

Si consideri lo schema di principio di un apparato sperimentale riportato in figura 1.

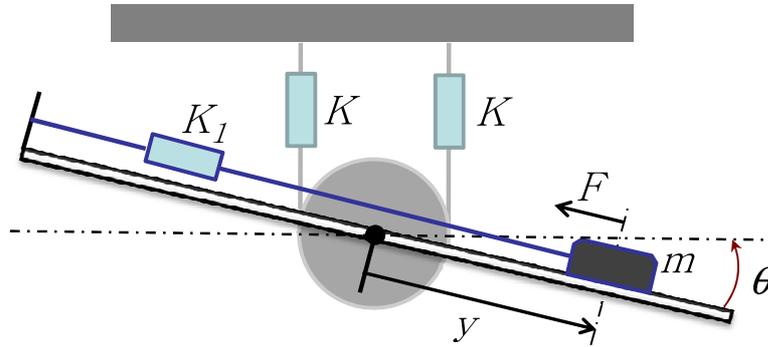


Figure 1: Apparato sperimentale.

Il principale componente dello schema consiste in un motore lineare. Esso può essere visto come un motore rotativo di raggio infinito. Gli avvolgimenti elettrici destinati a formare il campo magnetico, e costituenti la così detta parte statorica del motore, sono distribuiti lungo tutta l'asta. La parte mobile del motore, cioè il rotore, è il carrello di massa  $m$  posto sopra all'asta. Il movimento del carrello è possibile grazie al campo magnetico generato dagli avvolgimenti elettrici che agiscono sul carrello di materiale ferromagnetico. La dinamica del motore lineare è sostanzialmente analoga a quella di un classico motore rotativo. Indicando con  $R$  e  $L$  la resistenza e l'induttanza degli avvolgimenti, con  $v$  la tensione ai capi degli stessi, e con  $i$  la corrente che vi scorre, la dinamica delle variabili elettriche nel circuito statorico è quindi descritta dall'equazione differenziale

$$L \frac{di}{dt} + Ri = v - v_e \quad (1)$$

dove  $v_e = k_e \dot{y}$  è la tensione contro-elettromotrice indotta sugli avvolgimenti statorici, provocata dal movimento del carrello sull'asta. La forza motrice generata dal motore è proporzionale a sua volta alla corrente statorica  $F_m = K_m i$ , secondo una costante di proporzionalità  $K_m$ . Il carrello è inoltre collegato tramite una molla di costante elastica  $K_1$  ad una estremità dell'asta sulla quale scorre con attrito viscoso  $b$ .

L'asta a sua volta è incernierata sulla mezzeria ad una puleggia di raggio  $r$  sulla quale, per mezzo di una corda inestensibile, agiscono due molle di costante elastica  $K$ , che ne permettono la rotazione di angolo  $\theta$ . La dinamica delle variabili meccaniche è descritta quindi dalle seguenti equazioni differenziali

$$(J + my^2) \ddot{\theta} + \gamma \dot{\theta} + 2my\dot{y}\dot{\theta} + 2Kr^2\theta + mgy \cos(\theta) = 0 \quad (2)$$

$$m\ddot{y} + B\dot{y} - m\dot{\theta}^2 y + K_1 y + mg \sin(\theta) = K_m i. \quad (3)$$

dove  $\gamma$  è il coefficiente di attrito viscoso localizzato sull'asse di rotazione della puleggia.

- A** Supponendo che il sistema sia controllato dalla tensione  $v$  e che la variabile di controllo sia la posizione angolare  $\theta$  della puleggia, si determini il regime di equilibrio, in forma simbolica, corrispondente al punto di lavoro desiderato  $\theta = \bar{\theta}$  costante;
- B** Supponendo di disporre della misura della posizione angolare  $\theta$  della puleggia e di poter controllare la tensione di alimentazione  $v$  del motore, si determini una rappresentazione del sistema linearizzato in forma di stato, in forma simbolica, intorno all'equilibrio corrispondente a  $\bar{\theta}$ ;

Si considerino i seguenti valori numerici:  $R = 0.5 \Omega$ ,  $L = 50 \text{ mH}$ ,  $K_e = 0.5 \text{ V}\cdot\text{s/m}$ ,  $K_m = 1 \text{ N/A}$ ,  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ,  $J = 7.5 \cdot 10^{-3} \text{ Kg}\cdot\text{m}^2/\text{rad}$ ,  $b = 2 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ ,  $K = K_1 = 64.9 \text{ N/m}$ ,  $r = 0.5 \text{ m}$ ,  $L_{asta} = 3 \text{ m}$ ,  $m = 4 \text{ Kg}$ ,  $\gamma = 2 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}/\text{rad}$ . Supponiamo, inoltre, di essere interessati al punto di equilibrio corrispondente a  $\bar{\theta} = -\pi/6 \text{ rad}$ .

- C** Si scriva la funzione di trasferimento del sistema e si tracci l'andamento qualitativo dei modi associati, specificandone i parametri di interesse.

**D** Si determini una legge di controllo per la tensione  $v$  di alimentazione del motore che agisca in modo da garantire le seguenti specifiche:

- d1)** a partire da condizioni iniziali nulle, la posizione angolare  $\theta$  della puleggia deve raggiungere il valore di regime con errore minore del 2%, portandosi entro tale tolleranza in meno di 50 ms;
- d2)** ipotizzando che sulla tensione  $v$  utilizzata come ingresso di controllo, agisca un disturbo additivo a bassa frequenza del tipo  $d_v(t) = A_v \sin(\omega_v t)$  V, con  $\omega_v \leq 2$  rad/s e  $A_v = 1.9$  V, si deve garantire che l'effetto sull'uscita  $\theta$  sia inferiore a  $\pm 0.001$  rad;
- d3)** si supponga che il potenziometro che misura l'angolo di rotazione della puleggia garantisca una misura corretta per frequenze inferiori a 477.5 Hz, ma sia affetta al di sopra di queste frequenze da un errore pari al massimo a 0.01 rad. Si desidera che l'effetto sulla regolazione dell'uscita sia inferiore a  $\pm 3 \cdot 10^{-4}$  rad.

Si riporti esplicitamente il controllore ottenuto ed il diagramma di Bode del guadagno di anello con le relative specifiche da rispettare.

## Soluzione

**A** Il sistema è descritto da cinque variabili di stato  $\theta, y, i, \dot{\theta}$  e  $\dot{y}$ . Essendo l'equilibrio caratterizzato dalla posizione angolare  $\theta$  della puleggia costante e pari al valore  $\bar{\theta}$  generico, si ricava che  $\dot{\theta} = \dot{\theta} = 0$  e  $\dot{y} = 0$ . Sostituendo tali valori nelle equazioni dinamiche, si ottiene un sistema di tre equazioni in tre incognite, la tensione di alimentazione dell'avvolgimento del motore, la corrente che in esso scorre, e la posizione del carrello sull'asta. Il sistema è il seguente:

$$\begin{cases} 2Kr^2\bar{\theta} + mg\bar{y} \cos \bar{\theta} = 0 \\ mg \sin \bar{\theta} + K_1\bar{y} = K_m\bar{I} \\ \bar{v} = R\bar{I} \end{cases}$$

dalle quali otteniamo,

$$\begin{aligned} \bar{y} &= -\frac{2K\bar{\theta}r^2}{mg \cos \bar{\theta}} \\ \bar{I} &= \frac{mg \sin \bar{\theta} + K_1\bar{y}}{K_m} = \frac{m^2g^2 \sin 2\bar{\theta} - 4K_1Kr^2\bar{\theta}}{2mgK_m \cos \bar{\theta}} \\ \bar{v} &= \frac{m^2g^2 \sin 2\bar{\theta} - 4K_1Kr^2\bar{\theta}}{2mgK_m \cos \bar{\theta}} R \end{aligned}$$

con  $\bar{\theta} \neq \pi/2 \pm k\pi$ . In realtà, questa configurazione è ottenibile solo se il carrello di massa  $m$  riesce a generare un momento sull'asta tendente all'infinito. Questo valore è ottenibile solo se il braccio tende ad infinito.

**B** Per ottenere il sistema traslato nel punto di equilibrio calcolato in precedenza, è sufficiente definire le variabili errore  $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4, \tilde{x}_5]^T = [\theta - \bar{\theta}, y - \bar{y}, i - \bar{I}, \dot{\theta}, \dot{y}]^T$ ,  $\tilde{v} = v - \bar{v}$ . In questo modo il sistema avrà una rappresentazione di stato con equilibrio nell'origine per ingresso nullo, riportata di seguito

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_4 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_5 \\ \dot{\tilde{x}}_3 = -\frac{R}{L}(\tilde{x}_3 + \bar{I}) - \frac{K_m}{L}\tilde{x}_5 + \frac{1}{L}(\tilde{v} + \bar{v}) \\ \dot{\tilde{x}}_4 = \frac{1}{J+m(\bar{x}_2+\bar{y})^2} [-\gamma\tilde{x}_4 - 2m(\tilde{x}_2 + \bar{y})\tilde{x}_4\tilde{x}_5 - 2Kr^2(\tilde{x}_1 + \bar{\theta}) - mg(\tilde{x}_2 + \bar{y}) \cos(\tilde{x}_1 + \bar{\theta})] \\ \dot{\tilde{x}}_5 = (\tilde{x}_2 + \bar{y})\tilde{x}_4^2 - g \sin(\tilde{x}_1 + \bar{y}) - \frac{b}{m}\tilde{x}_5 - \frac{K_1}{m}(\tilde{x}_2 + \bar{y}) + \frac{K_m}{m}(\tilde{x}_3 + \bar{I}) \end{cases} \quad (4)$$

dalla quale, derivando, si ottiene il sistema linearizzato nel generico punto di equilibrio, nella consueta forma di stato

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + B\tilde{v} \\ \tilde{z} &= C\tilde{x} + D\tilde{v} \end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & 0 & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}; & B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_{31} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C &= [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]; & D &= 0 \end{aligned}$$

con:

$$\begin{aligned}
 a_{33} &= -\frac{R}{L}; & a_{35} &= -\frac{K_e}{L}; \\
 a_{41} &= \frac{mg\bar{y} \sin \bar{\theta} - 2Kr^2}{J + m\bar{y}^2}; \\
 a_{42} &= \frac{4mKr^2\bar{y}\bar{\theta} + m^2g\bar{y}^2 \cos \bar{\theta} - mgJ \cos \bar{\theta}}{(J + m\bar{y}^2)^2}; \\
 a_{44} &= -\frac{\gamma}{J + m\bar{y}^2}; & a_{45} &= 0; \\
 a_{51} &= -g \cos \bar{\theta}; & a_{52} &= -\frac{K_1}{m}; & a_{53} &= \frac{K_m}{m}; \\
 a_{54} &= 0; & a_{55} &= -\frac{b}{m} \\
 b_{31} &= \frac{1}{L}
 \end{aligned}$$

**C** Il calcolo della funzione di trasferimento tra l'ingresso  $v$  e l'uscita  $\theta$  del sistema può essere effettuato in due modi diversi; il primo richiede l'applicazione della seguente formula

$$\frac{\Theta(s)}{V_s(s)} = C(sI - A)^{-1} B,$$

mentre il secondo richiede l'applicazione della trasformata di Laplace al sistema dinamico, costituito dalle sue equazioni differenziali, e procedere poi per sostituzione. Indipendentemente dalla strada percorsa, sostituendo i valori numerici dati, la funzione di trasferimento diviene complessivamente

$$G(s) = \frac{-168.65}{(s + 9.766)(s^2 + 1.005s + 8.038)(s^2 + 1.714s + 50.2)}.$$

La funzione di trasferimento presenta due coppie di radici complesse e coniugate a parte reale negativa:  $\lambda_{1,2} \approx -0.8571 \pm j7.0331 = \sigma_1 \pm j\omega_1$ , le quali generano modi oscillanti con pulsazione naturale  $\omega_{n1} \approx 7.09$  rad/s e smorzamento  $\delta_1 \approx 0,12$  (figura 2-a,b),  $\lambda_{3,4} \approx -0.5025 \pm j2.7902 = \sigma_2 \pm j\omega_2$ , le quali generano modi oscillanti con pulsazione naturale  $\omega_{n2} \approx 2.84$  rad/s e smorzamento  $\delta_2 \approx 0,18$  (figura 2-c,d), e una radice reale negativa  $\lambda_5 \approx -9.7659$ , che genera un modo esponenziale decrescente (figura 2-e). In figura 2-f è riportata anche la risposta impulsiva della funzione di trasferimento  $G(s)$ .

**D** Il sistema risulta asintoticamente stabile con i valori numerici dati. Pertanto il progetto di un controllore che permetta al sistema complessivo di rispettare le specifiche può essere affrontato direttamente sui diagrammi di Bode (la  $G(s)$  è anche a fase minima). Facendo riferimento al progetto di un controllore del tipo

$$C(s) = \frac{k_c}{s^t} \hat{C}(s), \text{ con } \hat{C}(0) = 1,$$

iniziamo con la scelta del tipo  $t$  e della costante di guadagno  $k_c$  del controllore basandoci sulle specifiche statiche.

**d1** La specifica impone un errore di inseguimento al più pari al 2% del valore desiderato per riferimenti costanti di ampiezza generica  $\bar{\theta}$ . A questo scopo è sufficiente un controllore di tipo "0" con guadagno statico scelto in base alla relazione

$$\frac{1}{1 + k_c G(0)} \leq 0.02 \Rightarrow k_c \geq \frac{1 - 0.02}{0.02 G(0)} = 1145.$$

Perciò, in definitiva, affinché sia rispettata la specifica sull'errore a regime, è necessario che

$$|k_c G(0)| \geq 34 \text{ db}.$$

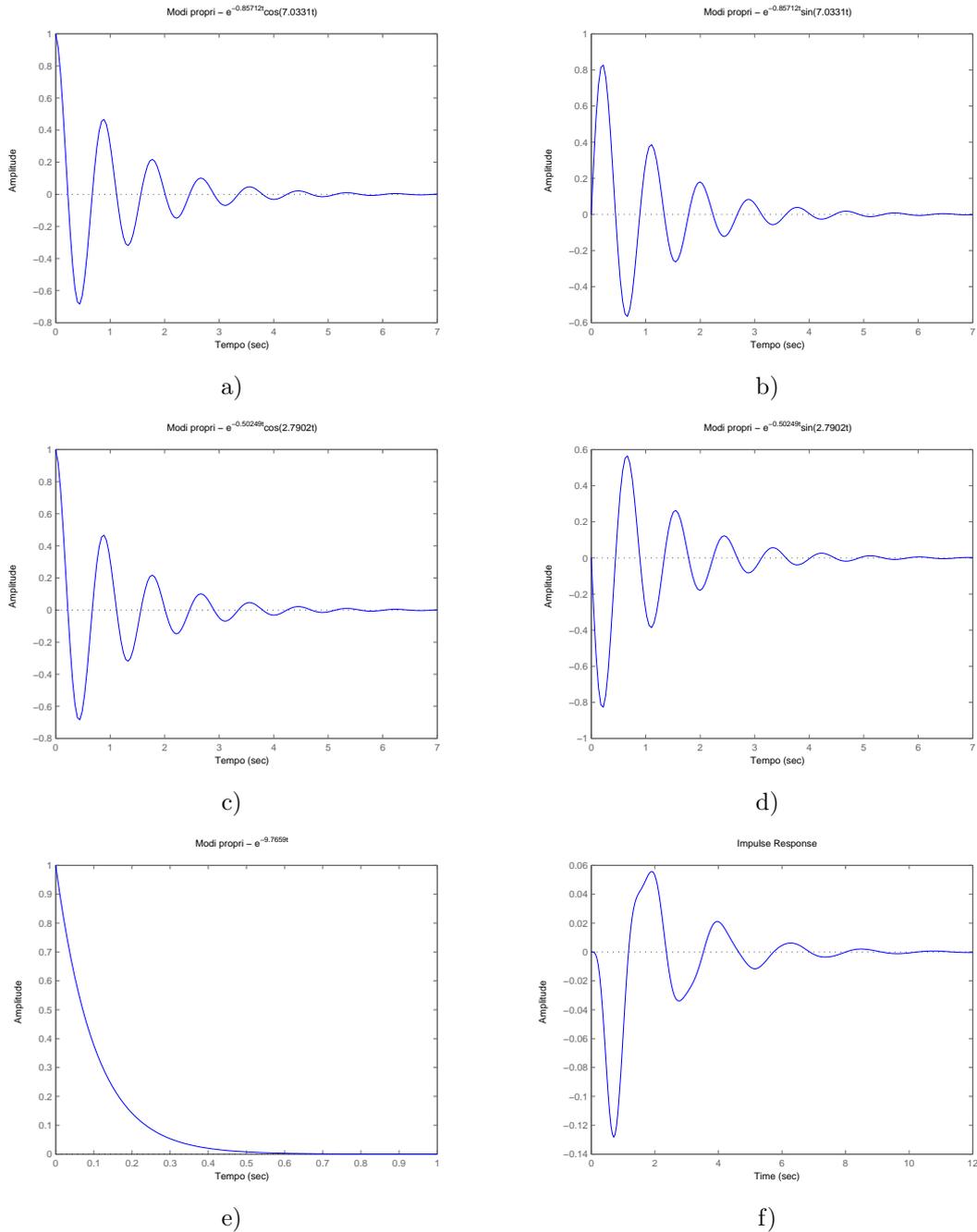


Figure 2: Modi propri del sistema: modi oscillanti e smorzati (a,b,c,d) e modo esponenziale negativo (e), ottenuti con il comando `initial` di Matlab. La risposta impulsiva della funzione di trasferimento  $G(s)$  è riportata in (f), ottenuta con il comando `impulse` di Matlab.

Nella seconda parte della specifica, è richiesto un tempo di assestamento al 2% del valore di regime, pari a 0.05s, senza alcuna specifica sulla sovraelongazione. Tentiamo di esaudire le specifiche sul tempo di assestamento progettando un controllore che permetta di approssimare il sistema in anello chiuso con un modello ad un polo dominante, cioè un sistema del primo ordine, rispetto al quale, il legame tra banda passante e tempo di assestamento è

$$\omega_T = \frac{4}{T_a} \Rightarrow \omega_T \geq 80 \text{ rad/s}$$

Il diagramma di Bode con i vincoli sulla pulsazione di taglio  $\omega_T$  sono riportati in figura 4.

**d2)** supponendo che il sistema controllato a ciclo chiuso sia asintoticamente stabile (attraverso l'azione esercitata dal controllore  $C(s)$ ) è possibile applicare il teorema della risposta armonica.

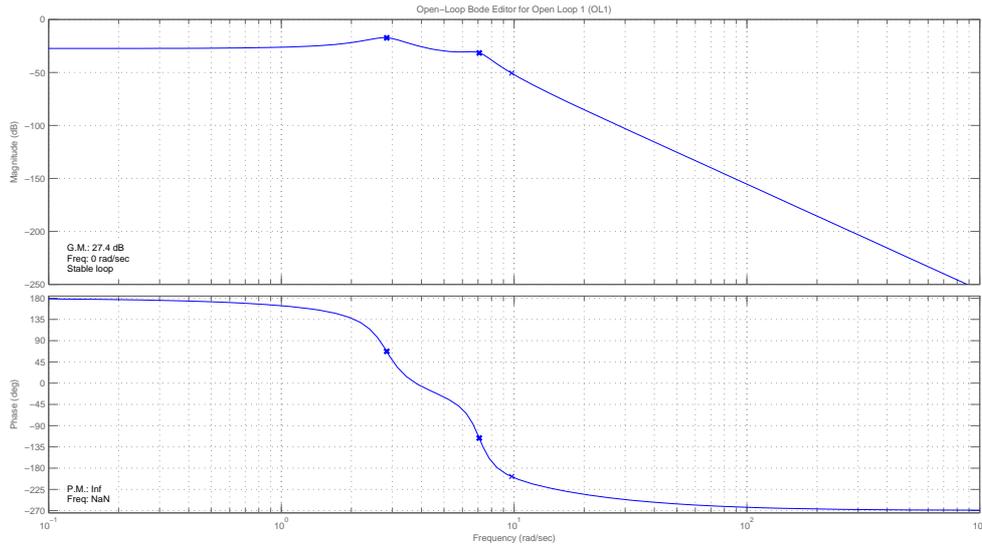


Figure 3: Diagramma di Bode della f.d.t.  $G(s)$ .

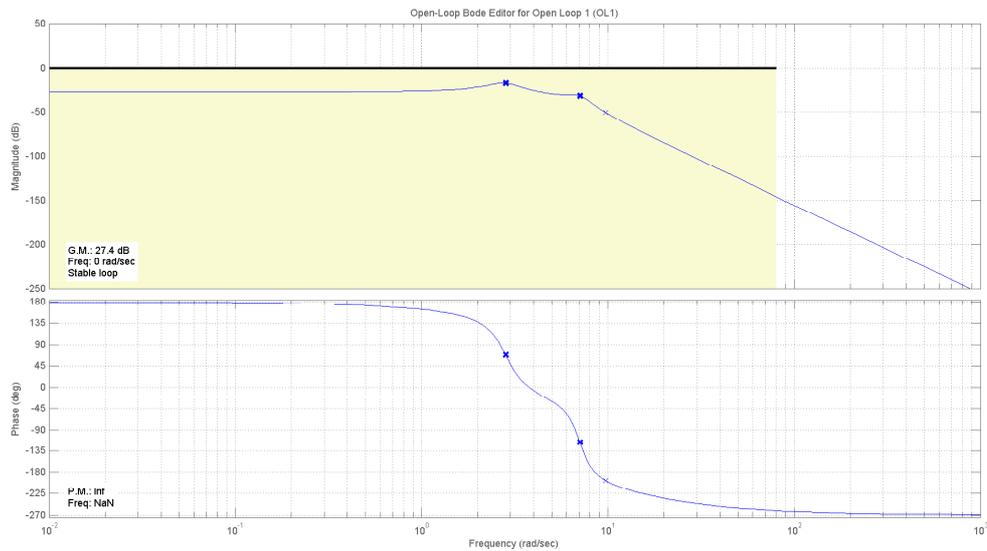


Figure 4: Diagramma di Bode della f.d.t.  $G(s)$  con specifica sulla banda passante.

La funzione di trasferimento tra il disturbo di attuazione e l'uscita  $\theta$  del sistema è data da

$$Y(i\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + C(j\omega)G(j\omega)} D_v(j\omega) = \overline{G}(j\omega) D_v(j\omega).$$

Applicando, quindi, il teorema della risposta armonica

$$y(t) = |\overline{G}(j\omega)| A_v \sin(\omega_v t + \angle \overline{G}(j\omega)),$$

questa specifica è equivalente a richiedere che, per pulsazioni  $\omega < 2$  rad/s, si abbia  $|y(t)| < 0.001$  rad. Facendo riferimento al caso peggiore, si consideri la valutazione cautelativa  $|\sin(\omega_v t + \angle \overline{G}(j\omega))| = 1$  e, dal diagramma di Bode di  $G$  (fig. 3) si prenda l'amplificazione massima nel range frequenziale considerato (pari al guadagno statico di  $G$  equivalente a  $0.0428 \rightarrow -27.37$  db, rilevabile sui diagrammi di Bode o calcolabile esplicitamente imponendo  $s = 0$  nella f.d.t. di  $G(s)$ ). In questo caso la specifica richiede,

$$\left| \frac{1.9G(j\omega)}{1 + C(i\omega)G(j\omega)} \right| < -60 \text{ db}.$$

Approssimando la  $G(j\omega)$  a numeratore della relazione a primo membro con il valore che essa assume nel range di frequenziale considerato, cioè con il suo guadagno statico, otteniamo

$$\left| \frac{1.9 \cdot 0.0428}{1 + C(i\omega)G(j\omega)} \right| < -60 \text{ db.}$$

Perciò, per basse frequenze si cerca un guadagno elevato di  $C(s)G(s)$  e quindi un controllore  $C(s)$  tale per cui  $\left| \frac{C(s)G(s)}{0.0813} \right|_{\text{db}} > 60 \text{ db}$ , o, equivalentemente

$$|C(s)G(s)| > 38 \text{ db,}$$

per pulsazioni inferiori a 2 rad/s. Il vincolo relativo a questa specifica è riportato esplicitamente nella fig. 5.

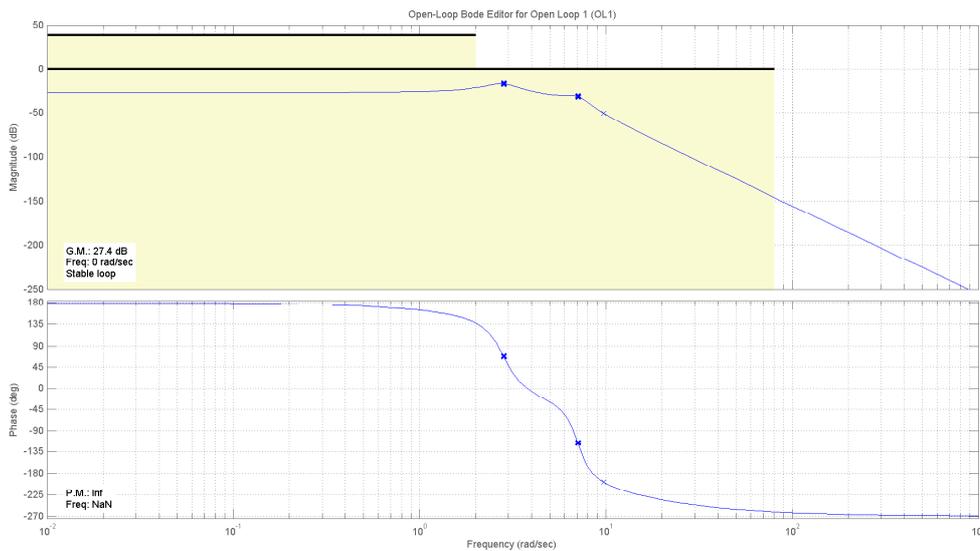


Figure 5: Diagramma di Bode della f.d.t.  $G(s)$  con specifica sulla banda passante e disturbo di attuazione.

**d3** Il terzo quesito si riferisce ad un disturbo di misura. Sia quindi  $\nu$  il disturbo sul sensore di posizione e si indichi con

$$\Omega(s) = -\frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}\nu(s),$$

la f.d.t. tra il disturbo di misura e l'uscita del sistema. Nella specifica analizzata in questo punto si richiede un basso guadagno della funzione d'anello  $C(s)G(s)$  per pulsazioni superiori a circa  $3 \cdot 10^3$  rad/s in modo che l'effetto sull'uscita sia inferiore a  $3 \cdot 10^{-4}$  rad quando il disturbo di misura è al suo massimo valore di 0.01 rad. Questo si traduce, applicando il teorema della risposta armonica, in una richiesta di attenuazione del disturbo pari a 0.03, ossia

$$|C(s)G(s)| \geq -30 \text{ db,}$$

per pulsazioni maggiori o uguali a  $3 \cdot 10^3$  rad/s. Le limitazioni relative a questa specifica sono riportate in figura 6

Una possibile soluzione per il controllore  $C(s)$  è la seguente

$$C(s) = -188182041603379 \frac{(s^2 + 1.005s + 41.95)(s^2 + 1.739s + 52.16)}{(s + 3000)^4}.$$

Il diagramma di Bode della funzione di trasferimento in anello aperto è riportato in fig. 7. Si noti che il controllore presenta un guadagno abbastanza elevato necessario per rispettare la specifica sull'errore a regime ma soprattutto quella sul disturbo in bassa frequenza che si presenta più restrittiva della precedente. Il valore negativo di questo parametro è dovuto alla presenza di un guadagno

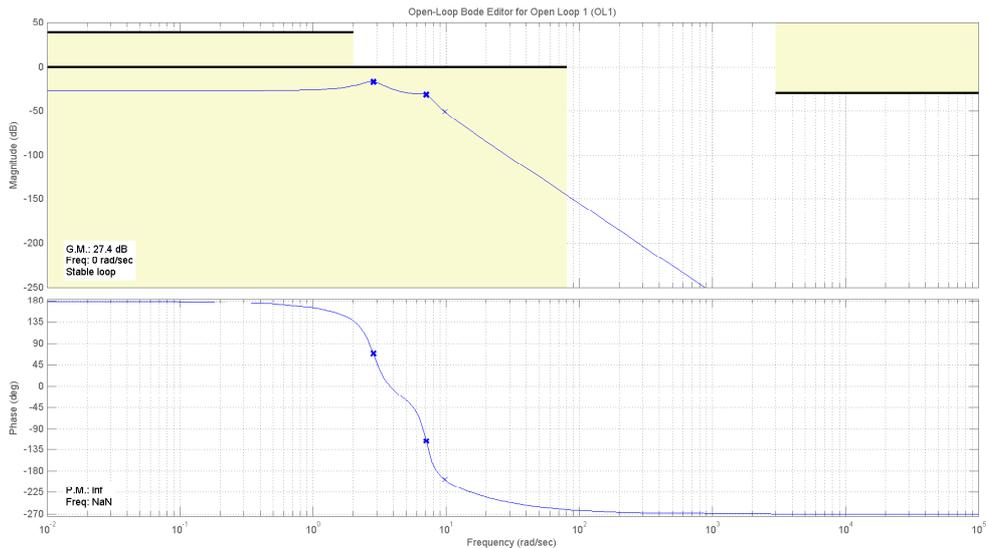


Figure 6: Diagramma di Bode della f.d.t.  $G(s)$  con specifica sulla banda passante, disturbo di attuazione e di misura.

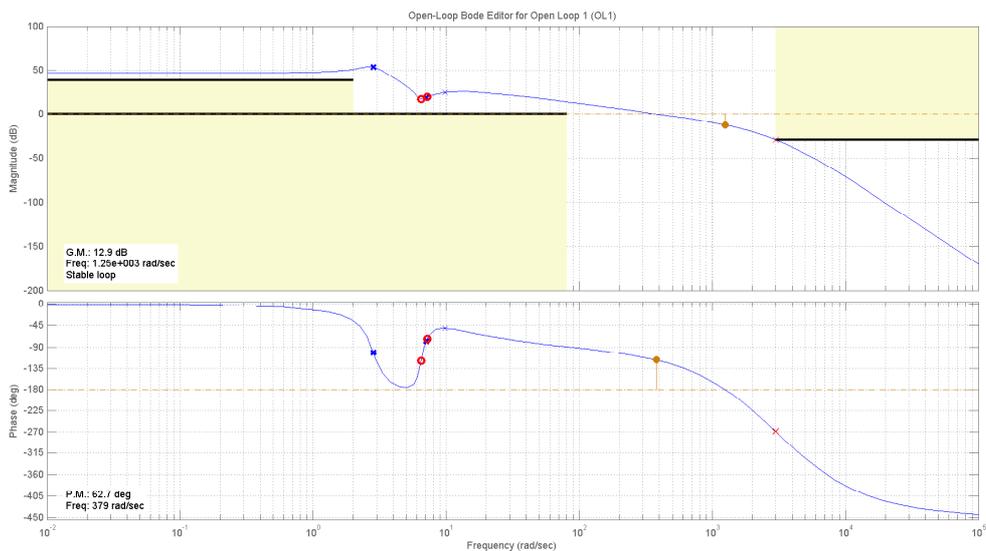


Figure 7: Diagramma di Bode risultante dal progetto della f.d.t. d'anello  $C(s)G(s)$ .

negativo anche della f.d.t.  $G$ . La doppia coppia, non coincidente, di zeri complessi coniugati in prossimità del doppio polo del sistema a pulsazione maggiore permette di ottenere un attraversamento del diagramma di Bode della f.d.t. in anello aperto con pendenza pari a  $-20$  db/dec e, allo stesso tempo, confinare l'intero luogo delle radici nel semipiano sinistro. La specifica sulla banda passante sarebbe già ampiamente verificata tuttavia è necessario l'inserimento anche di quattro poli reali in alta frequenza per due motivi principali: il primo è legato alla necessità di rendere causale il controllore; il secondo è invece legato alla specifica sul disturbo di misura in alta frequenza. La presenza dei quattro poli in alta frequenza permette infatti di abbassare il diagramma del modulo in corrispondenza delle frequenze caratterizzanti il disturbo. In fig. 8 è riportato il diagramma di Bode del sistema controllato. Come si può notare dalla fig. 9, dove è riportata la risposta al gradino del sistema controllato, il tentativo di ottenere un sistema a ciclo chiuso del primo ordine non è stato possibile: la risposta è, infatti, al più quella tipica di un sistema del secondo ordine. Tuttavia, la risposta presenta un tempo di assestamento inferiore a quello desiderato.

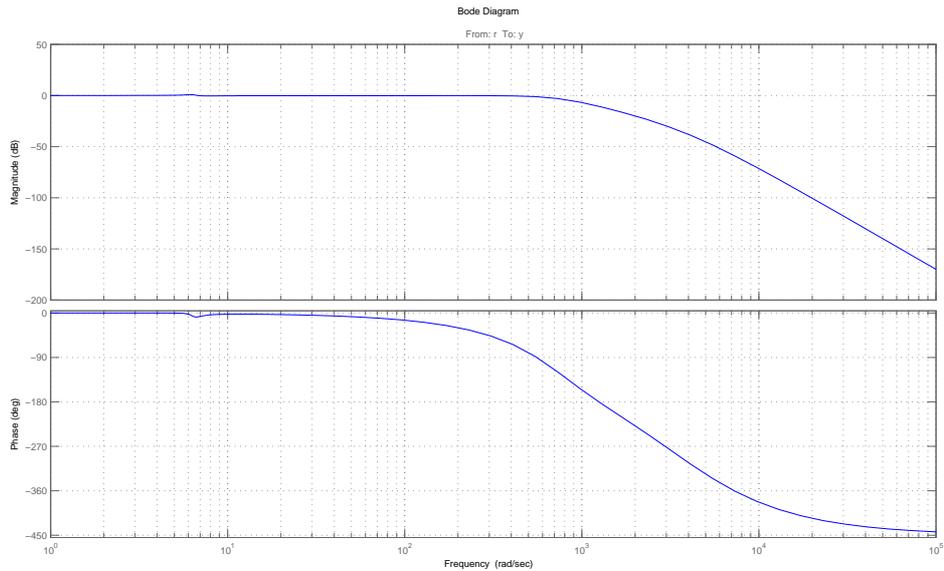


Figure 8: Diagramma di Bode del sistema controllato.

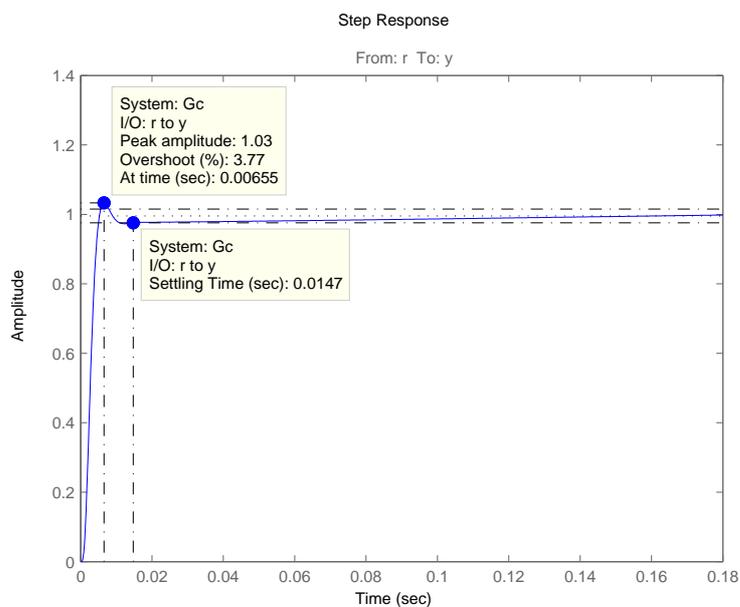
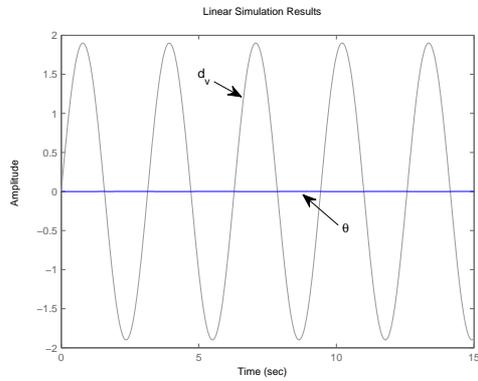


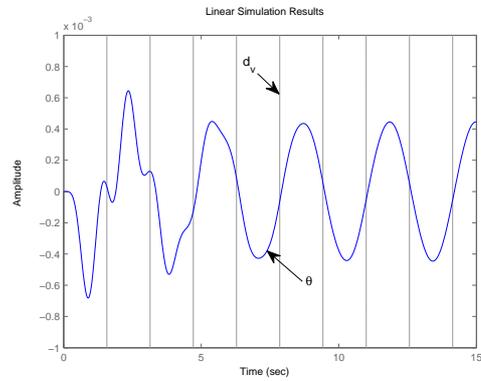
Figure 9: Risposta al gradino del sistema controllato.

Nella fig. 10 è inoltre riportata la risposta del sistema controllato nel caso in cui, come da specifica, l'errore sulla tensione sia di tipo sinusoidale con pulsazione inferiore o uguale a  $\omega = 2$  rad/s. Il grafico può essere ottenuto da Matlab utilizzando il comando `lsim` ed impostando un ingresso sinusoidale di pulsazione desiderata ed ampiezza 1.9 V. Il sistema al quale l'ingresso è applicato ha come funzione di trasferimento  $G(s)/(1 + C(s)G(s))$ .

Nella fig. 11 è invece riportata la risposta del sistema controllato nel caso in cui, come da specifica, l'errore sulla misura dell'uscita sia di tipo sinusoidale con pulsazione maggiore o uguale a  $\omega = 3 \cdot 10^3$  rad/s. Il grafico può essere ottenuto da Matlab utilizzando il comando `lsim` ed impostando un ingresso sinusoidale di pulsazione desiderata ed ampiezza 0.01 rad. Il sistema al quale l'ingresso è applicato ha come funzione di trasferimento  $C(s)G(s)/(1 + C(s)G(s))$ .

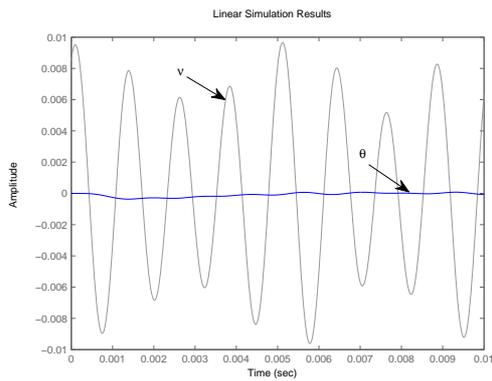


a)

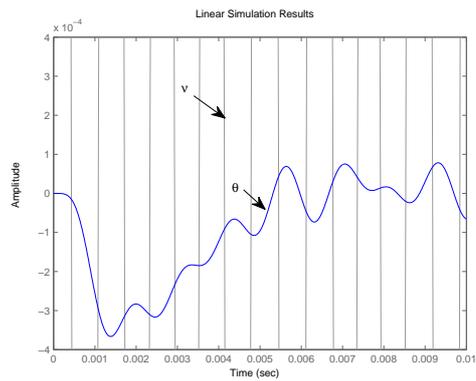


b)

Figure 10: Risposta del sistema controllato ad un segnale sinusoidale  $1.9 \sin(2t)$  applicato come disturbo di attuazione (a) e relativo zoom (b).



a)



b)

Figure 11: Risposta del sistema controllato ad un segnale sinusoidale applicato come disturbo di misura (a) e relativo zoom (b).