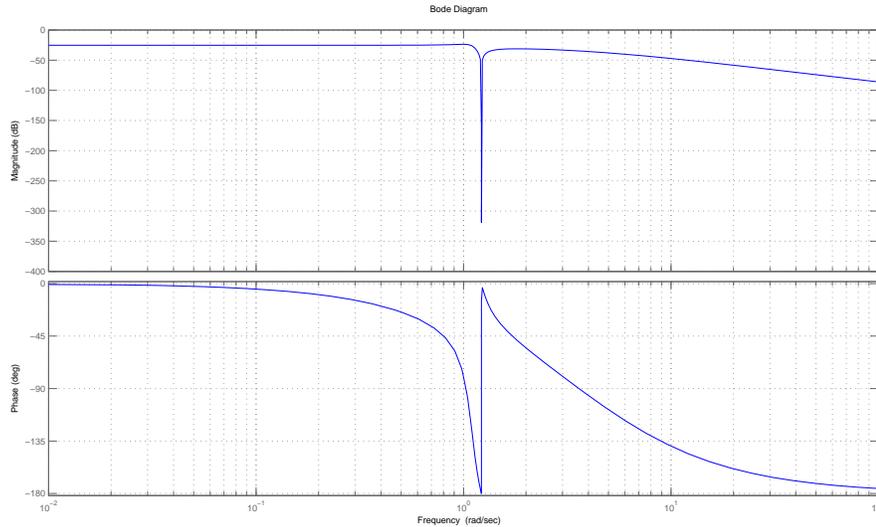


Figure 5: Diagramma di Bode della f.d.t. del disturbo di forza sulla massa  $m_1$ ,  $G_{f_d}(s)$ .

- d3)** Il terzo quesito si riferisce ad un disturbo di misura. Sia quindi  $\nu$  il disturbo sul sensore di posizione e si indichi con

$$\Omega(s) = -\frac{C(s)G_f(s)}{1 + C(s)G_f(s)}\nu(s),$$

la f.d.t. tra il disturbo di misura e l'uscita del sistema. Nella specifica analizzata in questo punto si richiede un basso guadagno della funzione d'anello  $C(s)G_f(s)$  per pulsazioni superiori a circa  $4 \cdot 10^3$  rad/s in modo che l'effetto sull'uscita sia inferiore a  $\pm 10^{-3}$  m quando il disturbo di misura è al suo massimo valore di 0.03 m. Questo si traduce, applicando il teorema della risposta armonica, in una richiesta di attenuazione del disturbo pari a circa 0.033, ossia

$$|C(s)G_f(s)| \geq -30 \text{ db},$$

per pulsazioni maggiori o uguali a  $4 \cdot 10^3$  rad/s. Le limitazioni relative a questa specifica sono riportate in figura 8

Una possibile soluzione per il controllore  $C(s)$  è la seguente

$$C(s) = -873,4 \cdot 10^{10} \frac{(s + 5,115)(s^2 + 0,4879s + 1.266)}{(s + 2900)^3}.$$

Il diagramma di Bode della funzione di trasferimento in anello aperto è riportato in fig. 9. Si noti che il controllore presenta un guadagno abbastanza elevato necessario per rispettare soprattutto la specifica sull'errore a regime. Il valore negativo di questo parametro, come già menzionato in precedenza, è dovuto alla presenza di un guadagno negativo anche della f.d.t.  $G_f(s)$ . Lo zero complesso coniugato in prossimità del polo anch'esso complesso e coniugato del sistema e lo zero reale semplice in corrispondenza del polo della  $G_f(s)$  a pulsazione maggiore permette di ottenere un attraversamento del diagramma di Bode della f.d.t. in anello aperto con pendenza pari a  $-20$  db/dec e, allo stesso tempo, confinare l'intero luogo delle radici nel semipiano sinistro. In tal modo è possibile soddisfare sia la specifica sulla banda passante che quella sul disturbo in bassa frequenza, tuttavia è necessario l'inserimento anche di tre poli reali in alta frequenza per due motivi principali:

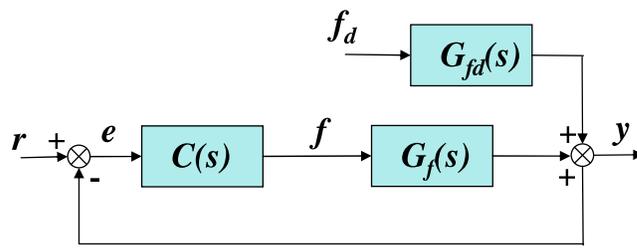


Figure 6: Schema a blocchi.

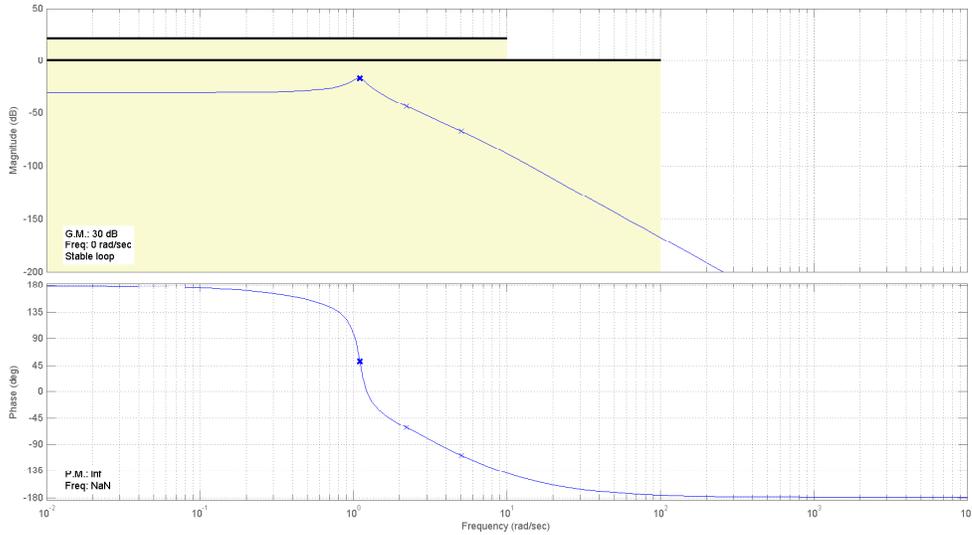


Figure 7: Diagramma di Bode della f.d.t.  $G_f(s)$  con specifica sulla banda passante e disturbo di forza  $f_d$  applicato sul corpo di massa  $m_1$ .

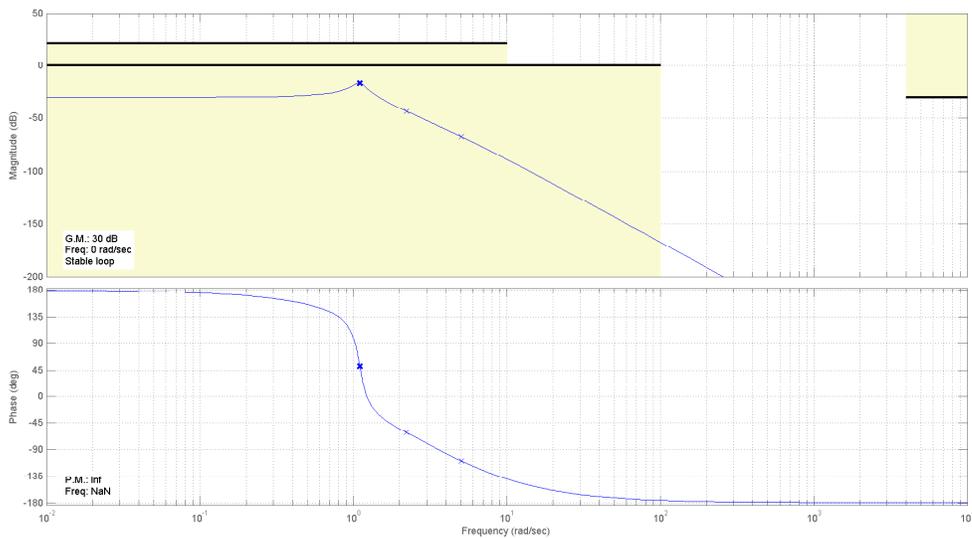


Figure 8: Diagramma di Bode della f.d.t.  $G_f(s)$  con specifica sulla banda passante, disturbo di forza  $f_d$  sul corpo di massa  $m_1$  e disturbo di misura.

il primo è legato alla specifica sul disturbo di misura in alta frequenza, il secondo è legato, invece, alla necessità di rendere causale il controllore, nel caso in cui i poli necessari per garantire la specifica

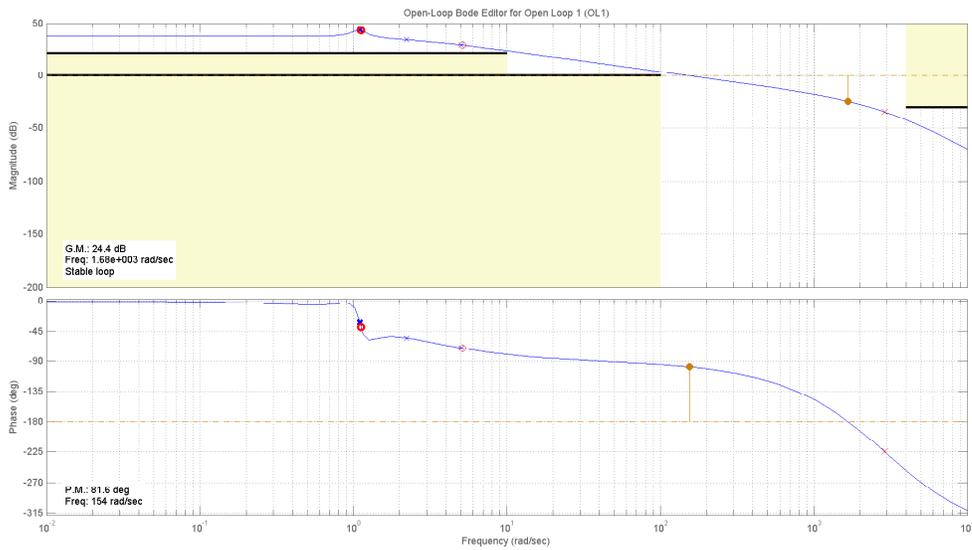


Figure 9: Diagramma di Bode risultante dal progetto della f.d.t. d'anello  $C(s)G_f(s)$ .

sul disturbo non siano sufficienti a garantirlo. La presenza dei tre poli in alta frequenza permette infatti di abbassare il diagramma del modulo in corrispondenza delle frequenze caratterizzanti il disturbo di misura. Tuttavia, i tre poli modificano il luogo delle radici generando due rami che si estendono nel semipiano destro: questo non comporta nessun problema in quanto i poli del sistema in anello chiuso sono comunque confinati nel semipiano sinistro per valori del guadagno contenenti il valore  $k_c$  scelto, con un buon margine di sicurezza.

In fig. 10 è riportato il diagramma di Bode del sistema controllato. Come si può notare dalla fig. 11, dove è riportata la risposta al gradino del sistema controllato, il tentativo di ottenere un sistema a ciclo chiuso del primo ordine è comunque riuscito e la risposta stessa presenta un tempo di assestamento inferiore a quello desiderato.

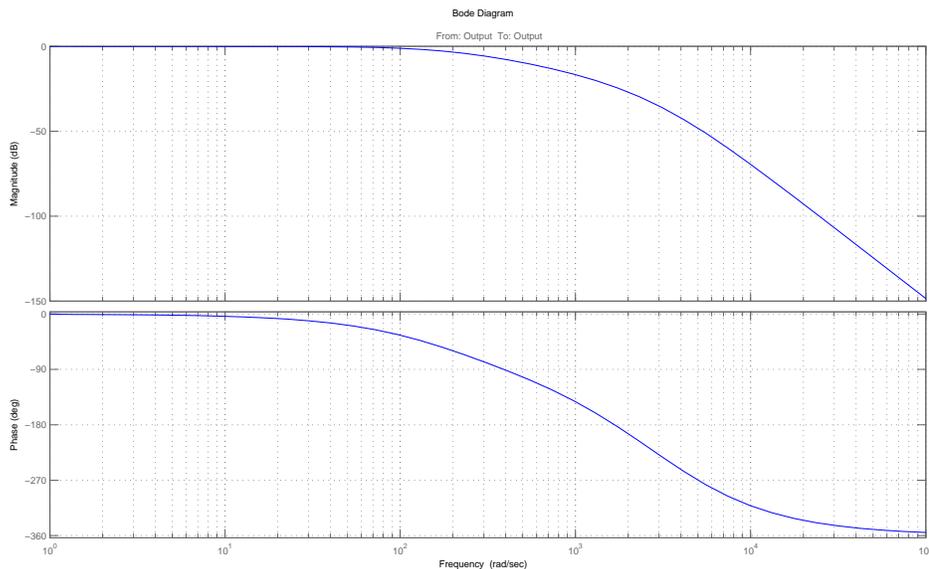


Figure 10: Diagramma di Bode del sistema controllato in anello chiuso.

Nella fig. 12 è inoltre riportata la risposta del sistema controllato nel caso in cui, come da specifica, l'errore sulla tensione sia di tipo sinusoidale con pulsazione inferiore o uguale a  $\omega = 10$  rad/s.

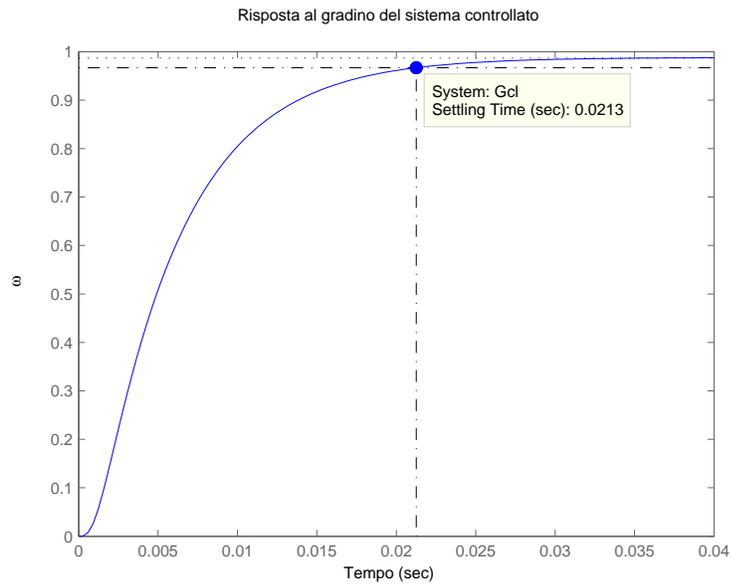


Figure 11: Risposta al gradino del sistema controllato in anello chiuso.

Il grafico può essere ottenuto da Matlab utilizzando il comando lsim ed impostando un ingresso sinusoidale di pulsazione desiderata ed ampiezza 1 N. Il sistema al quale l'ingresso è applicato ha come funzione di trasferimento  $G_{fd}(s)/(1 + C(s)G_f(s))$ . Nella fig. 13 è invece riportata la risposta

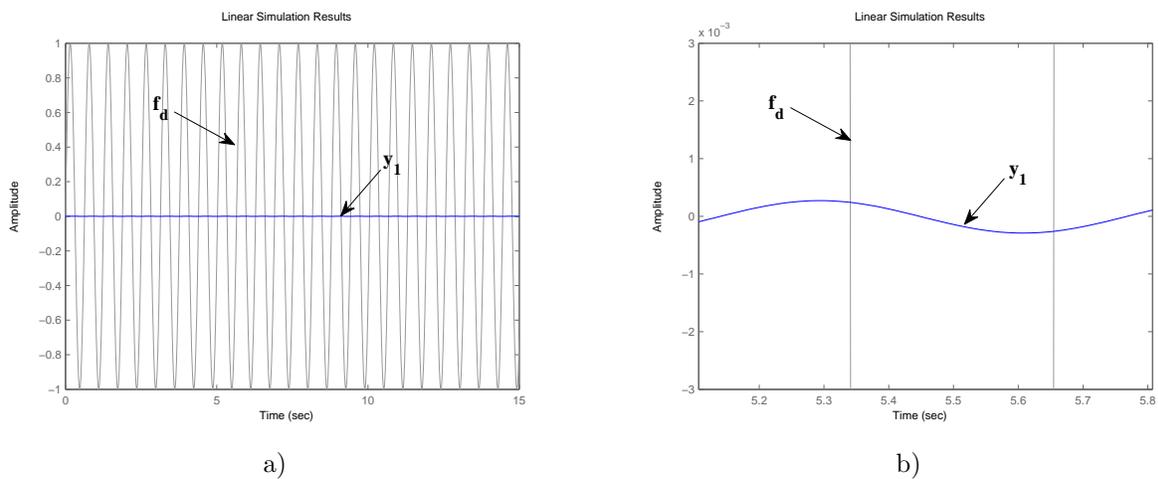
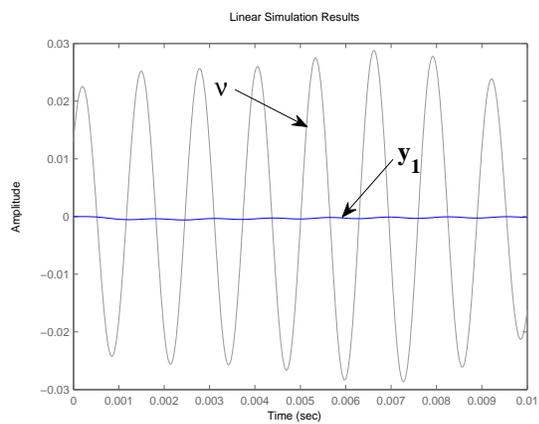


Figure 12: Risposta del sistema controllato ad un segnale sinusoidale  $f_d(t) = \sin(10t)$  applicato come disturbo di forza sul corpo di massa  $m_1$  (a) e relativo zoom (b).

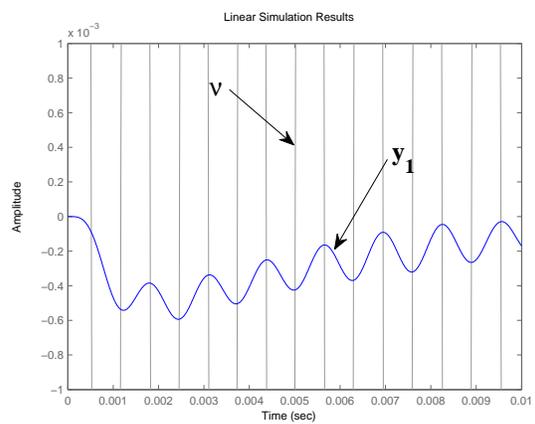
del sistema controllato nel caso in cui, come da specifica, l'errore sulla misura dell'uscita sia di tipo sinusoidale con pulsazione maggiore o uguale a  $\omega = 4 \cdot 10^3$  rad/s. Il grafico può essere ottenuto da Matlab utilizzando il comando lsim ed impostando un disturbo

$$\nu(t) = \frac{0,03}{\sum_{i=1}^3 \nu_i} \left( \nu_1 \sin(5 \cdot 10^4 t) + \nu_2 \cos(4,7 \cdot 10^3 t) + \sin\left(4 \cdot 10^3 + \frac{\pi i}{3}\right) \right)$$

dove le ampiezze sono generate casualmente, indipendentemente ed uniformemente distribuite nell'intervallo  $[0; 1]$ , di valore  $\nu_1 = 0.9134$ ,  $\nu_2 = 0.6324$  e  $\nu_3 = 0.0975$ . Il sistema al quale l'ingresso è applicato ha come funzione di trasferimento  $-C(s)G_f(s)/(1 + C(s)G_f(s))$ .



a)



b)

Figure 13: Risposta del sistema controllato ad un segnale sinusoidale applicato come disturbo di misura (a) e relativo zoom (b).