

Si consideri il modello dinamico di un servomeccanismo di un disco rigido o hard disk (HD) (figura 1).

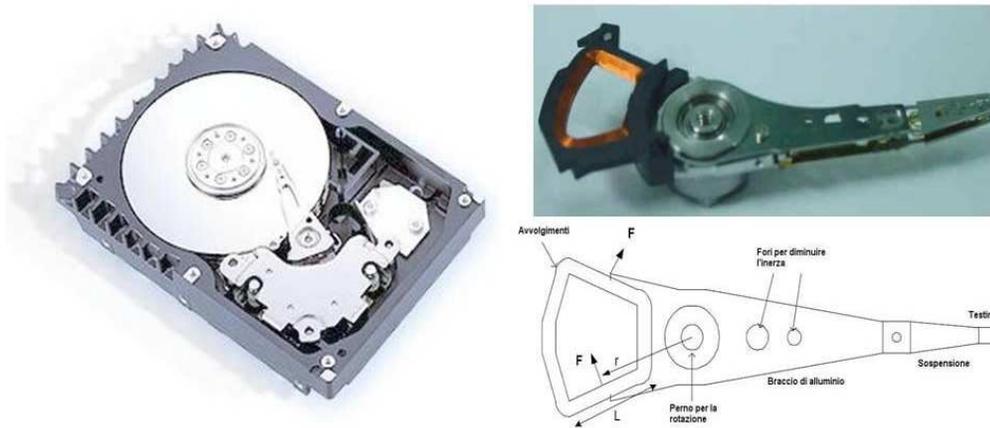


Figure 1: A sinistra: Hard Disk; A destra: particolare della testina di lettura/scrittura.

Un HD è costituito fondamentalmente da uno o più dischi in alluminio o vetro, rivestiti di materiale ferromagnetico sui quali vengono letti o scritti i dati. Quest'ultima operazione viene eseguita dalle testine (due per ogni disco), le quali, durante il funzionamento "volano" alla distanza di poche decine di nanometri dalla superficie del disco grazie all'aria mossa dalla rotazione del disco stesso che può raggiungere anche i 15000 giri al minuto. Le testine di lettura/scrittura si trovano all'estremità di un braccio mobile mosso da un motore VCM (Voice Coil Motor). Un avvolgimento di resistenza R e induttanza L , sulla base del braccio, produce, se percorso da una corrente i , un campo magnetico che interagendo con dei magneti fissi, genera la forza che sposta il braccio. La rotazione delle spire del circuito nel campo generato dai magneti permanenti provoca una tensione contro-elettromotrice $v_e = K_{fem}\dot{\theta}$. Indicando con v_s la tensione di alimentazione, la dinamica delle variabili elettriche è descritta dalla equazione differenziale

$$L \frac{di}{dt} + Ri + v_e = v_s$$

Il moto del braccio è determinato dalla equazione dinamica di equilibrio tra la coppia motrice $\tau_m = K_i i$, la coppia resistente $\tau_r = C\omega$ ($\omega = d\theta/dt$) dovuta ai cuscinetti che compongono lo snodo sul perno attorno al quale ruota il braccio e la coppia d'inerzia proporzionale all'accelerazione angolare secondo un fattore J (momento d'inerzia). Quindi, tenendo conto del fatto che il braccio viene collegato all'elettronica attraverso un cavo flessibile che agisce da molla di costante K_e , si ottiene l'equazione differenziale

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + K_e\theta = \tau_m - \tau_r$$

- A** Supponendo che il sistema sia controllato dalla tensione v_s e che la variabile di controllo sia la posizione angolare θ della testina, si determini il regime di equilibrio, in forma simbolica, corrispondente al punto di lavoro desiderato $\theta = \bar{\theta}$ costante;
- B** Supponendo di disporre della misura della posizione angolare θ della testina e di poter controllare la tensione di alimentazione v_s del motore, si determini una rappresentazione del sistema in forma di stato, in forma simbolica, intorno all'equilibrio corrispondente a $\bar{\theta}$;
- C** Si determini, in forma simbolica, la funzione di trasferimento tra l'ingresso v_s e l'uscita θ e se ne discuta la stabilità nel caso reale in cui tutte le grandezze fisiche che compaiono sono positive.

Si considerino i seguenti valori numerici: $R = 10 \Omega$, $L = 5 \text{ mH}$, $K_{fem} = 10^{-4} \text{ V} \cdot \text{s/rad}$, $J = 5 \cdot 10^{-5} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2/\text{rad}$, $C = 0.05 \text{ V} \cdot \text{m} \cdot \text{s/rad}$, $K_i = 3000 \text{ N} \cdot \text{m/A}$, $K_e = 400 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$. Si scelga V_s in maniera tale che la posizione angolare di equilibrio sia $\bar{\theta} = \pi/4$.

- D** Si tracci l'andamento qualitativo dei modi associati al sistema, specificandone i parametri di interesse.

E Si determini una legge di controllo per la tensione v_s di alimentazione del motore che agisca in modo da garantire le seguenti specifiche:

- e1)** a partire da condizioni iniziali nulle, la posizione angolare θ della testina deve raggiungere esattamente il valore di equilibrio $\bar{\theta}$, senza mai eccedere il valore $\hat{\theta} = 1.1\bar{\theta}$ e restando confinato nella fascia $0.98\bar{\theta} \leq \theta \leq 1.02\bar{\theta}$ entro un tempo non superiore a 5 ms ;
- e2)** ipotizzando che sulla tensione V_s utilizzata come ingresso di controllo, agisca un disturbo additivo a bassa frequenza del tipo $d_v(t) = A_v \sin(\omega_v t)$ V, con $\omega_v \leq 314\text{ rad/s}$ e $A_v = 85\text{ mV}$, si deve garantire che l'effetto sull'uscita θ sia inferiore a $\pm 0.02\text{ rad}$;

Si riporti esplicitamente il controllore ottenuto ed il diagramma di Bode del guadagno di anello con le relative specifiche da rispettare.

Domande opzionali:

- F** Tutti gli hard disk sono equipaggiati con un sistema di sospensioni che si interpongono fra il braccio e la testina di lettura/scrittura. Sperimentalmente è possibile osservare che tale dispositivo introduce variazioni nei parametri J e K_e rispettivamente nei seguenti intervalli: $3 \cdot 10^{-5} \leq J \leq 5 \cdot 10^{-5}$ e $360 \leq K_e \leq 400$. Stabilire se il controllore progettato precedentemente è ancora in grado di rendere almeno asintoticamente stabile il sistema per tutti i valori assunti dalle due variabili nei range specificati.
- G** Tra tutti i parametri che compaiono nel modello del sistema, la costante elastica K_e è quella che potrebbe essere soggetta a maggiore variazione rispetto al valore stimato. Determinare quale è il massimo range di variazione senza pregiudicare la asintotica stabilità del sistema controllato (*suggerimento*: si calcoli il polinomio caratteristico $P_{cl}(s)$ della f.d.t. in anello chiuso funzione di K_e , e lo si riscriva nella forma $1 + K_e \hat{G}$ dove \hat{G} è una opportuna funzione di trasferimento di un sistema dinamico fittizio, mentre K_e può essere visto come un controllore puramente proporzionale).

Soluzione

A Il sistema è descritto da tre variabili di stato θ , $\dot{\theta}$ e i . Essendo l'equilibrio caratterizzato dalla posizione angolare θ della testina costante e pari al valore $\bar{\theta}$ generico, si ricava che $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$. Sostituendo tali valori nelle equazioni dinamiche, si ottiene un sistema di due equazioni in due incognite, la tensione di alimentazione dell'avvolgimento del motore e la corrente che in esso scorre, che forniscono i valori a regime

$$\bar{I} = \frac{K_e \bar{\theta}}{K_i}$$

$$\bar{V}_s = R \frac{K_e \bar{\theta}}{K_i}.$$

B Indicando con $x = [x_1, x_2, x_3]^T = [\theta, \dot{\theta}, i]^T$ le variabili di stato del sistema non traslato e con $u = V_s$ l'ingresso non traslato, si ottiene il seguente sistema in forma di stato

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{K_e}{J} x_1 - \frac{C}{J} x_2 + \frac{K_i}{J} x_3 \\ \dot{x}_3 = -\frac{K_{fem}}{L} x_2 - \frac{R}{L} x_3 + \frac{u}{L} \end{cases} \quad (1)$$

che in forma matriciale diviene

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{K_e}{J} & -\frac{C}{J} & \frac{K_i}{J} \\ 0 & -\frac{K_{fem}}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u$$

Infine, essendo l'uscita del sistema la posizione angolare x_1 della testina, si ottiene

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] x = Cx$$

Per ottenere il sistema traslato nel punto di equilibrio calcolato in precedenza, è sufficiente definire le variabili errore $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3]^T = [\theta - \bar{\theta}, \dot{\theta}, i - \bar{I}]^T = [x_1 - \bar{x}_1, x_2, x_3 - \bar{x}_3]^T$, $\tilde{u} = u - \bar{u} = V_s - \bar{V}_s$. In questo modo il sistema 1 avrà una rappresentazione di stato con equilibrio nell'origine per ingresso nullo, riportata di seguito

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = -\frac{K_e}{J}(\tilde{x}_1 + \bar{x}_1) - \frac{C}{J}\tilde{x}_2 + \frac{K_i}{J}(\tilde{x}_3 + \bar{x}_3) \\ \dot{\tilde{x}}_3 = -\frac{K_{fem}}{L}\tilde{x}_2 - \frac{R}{L}(\tilde{x}_3 + \bar{x}_3) + \frac{\tilde{u} + \bar{u}}{L} \end{cases} \quad (2)$$

dalla quale, notando che

$$\begin{cases} -\frac{K_e}{J}\bar{x}_1 - \frac{K_i}{J}\bar{x}_3 = 0 \\ -\frac{R}{L}\bar{x}_3 + \frac{\bar{u}}{L} = 0 \end{cases}$$

si ottiene la forma di stato desiderata che tiene conto dello scostamento dalle condizioni di equilibrio

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{K_e}{J} & -\frac{C}{J} & \frac{K_i}{J} \\ 0 & -\frac{K_{fem}}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \tilde{u} = A\tilde{x} + B\tilde{u} \\ y = [1 \quad 0 \quad 0] \tilde{x} = C\tilde{x} \end{cases}$$

C Il calcolo della funzione di trasferimento tra l'ingresso V_s e l'uscita θ del sistema può essere effettuato in due modi diversi; il primo richiede l'applicazione della seguente formula

$$\frac{\Theta(s)}{V_s(s)} = C(sI - A)^{-1} B,$$

mentre il secondo richiede l'applicazione della trasformata di Laplace al sistema dinamico, costituito dalle sue equazioni differenziali, e procedere poi per sostituzione. Indipendentemente dalla strada percorsa, si ottiene

$$\frac{\Theta(s)}{V_s(s)} = \frac{K_i}{JLs^3 + (JR + LC)s^2 + (RC + K_eL + K_iK_{fem})s + K_eR}$$

L'analisi di stabilità può essere fatta attraverso il criterio di Routh-Hurwitz applicato al polinomio a denominatore della f.d.t.. Infatti, il fatto che i coefficienti del polinomio a denominatore sono tutti positivi è condizione solo necessaria ma non sufficiente; in altre parole, il criterio di Descartes valido per polinomi di secondo grado non può essere esteso anche a quelli di ordine superiore. Il criterio di Routh-Hurwitz invece fornisce una condizione necessaria e sufficiente. A tal proposito, costruiamo la tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|c} JL & RC + K_eL + K_iK_{fem} \\ JR + LC & K_eR \\ h_1 & \\ k_1 & \end{array}$$

dove i valori di h_1 e k_1 sono

$$\begin{aligned} h_1 &= -\frac{1}{JR + LC} \det \left(\begin{bmatrix} JL & RC + K_eL + K_iK_{fem} \\ JR + LC & K_eR \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{JR + LC} [(JR + LC)(RC + K_iK_{fem}) + L^2K_eC] > 0 \\ k_1 &= K_eR > 0. \end{aligned}$$

Si può allora concludere che, non essendoci variazioni di segno negli elementi della prima colonna della tabella di Routh, tutte le radici del polinomio a denominatore della funzione di trasferimento sono a parte reale negativa e che il sistema risulta essere asintoticamente stabile. Questa conclusione è conseguenza del fatto che le grandezze fisiche caratterizzanti il sistema sono positive.

D Sostituendo i valori numerici dati, la funzione di trasferimento diviene complessivamente

$$G(s) = \frac{1.2 \cdot 10^{10}}{s^3 + 3000s^2 + 1.12 \cdot 10^7s + 1.6 \cdot 10^{10}}$$

La funzione di trasferimento presenta due radici complesse e coniugate a parte reale negativa: $\lambda_{1,2} \approx -613.5 \pm j 2940.8 = \sigma \pm j\omega$, le quali generano modi oscillanti con pulsazione naturale $\omega_n = 3 \cdot 10^3$ rad/s e smorzamento $\delta = 0,2$ (figura 2-a,b), e una radice reale negativa $\lambda_3 \approx -1773$, che genera un modo esponenziale decrescente (figura 2-c). In figura 2-d è riportata anche la risposta impulsiva della funzione di trasferimento $G(s)$.

E Come visto, il sistema risulta asintoticamente stabile per qualunque scelta dei parametri fisici. Pertanto il progetto di un controllore che permetta al sistema complessivo di rispettare le specifiche può essere affrontato direttamente sui diagrammi di Bode (la $G(s)$ è anche a fase minima). Facendo riferimento al progetto di un controllore del tipo

$$C(s) = \frac{k_c}{s^t} \hat{C}(s), \text{ con } \hat{C}(0) = 1,$$

iniziamo con la scelta del tipo t e della costante di guadagno k_c del controllore basandoci sulle specifiche statiche.

e1 la prima richiesta impone errore nullo a regime per l'inseguimento a segnali costanti $\theta(t) = \bar{\theta}$. Per l'analisi della specifica è necessario applicare il teorema del Valore Finale alla funzione errore di inseguimento

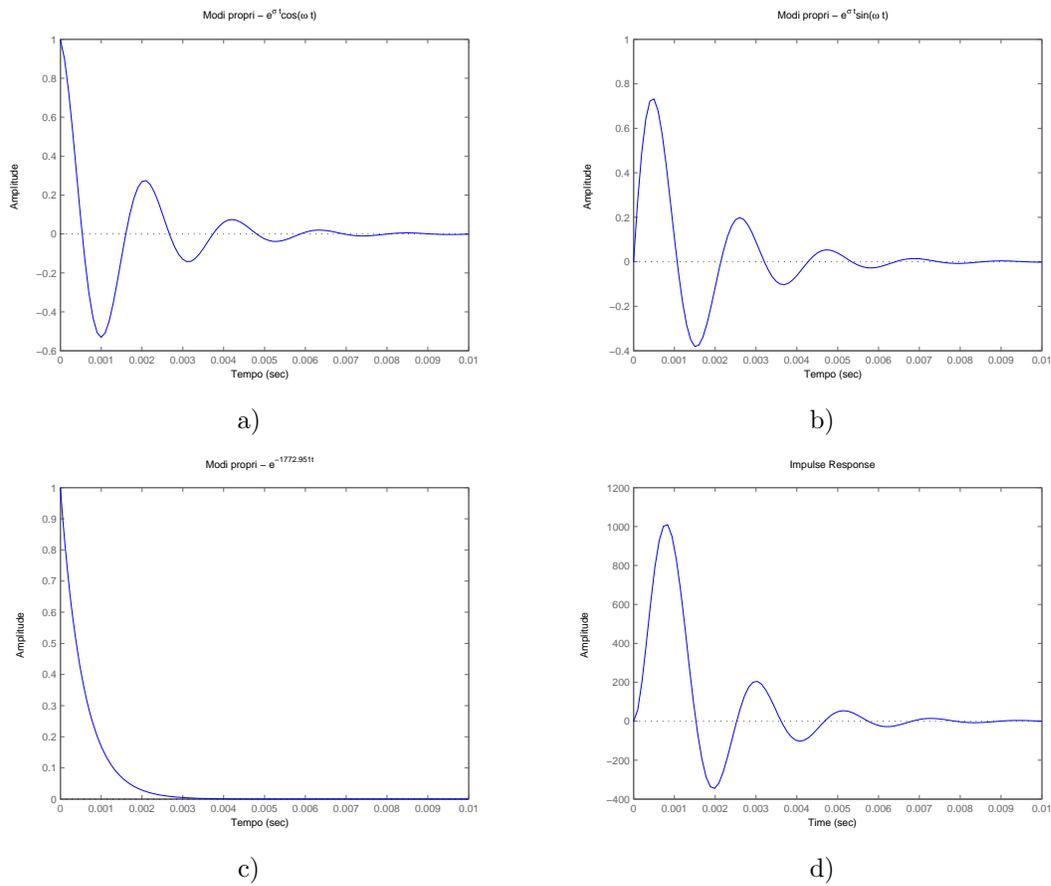


Figure 2: Modi propri del sistema: modi oscillanti e smorzati (a,b) e modo esponenziale negativo (c), ottenuti con il comando initial di Matlab. La risposta impulsiva della funzione di trasferimento $G(s)$ è riportata in (d), ottenuta con il comando impulse di Matlab.

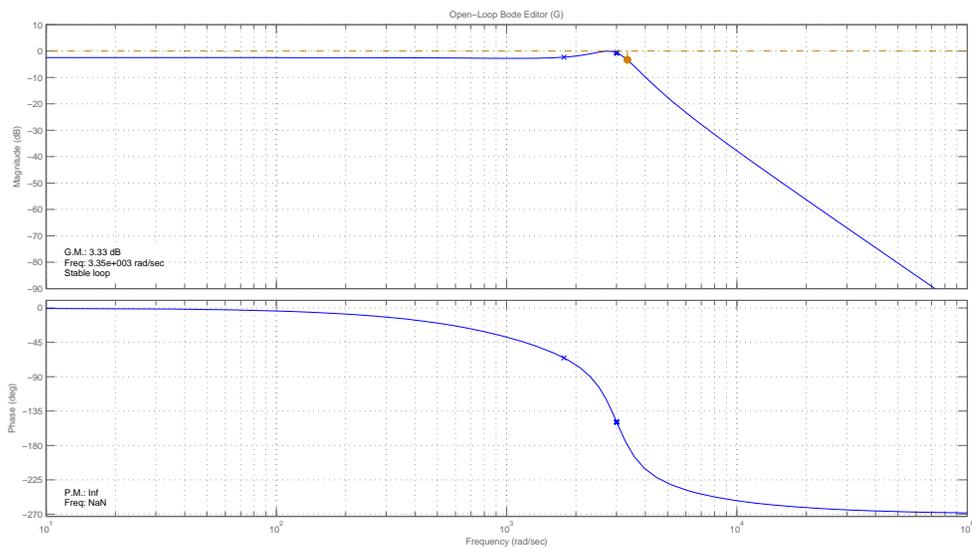


Figure 3: Diagramma di Bode della f.d.t. $G(s)$.

$$E(s) = R(s) - Y(s) \Rightarrow E(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)} R(s),$$

quindi nel caso di segnali a gradino,

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + C(s)G(s)} \frac{\bar{\theta}}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\bar{\theta}}{1 + C(s)G(s)}.$$

La soluzione prevede il piazzamento di un polo nell'origine nella f.d.t. del controllore ($t = 1$), lasciando il guadagno generico pari a k_c .

Nella seconda parte della specifica è richiesto un tempo di assestamento al 2% del valore di regime, pari a 0.005s, permettendo una sovraelongazione che al massimo sia pari al 10% del valore costante $\bar{\theta}$ assegnato. Tentiamo di esaudire le specifiche sul tempo di assestamento e sulla sovraelongazione percentuale $S\%$ progettando un controllore che permetta di approssimare il sistema in anello chiuso con un modello a due poli dominanti le cui caratteristiche frequenziali siano

$$S = \exp\left(-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\right) \Rightarrow \delta = 0.6 \Rightarrow M_\phi \approx 60 \text{ deg}$$

$$\omega_T = \frac{4}{\delta T_a} \Rightarrow \omega_T \approx 1333 \text{ rad/s}$$

Il diagramma di Bode con i vincoli sulla pulsazione di taglio ω_T sono riportati in figura 4.

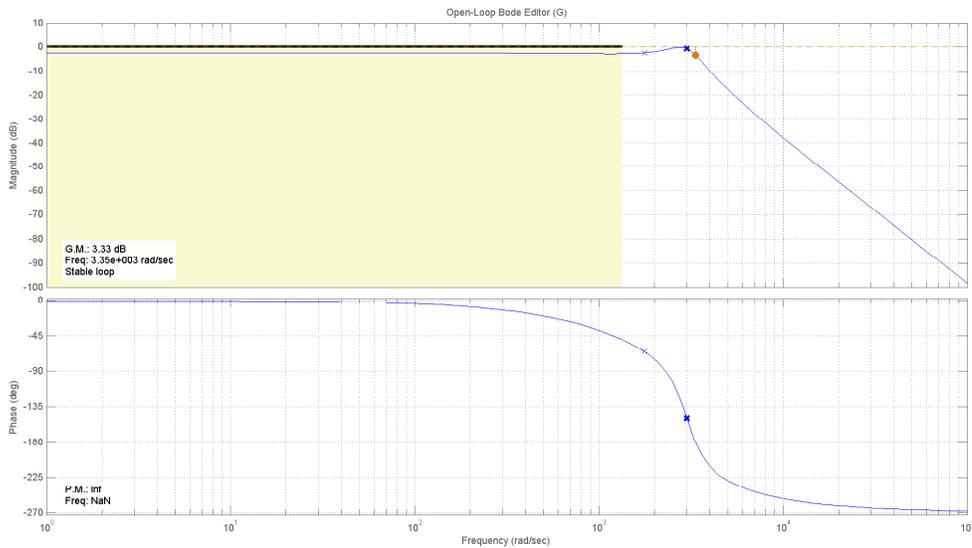


Figure 4: Diagramma di Bode della f.d.t. $G(s)$ con specifica sulla banda passante.

- e2) supponendo che il sistema controllato a ciclo chiuso sia asintoticamente stabile (attraverso l'azione esercitata dal controllore $C(s)$) è possibile applicare il teorema della risposta armonica. La funzione di trasferimento tra il disturbo di attuazione e l'uscita θ del sistema è data da

$$Y(i\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + C(j\omega)G(j\omega)} D_v(j\omega) = \bar{G}(j\omega) D_v(j\omega).$$

Applicando, quindi, il teorema della risposta armonica

$$y(t) = |\bar{G}(j\omega)| A_v \sin(\omega_v t + \angle \bar{G}(j\omega)),$$

questa specifica è equivalente a richiedere che, per pulsazioni $\omega < 314 \text{ rad/s}$, si abbia $|y(t)| < 0.02 \text{ rad}$. Facendo riferimento al caso peggiore, si consideri la valutazione cautelativa $|\sin(\omega_v t + \angle \bar{G}(j\omega))| < 1$ e, dal diagramma di Bode di G (fig. 3) si prenda l'amplificazione massima nel range frequenziale considerato (pari al guadagno statico di G equivalente a $0.75 = -2.5 \text{ db}$, rilevabile sui diagrammi di Bode o calcolabile esplicitamente imponendo $s = 0$ nella f.d.t. di $G(s)$). In questo caso la specifica richiede

$$\left| \frac{0.085 G(j\omega)}{1 + C(i\omega)G(j\omega)} \right| < \left| \frac{0.085 \cdot 0.75}{1 + C(i\omega)G(j\omega)} \right| < -34 \text{ db}.$$

Perciò, per basse frequenze si cerca un guadagno elevato di $C(s)G(s)$ e quindi un controllore $C(s)$ tale per cui $\left| \frac{C(s)G(s)}{0.064} \right|_{\text{db}} > 34 \text{ db}$, o, equivalentemente

$$|C(s)G(s)| > 10 \text{ db},$$

per pulsazioni inferiori a 314 rad/s. Il vincolo relativo a questa specifica è riportato esplicitamente nella fig. 5 mentre in fig. 6 è riportato lo schema a blocchi completo di disturbo additivo in ingresso al sistema.

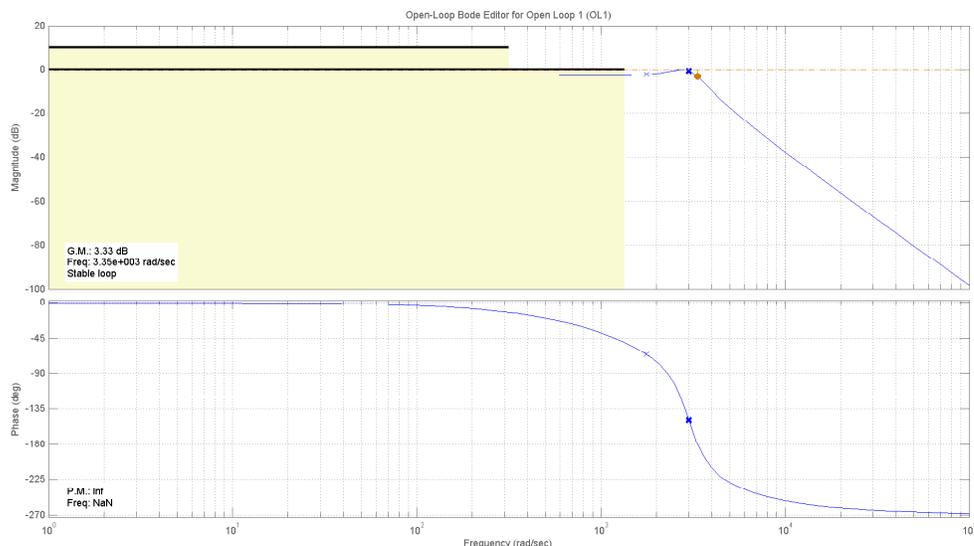


Figure 5: Diagramma di Bode della f.d.t. $G(s)$ con specifica sulla banda passante e disturbo di attuazione.

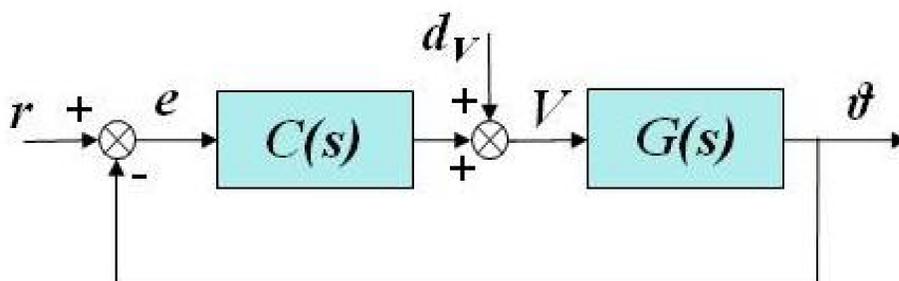


Figure 6: Schema a blocchi.

Una possibile soluzione per il controllore $C(s)$ in grado di rispettare tutte le specifiche proposte è la seguente

$$C(s) = 17.33 \frac{s^2 + 2417s + 9.494 \cdot 10^6}{s(s + 7.443 \cdot 10^4)}$$

per la quale il diagramma di Bode della funzione di trasferimento in anello aperto è riportato in fig. 7. Si noti che il controllore presenta un polo nell'origine (come richiesto per la specifica statica), una coppia di zeri complessi coniugati (necessari per dare un incremento di fase ed alzare il diagramma di Bode per la specifica sulla pulsazione di taglio e sul margine di fase) in prossimità del doppio polo del sistema ed infine un polo per ottenere la causalità del controllore ma a frequenze sufficientemente elevate da non alterare eccessivamente il diagramma nell'intorno della pulsazione di taglio. In fig. 8 è riportato il diagramma di Bode del sistema controllato. In fig. 9 è invece riportata la risposta ad un ingresso a gradino del sistema controllato.

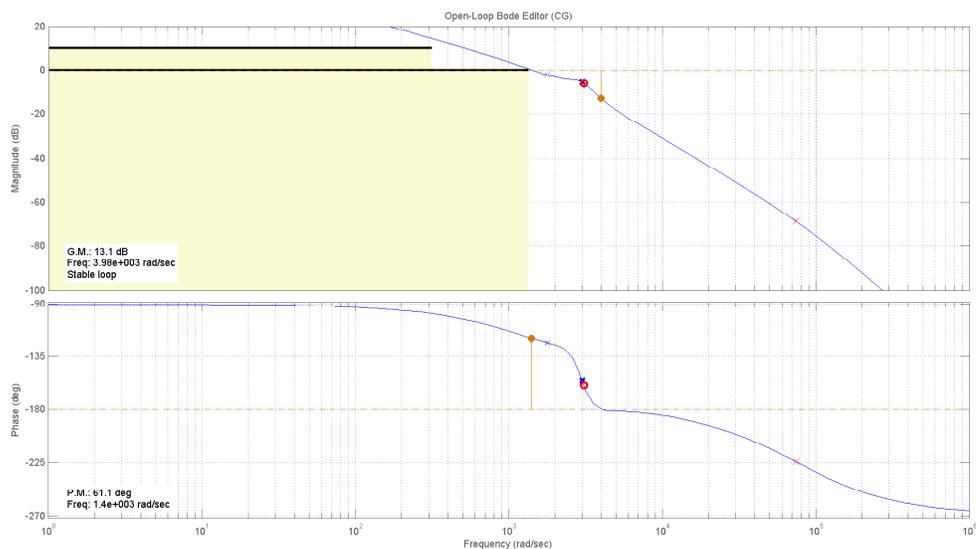


Figure 7: Diagramma di Bode risultante dal progetto della f.d.t. d'anello $C(s)G(s)$.

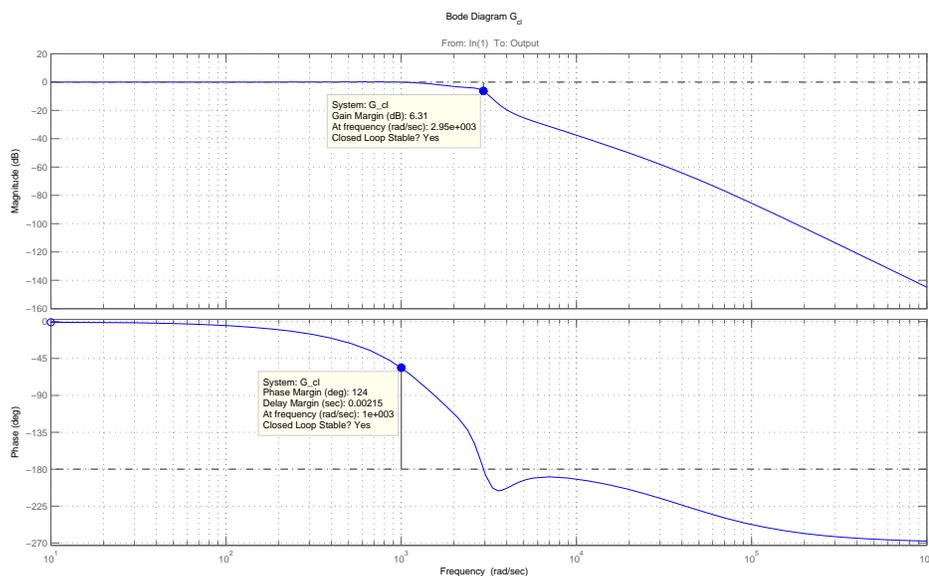


Figure 8: Diagramma di Bode del sistema controllato.

Nella fig. 10 è inoltre riportata la risposta del sistema controllato nel caso in cui, come da specifica, l'errore sulla coppia resistente sia di tipo sinusoidale con pulsazione $\omega = 314$ rad/s. Il grafico può essere ottenuto da Matlab utilizzando il comando `lsim` ed impostando un ingresso sinusoidale di pulsazione desiderata ed ampiezza 85 mV. Il sistema al quale l'ingresso è applicato ha come funzione di trasferimento $G(s)/(1 + C(s)G(s))$.

F Per valutare se la variazione dei parametri J e K_e nell'intervallo specificato mantiene asintoticamente stabile il sistema controllato, utilizzando il controllore trovato precedentemente, è necessario determinare per prima cosa il denominatore della funzione di trasferimento complessiva a ciclo chiuso in forma simbolica (funzione cioè solo di J e K_e), considerando un controllore del tipo

$$C(s) = k \frac{n_c}{d_c}$$

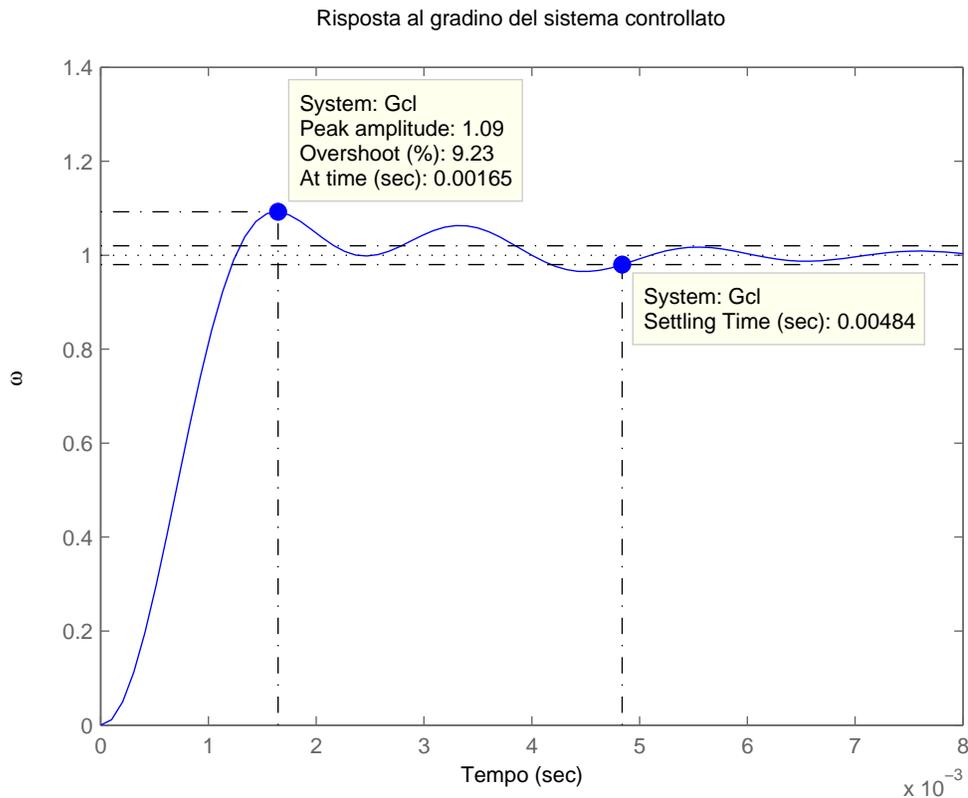


Figure 9: Risposta al gradino del sistema controllato.

dove n_c (d_c) rappresenta il numeratore (denominatore) della funzione di trasferimento e quindi

$$G_{cl} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{k \frac{n_c}{d_c} \frac{n_g}{d_g}}{1 + k \frac{n_c}{d_c} \frac{n_g}{d_g}} = \frac{kn_c n_g}{d_c d_g + kn_c n_g}$$

Lo studio della stabilità può essere così intrapreso considerando che

$$\begin{aligned} d_c d_g + kn_c n_g &= 20J s^5 + (1.53 \cdot 10^6 J + 1)s^4 + (2.98 \cdot 10^9 J + 20 K_e + 77630)s^3 + \\ &+ (1.53 \cdot 10^6 K_e + 4.46 \cdot 10^8)s^2 + (2.98 \cdot 10^9 K_e + 5.03 \cdot 10^{11})s + 1.97 \cdot 10^{15} = \\ &= \alpha_0 s^5 + \alpha_1 s^4 + \alpha_2 s^3 + \alpha_3 s^2 + \alpha_4 s + \alpha_5 \end{aligned}$$

Per valutare la stabilità del sistema a ciclo chiuso al variare dei parametri è possibile applicare il Criterio di Kharitonov, considerando i valori massimi e minimi di ciascun coefficiente

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha_0^{min} = 0.6 \cdot 10^{-3}; & \alpha_0^{max} = 10^{-3} \\ \alpha_1^{min} = 48.86; & \alpha_1^{max} = 77.43 \\ \alpha_2^{min} = 174146; & \alpha_2^{max} = 234490 \\ \alpha_3^{min} = 9.96 \cdot 10^8; & \alpha_3^{max} = 1.06 \cdot 10^9 \\ \alpha_4^{min} = 1.57 \cdot 10^{12}; & \alpha_4^{max} = 1.69 \cdot 10^{12} \\ \alpha_5^{min} = 1.97 \cdot 10^{15}; & \alpha_5^{max} = 1.97 \cdot 10^{15} \end{array} \right.$$

ed andando poi a studiare la stabilità dei quattro polinomi “angolari”

$$\left\{ \begin{array}{l} p_a(s) = 0.6 \cdot 10^{-3} s^5 + 46.86 s^4 + 234490 s^3 + 1.06 \cdot 10^9 s^2 + 1.57 \cdot 10^{12} s + 1.97 \cdot 10^{15} \\ p_b(s) = 10^{-3} s^5 + 77.43 s^4 + 174146 s^3 + 9.96 \cdot 10^8 s^2 + 1.69 \cdot 10^{12} s + 1.97 \cdot 10^{15} \\ p_c(s) = 10^{-3} s^5 + 46.86 s^4 + 174146 s^3 + 1.06 \cdot 10^9 s^2 + 1.69 \cdot 10^{12} s + 1.97 \cdot 10^{15} \\ p_d(s) = 0.6 \cdot 10^{-3} s^5 + 77.43 s^4 + 234490 s^3 + 9.96 \cdot 10^8 s^2 + 1.57 \cdot 10^{12} s + 1.97 \cdot 10^{15} \end{array} \right.$$

Le radici dei quattro polinomi riportati, indagando con il Criterio di Routh o calcolandole numericamente, sono tutte a parte reale negativa. Dunque, per il Criterio di Kharitonov, il

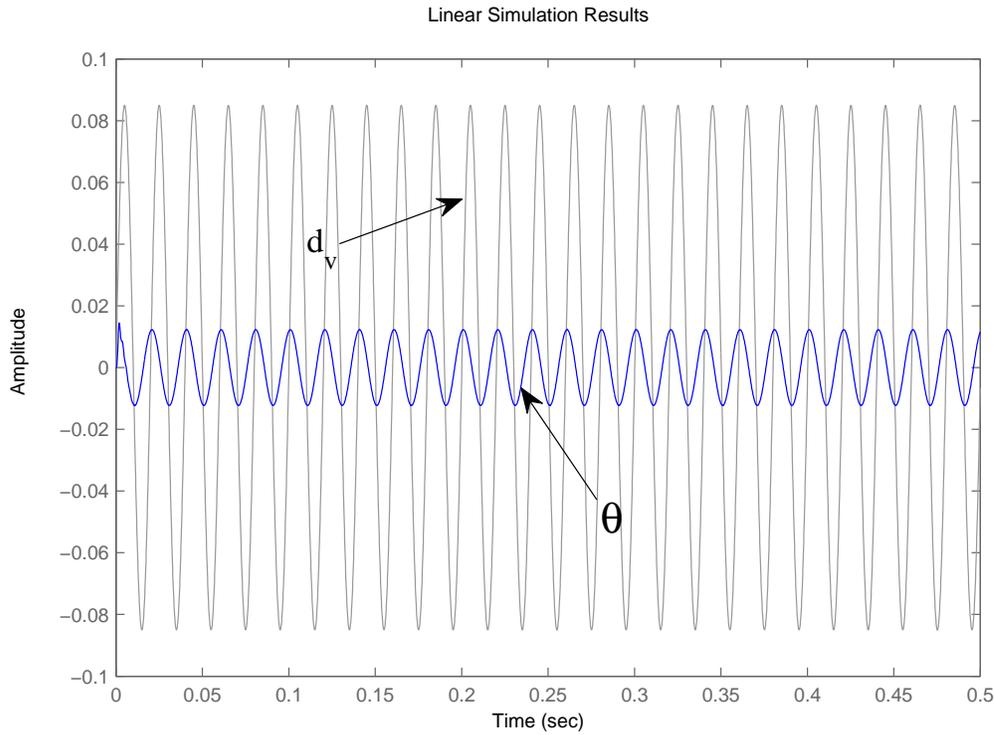


Figure 10: Risposta del sistema controllato ad un segnale sinusoidale $85 \cdot 10^{-3} \sin(314t)$ applicato come disturbo di attuazione.

sistema complessivo a ciclo chiuso risulta asintoticamente stabile per tutti i valori assunti negli intervalli sopra specificati.

G Il procedimento per la costruzione del luogo delle radici si può applicare anche quando invece di variare la costante di guadagno, si varia qualche altro parametro della funzione di trasferimento del sistema in anello aperto (sistema in serie ad un eventuale controllore). In questi casi il tracciato descritto nel piano complesso dalle radici dell'equazione caratteristica al variare del parametro si dice *contorno delle radici*. Per utilizzare questo utile strumento al fine di determinare il range di variazione del parametro K_e , è necessario prima di tutto determinare il polinomio a denominatore della funzione di trasferimento in anello chiuso (che sarà funzione di K_e), cioè

$$P_{cl} = 1 + G(s)C(s) = 0.1s^5 + 7644s^4 + (20K_e + 1.5 \cdot 10^7)s^3 + (1.53 \cdot 10^6 K_e + 4.46 \cdot 10^8)s^2 + (2.98 \cdot 10^9 K_e + 5.03 \cdot 10^{11})s + 1.97 \cdot 10^{15} = 0$$

e, raccogliendo i termini che moltiplicano K_e , si ottiene

$$(20s^3 + 1.53 \cdot 10^6 s^2 + 2.97 \cdot 10^9 s)K_e + (0.1s^5 + 7644s^4 + 1.5 \cdot 10^7 s^3 + 4.46 \cdot 10^8 s^2 + 5.03 \cdot 10^{11} s + 1.97 \cdot 10^{15}) = 0$$

ovvero, dividendo ambo i membri per il polinomio di quinto grado, si perviene alla forma finale

$$1 + K_e \hat{G}(s) = 0$$

dove

$$\hat{G}(s) = \frac{20s^3 + 1.5 \cdot 10^6 s^2 + 2.97 \cdot 10^9 s}{0.001s^5 + 73.43s^4 + 226490s^3 + 4.46 \cdot 10^8 s^2 + 5.03 \cdot 10^{11} s + 1.97 \cdot 10^{15}}$$

Alla funzione di trasferimento $\hat{G}(s)$ possono essere applicate tutte le regole valide per il tracciamento del luogo delle radici il quale fornisce la posizione dei poli della f.d.t. in anello chiuso al variare di K_e che, a sua volta, rispetto a $\hat{G}(s)$ gioca il ruolo del guadagno di anello.

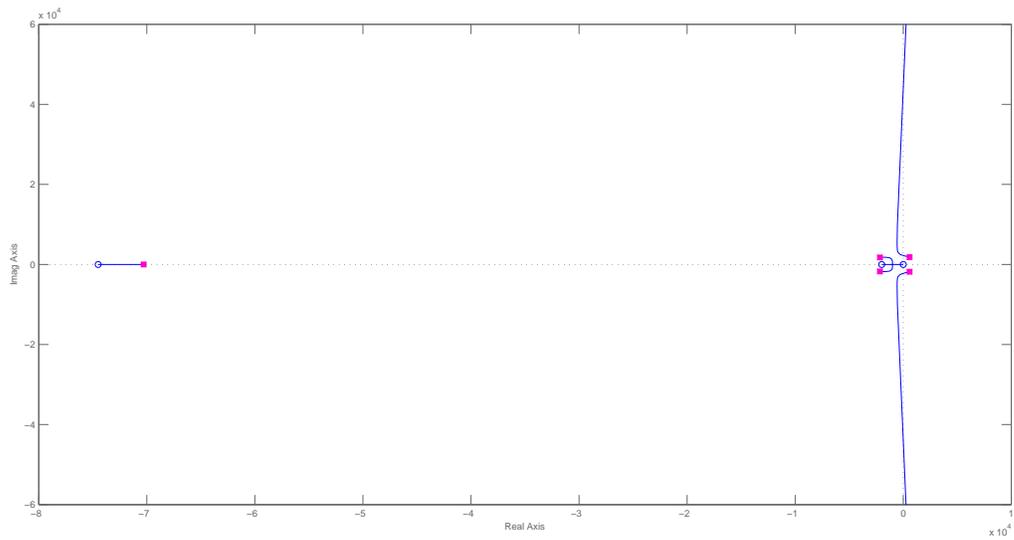


Figure 11: Luogo delle radici della funzione di trasferimento $\hat{G}(s)$.

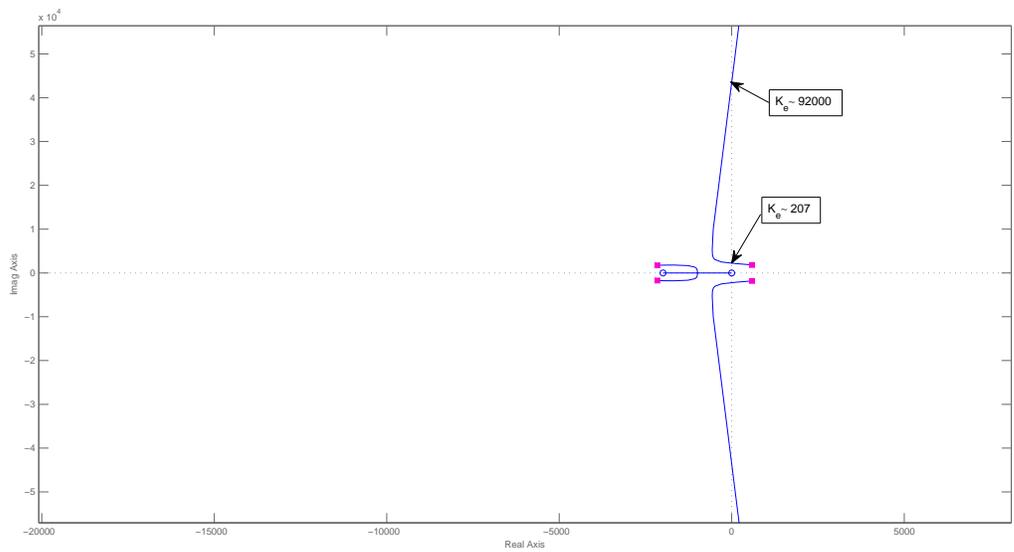


Figure 12: Zoom della zona di interesse del luogo delle radici di $\hat{G}(s)$ e i valori estremi di K_e .

Il luogo delle radici completo è rappresentato in fig. 11, mentre lo zoom della parte di interesse in fig. 12. È facile vedere, per ispezione diretta, che esiste un ben preciso range per il parametro K_e entro il quale il sistema chiuso in retroazione è asintoticamente stabile. L'intervallo in questione è approssimativamente $207 \leq K_e \leq 92000$, ricavabile utilizzando il comando rlocus di Matlab.