

Si consideri il modello dinamico di un attuatore elettromagnetico per le valvole di un motore automobilistico (figura 1).

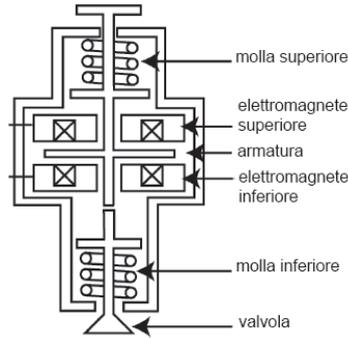


Figure 1: Modello dinamico di un attuatore elettromagnetico per le valvole di un motore automobilistico.

La valvola è azionata mediante una armatura mobile posta tra due elettromagneti. A riposo (elettromagneti spenti) la armatura è tenuta in una posizione equidistante dai due elettromagneti grazie alla azione di due molle identiche e antagoniste. Gli elettromagneti possono generare solo forze attrattive, pertanto il magnete superiore è impiegato per spostare la armatura al di sopra del punto mediano, mentre quello inferiore al di sotto. Riportiamo di seguito un modello che descrive la dinamica del sistema in esame nel caso in cui agisca solo l'elettromagnete inferiore:

$$\begin{cases} m\ddot{z} &= -\frac{\Phi^2}{2k_1} + k_s(L - z) - b\dot{z} \\ k_1\dot{\Phi} &= k_1V - r(k_2 + z)\Phi \end{cases}$$

dove $0 \leq z \leq 2L$ rappresenta la distanza della armatura rispetto all'elettromagnete inferiore, v la velocità della armatura, Φ il flusso magnetico dell'avvolgimento dell'elettromagnete inferiore, m la massa complessiva della armatura e della valvola, $\Phi^2/2k_1$ la forza esercitata dall'elettromagnete inferiore, k_s la costante elastica delle molle, L metà escursione dell'armatura, b il coefficiente di attrito viscoso, V la tensione di controllo dell'avvolgimento inferiore ed r la resistenza dell'avvolgimento. Infine, k_1 e k_2 sono costanti determinate sperimentalmente.

A Supponendo che il sistema sia controllato dalla tensione V e che la variabile di controllo sia la distanza z della armatura rispetto all'elettromagnete, si determini il regime di equilibrio corrispondente al punto di lavoro desiderato $z = \bar{z}$ con $\bar{z} = L/2$ e $\bar{\Phi} > 0$;

B Indicando con $\tilde{z} = z - \bar{z}$, $\dot{\tilde{z}} = \dot{z}$, $\tilde{\Phi} = \Phi - \bar{\Phi}$ e $\tilde{V} = V - \bar{V}$ le variazioni delle grandezze rispetto ai valori di equilibrio, si determini un modello approssimato lineare del sistema;

Si considerino i seguenti valore numerici: $m = 0.27$ Kg, $k_s = 158 \cdot 10^3$ N/m, $b = 7.53$ Kg/s, $k_1 = 29.92 \cdot 10^{-6}$ Nm²/A², $k_2 = 4 \cdot 10^{-5}$ m, $L = 4 \cdot 10^{-3}$ m e $r = 6$ Ω.

C Si discutano i modi propri del sistema e si determini un controllore proporzionale stabilizzante.

D Si determini una legge di controllo per la tensione \tilde{V} che, sulla base della misura di \tilde{z} , agisca in modo da garantire le seguenti specifiche:

- d1)** l'altezza \tilde{z} deve inseguire a regime un riferimento costante di 2 mm con errore nullo, portandosi e rimanendo al di sopra del valore di 1.9 mm in meno di 0.05 s e senza mai eccedere il valore di regime;
- d2)** ipotizzando che sulla tensione \tilde{V} utilizzata come ingresso di controllo, agisca un disturbo additivo a bassa frequenza del tipo $d_v(t) = 15 \cdot 10^{-2} \sin(\omega_v t)$ V, con $\omega_v \leq 10$ rad/s, si deve garantire che l'effetto sulla posizione \tilde{z} sia inferiore a 0.1 mm;
- d3)** supponendo di poter disporre di un sensore di posizione ottico, in grado di fornire misure accurate per pulsazioni $\omega_\nu < 2 \cdot 10^3$ rad/s ma che sia soggetto a rumore di misura di ampiezza non superiore a ± 0.1 mm oltre tale campo frequenziale, limitare l'errore indotto sulla posizione \tilde{z} al di sotto di $5 \cdot 10^{-3}$ mm.

Si riportino esplicitamente i diagrammi a blocchi delle varie componenti del sistema, il controllore ottenuto ed i diagrammi di Bode dell'anello aperto $C(s)G(s)$ e dell'anello chiuso $C(s)G(s)/[1 + C(s)G(s)]$, visualizzando su essi le relative specifiche.

E Sia data la seguente f.d.t.,

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n}s + 1},$$

di un ipotetico controllore, con $\xi \geq 0$ e $\omega_n > 0$;

- e1)** si scriva il codice di un programma che lo simuli numericamente disponendo di un convertitore A/D e D/A con tempo di campionamento T_s generico ed ipotizzando di utilizzare il metodo delle differenze all'avanti.
- e2)** si discuta, inoltre, la stabilità del sistema dinamico tempo discreto del simulatore ottenuto al variare del tempo di campionamento T_s .

Soluzione

A Il sistema è descritto da tre variabili di stato z, \dot{z} e Φ e dall'ingresso V . Essendo l'equilibrio dettato dall'altezza z della armatura rispetto all'elettromagnete costante $\bar{z} = L/2$, si ricava immediatamente $\dot{z} = 0$. Sostituendo perciò tale valore nelle due equazioni dinamiche, si ottiene un sistema in due equazioni e due incognite, il flusso magnetico dell'elettromagnete inferiore Φ e la tensione di comando dell'avvolgimento inferiore V , che forniscono i valori a regime

$$\begin{aligned}\bar{\Phi} &= \pm \sqrt{k_1 k_s L} \\ \bar{V} &= \pm \frac{r(2k_2 + L)}{2k_1} \sqrt{k_1 k_s L}\end{aligned}$$

tra i quali quello richiesto è determinato dalla condizione $\bar{\Phi} > 0$.

B L'equilibrio del regime nominale è descritto dalle

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \frac{L}{2} \\ \dot{\bar{z}} &= 0 \\ \bar{\Phi} &= \sqrt{k_1 k_s L} \\ \bar{V} &= \frac{r(2k_2 + L)}{2k_1} \sqrt{k_1 k_s L}\end{aligned}.$$

Indicando con $x = [x_1, x_2, x_3]^T = [\tilde{z}, \dot{\tilde{z}}, \tilde{\Phi}]^T$ le variabili del sistema traslato e con $u = \tilde{V}$ l'ingresso traslato, si ottiene il seguente sistema non lineare con equilibrio nell'origine ad ingresso nullo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m} \left(-\frac{(x_3 + \bar{\Phi})^2}{2k_1} + k_s(L - x_1 - \bar{z}) - bx_2 \right) \\ \dot{x}_3 &= (u + \bar{V}) - \frac{r}{k_1} (k_2 + x_1 + \bar{z})(x_3 + \bar{\Phi}) \end{cases}$$

e quindi, linearizzando,

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k_s}{m} & -\frac{b}{m} & -\frac{\sqrt{k_1 k_s L}}{mk_1} \\ -\frac{r\sqrt{k_1 k_s L}}{k_1} & 0 & -\frac{r(2k_2 + L)}{2k_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Infine, essendo l'uscita del sistema la altezza z dell'elettromagnete rispetto all'armatura, si ottiene

$$y = Cx = [1 \quad 0 \quad 0]$$

C Sostituendo i valori numerici riportati, si ottiene il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5.85 \cdot 10^5 & -27.9 & -1.7 \cdot 10^4 \\ -2.76 \cdot 10^4 & 0 & -409.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases},$$

e la conseguente funzione di trasferimento

$$G(s) = -17022.133 \frac{1}{(s - 286.2)(s^2 + 723.2s + 8.1 \cdot 10^5)},$$

instabile a ciclo aperto per la presenza del polo reale instabile in 286.2. Più nel dettaglio, la funzione di trasferimento presenta due radici complesse e coniugate a parte reale negativa $\lambda_{1,2} = -361.6 \pm 820.27j = \sigma \pm \omega j$ che genereranno modi esponenzialmente smorzati e oscillanti a frequenza 130.55 Hz, ovvero pulsazione naturale $\omega_n \approx 897$ rad/s e smorzamento $\delta \approx 0.4$ (figura 2-a,b). In figura 2-c è riportato il modo esponenzialmente divergente $e^{286.2 t}$ relativo all'autovalore reale positivo. Si noti come l'andamento della risposta impulsiva, la quale tiene conto anche del vettore degli ingressi e delle uscite, sia una combinazione lineare dei modi propri.

Per la progettazione di un controllore proporzionale stabilizzante, è sufficiente tracciare il luogo delle radici del sistema. Data la presenza di un polo a parte reale positiva, se la retroazione è negativa con guadagno del controllore positivo, si applica la regola del luogo inverso (fig. 3-a).

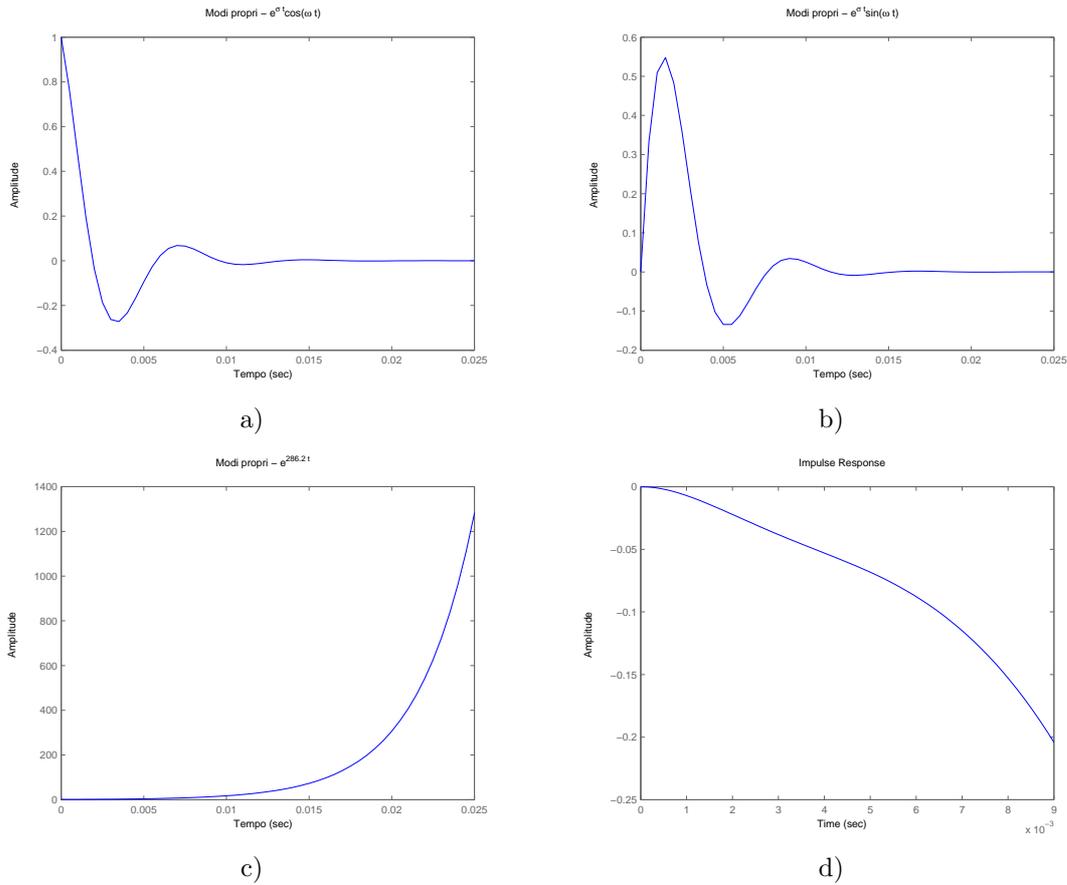


Figure 2: Modi propri del sistema: modi oscillanti e smorzati (a,b) e modo instabile (c). La risposta impulsiva della funzione di trasferimento $G(s)$ è riportata in (d).

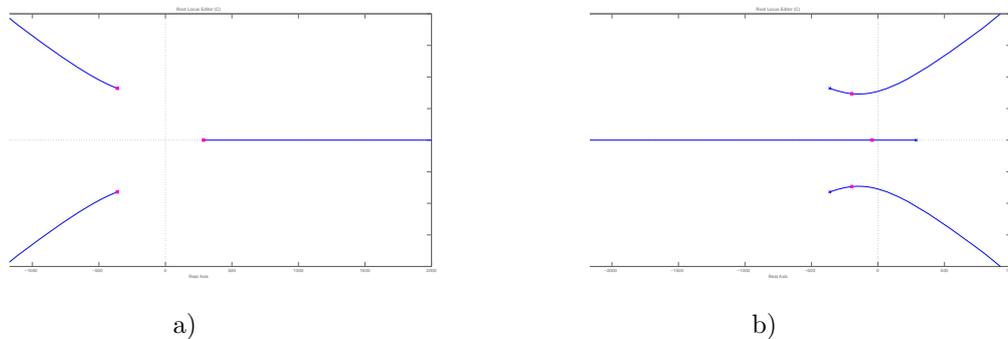


Figure 3: Luogo delle radici inverso (a) e diretto (b) del sistema.

Per stabilizzare il sistema è necessario passare al luogo diretto: mantenendo la convenzione della retroazione negativa, useremo pertanto un guadagno proporzionale negativo, ottenendo il luogo delle radici in (fig. 3-b). Dal luogo diretto si osserva immediatamente come esista un campo di valori negativi (circa $-29000 \leq K \leq -13500$) del guadagno proporzionale del controllore in cui il sistema risulta stabilizzato. Si sceglierà ad esempio

$$C_1(s) = -1.5 \cdot 10^4,$$

per il quale valore i poli in anello chiuso sono mostrati in fig. 3-b. Il sistema stabilizzato in retroazione negativa avrà i diagrammi di Bode a ciclo chiuso riportati in fig. 4-a, assieme alla relativa risposta al gradino unitario (fig. 4-b).

D Il sistema in esame non ha poli a parte reale positiva, in quanto la retroazione proporzionale ha permesso la stabilizzazione a ciclo chiuso del sistema precedentemente instabile. Di seguito è riportata

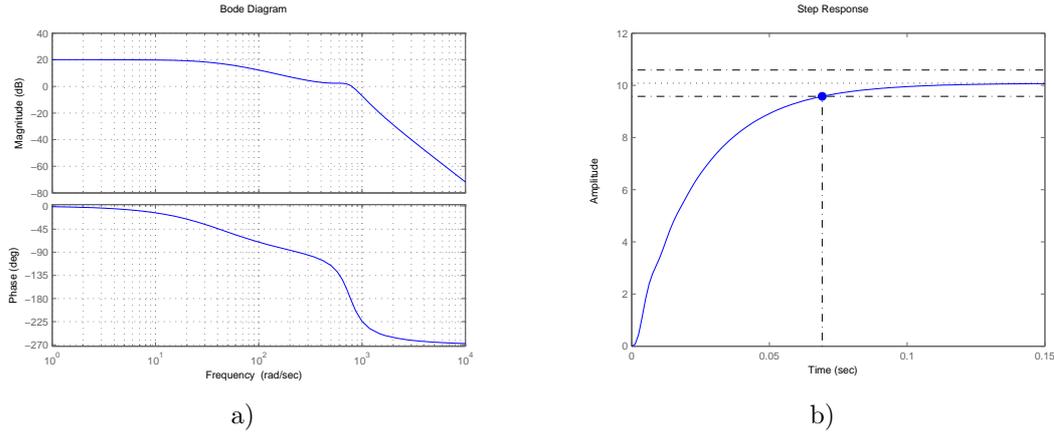


Figure 4: Funzione di trasferimento a ciclo chiuso del sistema stabilizzato (a) e relativa risposta al gradino unitario (b).

la f.d.t. del sistema stabilizzato dal controllore $C_1(s)$ progettato in precedenza:

$$G_2(s) = 255331995.5 \frac{1}{(s + 43.71)(s^2 + 393.3s + 5.8 \cdot 10^5)}$$

il cui diagramma di Bode è riportato in fig. 4-a. Il progetto di un controllore che permetta al sistema complessivo di rispettare le specifiche può essere quindi affrontato direttamente sui diagrammi di Bode, seguendo il consueto montaggio in cascata (fig. 5). Facendo riferimento al progetto di un

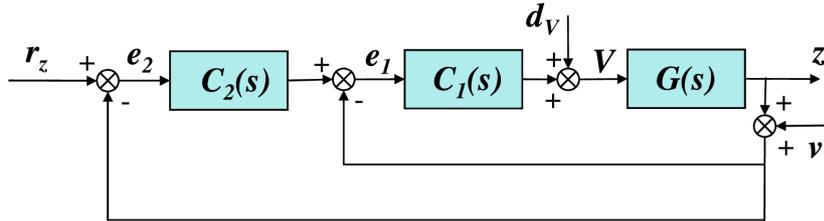


Figure 5: Schema a blocchi del sistema complessivo con montaggio in cascata.

controllore del tipo

$$C_2(s) = \frac{k_c}{s^t} \hat{C}_2(s), \text{ con } \hat{C}_2(0) = 1,$$

iniziamo considerando la scelta del tipo t e della costante di guadagno k_c del controllore basandoci sulle specifiche statiche.

d1) la specifica impone un errore di inseguimento nullo per riferimenti costanti. Assumendo che il sistema complessivo a ciclo chiuso sia asintoticamente stabile, si utilizza il teorema del Valore Finale e quindi si impone $t = 1$, un polo nell'origine al controllore, dato che il sistema $G_2(s)$ non ne possedeva. La seconda parte della specifica è soddisfatta se si ottiene un tempo di assestamento al 5% del valore del riferimento non superiore a 0.05 s con sovralongazione nulla. Tentiamo di esaudire queste specifiche con un sistema che sia approssimabile in anello chiuso con un modello ad un solo polo dominante. Nel caso in cui tale approssimazione venga rispettata, si applica la nota relazione tra banda passante e tempo di assestamento $\omega_T = 3/T_a = 60 \text{ rad/s}$.

Il diagramma di Bode del sistema dopo l'aggiunta di un polo nell'origine e con i vincoli sulla pulsazione di taglio è riportata in fig. 6.

d2) supponendo che il sistema complessivo controllato a ciclo chiuso sia asintoticamente stabile (mediante l'azione del controllore $C_2(s)$), è possibile applicare il teorema della risposta armonica per calcolare l'influenza della variazione della tensione in ingresso $d_v(t)$ dal valore imposto

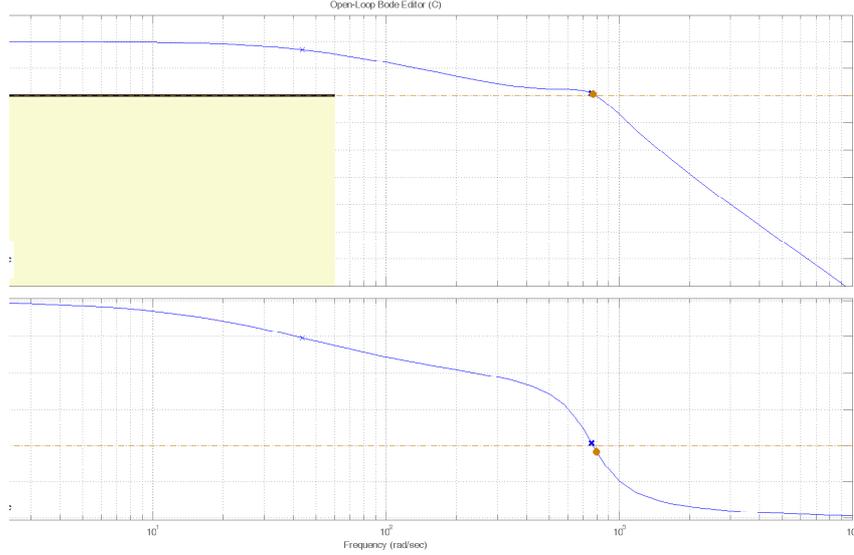


Figure 6: Diagramma di Bode della f.d.t. $G_2(s)$ con specifica sulla pulsazione di taglio.

dal controllore. Notando che, in termini di funzioni di trasferimento, il rapporto tra il disturbo di attuazione d_v e l'uscita $y = \tilde{z} = x_1$ è data da

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)C_1(s)(1 + C_2(s))} D_v(s) = \frac{G_2(s)/C_1}{1 + C_2(s)G_2(s)} D_v(s) := \bar{G}(s)D_v(s)$$

si ha

$$y(t) = |\bar{G}(j\omega_v)| [15 \cdot 10^{-2} \sin(\omega_v t + \angle \bar{G}(j\omega_v))].$$

Per pulsazioni $\omega_v < 10$ rad/s si deve avere $|y(t)| \leq 0.1$ mm, quindi

$$|y(t)| \leq 15 \cdot 10^{-2} |\bar{G}(j\omega_v)| \leq 10^{-4}$$

ovvero

$$\left| \frac{G_2(j\omega_v)/C_1}{1 + C_2(j\omega_v)G_2(j\omega_v)} \right| \leq \frac{10^{-2}}{15}.$$

Osservando dal diagramma di Bode di $G_2(s)$ (figura 4-a) che il massimo modulo nel range frequenziale considerato è pari al guadagno statico $10 = 20$ db, e ricordando che $C_1 = -1.5 \cdot 10^4$ si può porre

$$\left| \frac{10}{1.5 \cdot 10^4 (1 + C_2(j\omega_v)G_2(j\omega_v))} \right| \leq \frac{10^{-2}}{15}$$

Questo significa che per pulsazioni $\omega_v < 10$ rad/s si deve imporre

$$|1 + C_2(j\omega_v)G_2(j\omega_v)| > 0 \text{ db}$$

ovvero, cautelativamente,

$$|C_2(s)G_2(s)| \geq 0 \text{ db}.$$

Il vincolo relativo a questa specifica non è riportato in quanto già soddisfatto dalla specifica **d1**.

- d3)** il terzo quesito si riferisce ad una specifica sul rumore di misura. Sia quindi ν il disturbo sul sensore di posizione e si indichi con

$$Y(s) = -\frac{G(s)C_1(s)(1 + C_2(s))}{1 + G(s)C_1(s)(1 + C_2(s))} \nu(s) = -\frac{G_2(s)(1 + C_2(s))}{1 + G_2(s)C_2(s)} \nu(s) := \bar{G}(s)\nu(s),$$

la f.d.t. tra il disturbo di misura e l'uscita del sistema. La specifica si traduce (sempre supponendo l'asintotica stabilità del sistema a ciclo chiuso e applicando quindi il teorema della

risposta armonica) in una richiesta di attenuazione del disturbo di misura pari a $5 \cdot 10^{-2}$, ovvero (supponendo che $|C_2(s)G_2(s)| \ll 1$ nel campo di frequenze scelto)

$$|\bar{G}(s)| = \frac{|(1 + C_2(s))G_2(s)|}{|1 + C_2(s)G_2(s)|} \approx |(1 + C_2(s))G_2(s)| < 0.05,$$

per pulsazioni maggiori di $2 \cdot 10^3$ rad/s. Utilizzando la disuguaglianza triangolare è possibile scrivere

$$|G_2(s)C_2(s) + G_2(s)| \leq |G_2(s)C_2(s)| + |G_2(s)| < 0.05,$$

Dai diagrammi di Bode è possibile osservare che il modulo di $G_2(s)$ per pulsazioni maggiori di $2 \cdot 10^3$ rad/s è inferiore a 0.0316, cioè -30 db, quindi la specifica è rispettata se

$$|G_2(s)C_2(s)| < 0.05 - 0.0316 \approx -35 \text{ db},$$

per pulsazioni superiori a $2 \cdot 10^3$ rad/s.

Le limitazioni relative a questa specifica sono riportate in figura 7.

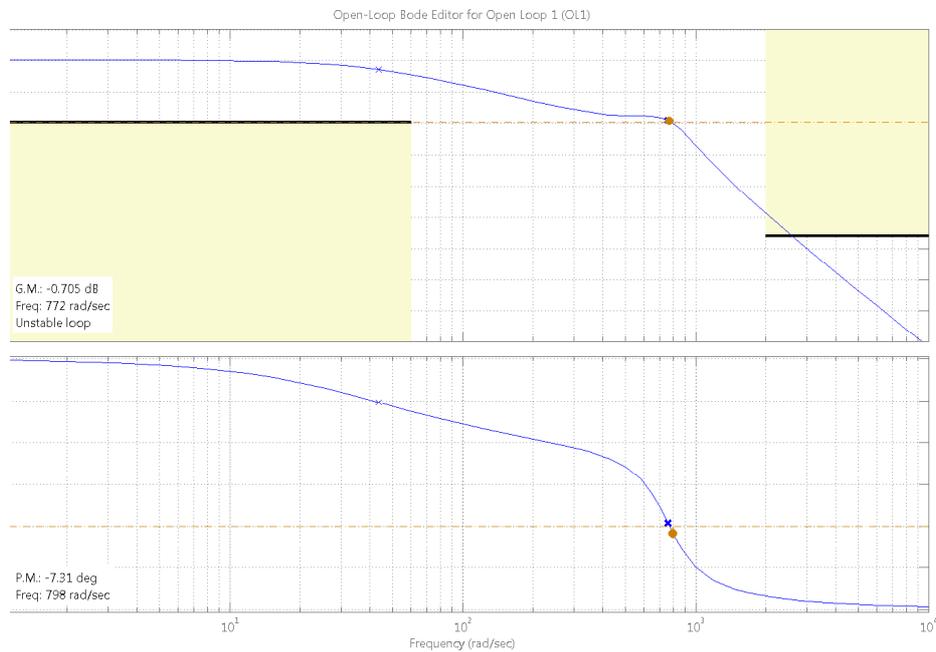


Figure 7: Diagramma di Bode della f.d.t. $G_2(s)$ con specifica sulla pulsazione di taglio, sul disturbo di attenuazione e sul disturbo di misura.

SOLUZIONE ALTERNATIVA AL QUESITO d3:

Ipotizziamo adesso che il disturbo di misura abbia effetto solo sull'anello più esterno. In tal caso la f.d.t. tra il disturbo e l'uscita è

$$Y(s) = -\frac{C_2(s)G_2(s)}{1 + C_2(s)G_2(s)}\nu(s) = \bar{G}^*(s)\nu(s),$$

dove $G_2(s)$ è la f.d.t dell'anello stabilizzante. La specifica in tal caso richiederebbe che

$$\left| -\frac{C_2(s)G_2(s)}{1 + C_2(s)G_2(s)} \right| \leq -26 \text{ db},$$

Ipotizzando di poter trascurare per $\omega_\nu \geq 2 \cdot 10^3$ rad/s il modulo del guadagno d'anello $C_2(s)G_2(s)$ rispetto all'unità, la specifica risulterebbe soddisfatta se

$$|C_2(s)G_2(s)| \leq -26 \text{ db}.$$

Confrontando la f.d.t. $\bar{G}(s)$ con $\bar{G}^*(s)$, entrambe tra il disturbo di misura (il primo coinvolgente entrambi gli anelli, il secondo soltanto l'anello più esterno), e l'uscita, possiamo trovare la seguente relazione

$$\bar{G}(s) = \bar{G}^*(s) - \frac{G_2(s)}{1 + C_2(s)G_2(s)}$$

dalla quale si può concludere che la specifica d3 è più impegnativa nel caso realistico in cui il disturbo interviene su entrambi gli anelli anzichè sul singolo anello esterno.

Un possibile controllore dinamico $C_2(s)$ in grado di rispettare tutte le specifiche è il seguente

$$C(s) = 8 \frac{1 + 0.023 s}{s},$$

per il quale il diagramma di Bode del guadagno d'anello è riportato in figura 8. Il controllore

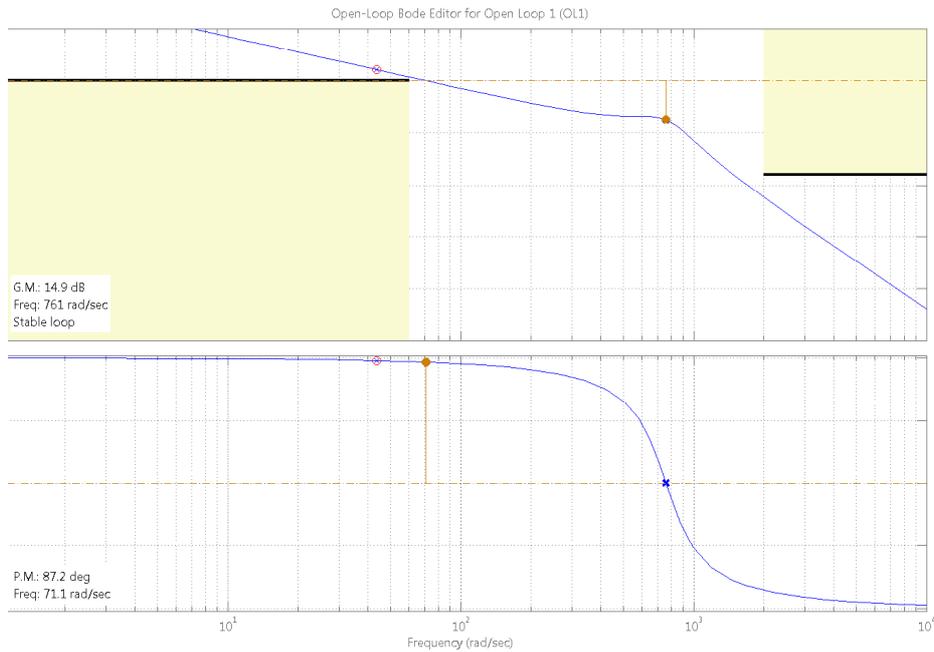


Figure 8: Diagramma di Bode $C_2(s)G_2(s)$ risultante dal progetto sulle specifiche di performance.

presenta un polo nell'origine per la specifica sull'errore al gradino. Lo zero a cancellare il polo a bassa frequenza del sistema è stato invece aggiunto per rispettare la specifica sulla banda passante e per permettere una buona approssimazione del primo ordine (infatti il polo in bassa frequenza del sistema giace nell'intorno della pulsazione di taglio) e quindi raggiungere un margine di fase prossimo a $\pi/2$. Il guadagno è invece stato dettato come compromesso tra le specifiche statiche ed il rumore di misura. In figura 9 è riportato il diagramma di bode del sistema complessivamente controllato. La risposta al gradino unitario del sistema chiuso con retroazione in cascata è riportata in figura 10 come verifica sperimentale del buon progetto presentato. Nella figura 11 è inoltre riportata la risposta del sistema controllato nel caso in cui, come da specifica, l'errore sulla tensione di attuazione sia del tipo $15 \cdot 10^{-2} \sin(\omega_v t)$ con $\omega_v = 10$ rad/s. Il grafico può essere ottenuto da Matlab utilizzando il comando `lsim` ed impostando un ingresso sinusoidale di pulsazione pari a 10 rad/s e di ampiezza $15 \cdot 10^{-2}$ V. Il sistema al quale l'ingresso è applicato ha come funzione di trasferimento $G_2(s)/(C_1(1 + C_2(s)G_2(s)))$.

In modo simile, utilizzando ancora il comando `lsim` è possibile valutare sperimentalmente l'effetto del disturbo ν sull'uscita del sistema (figura 12-a,b). La funzione di trasferimento in questo caso sarà $-((1 + C_2(s))G_2(s))/(1 + C_2(s)G_2(s))$, mentre il disturbo è stato simulato dal seguente segnale

$$\nu(t) = \frac{0.1 \cdot 10^{-3}}{\sum_{i=1}^3 \nu_i} (\nu_1 \sin(2 \cdot 10^4 t) + \nu_2 \cos(3.5 \cdot 10^3 t) + \nu_3 \sin(2.5 \cdot 10^3 t + \frac{\pi}{4}))$$

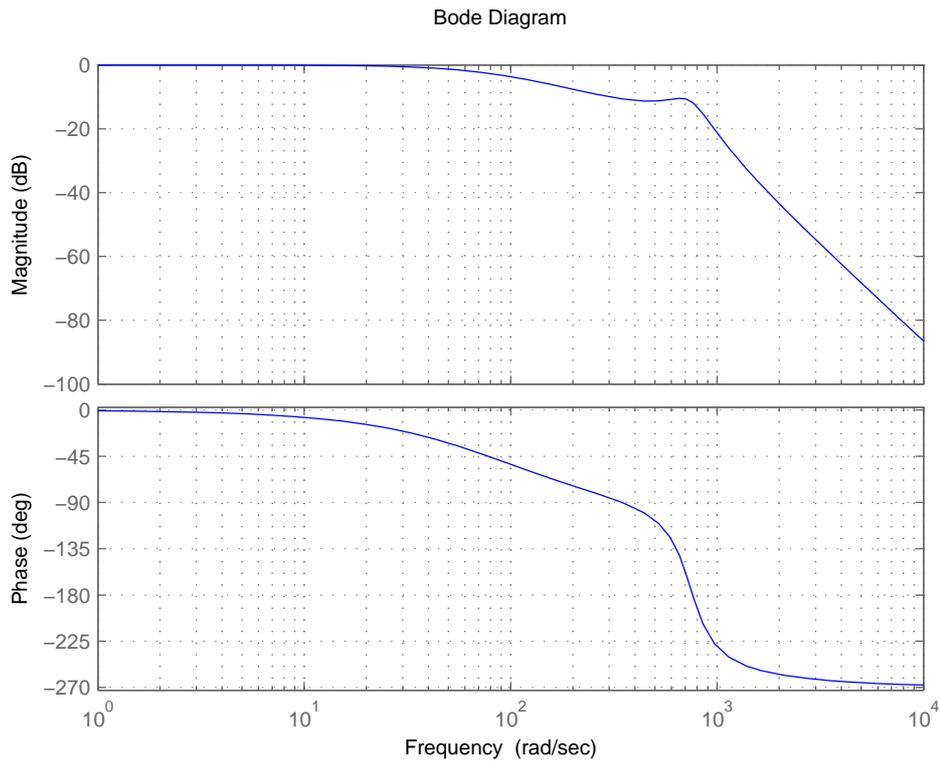


Figure 9: Diagramma di Bode del sistema complessivamente controllato.

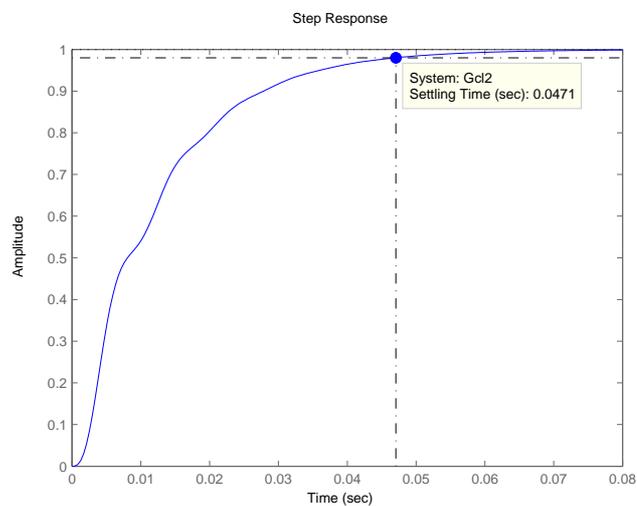


Figure 10: Risposta al gradino del sistema controllato in cascata.

dove le ampiezze sono generate casualmente, indipendentemente ed uniformemente distribuite nell'intervallo $[0; 1]$.

Come si nota dalle verifiche sperimentali riportate in figura 10, 11 e 12, il sistema controllato rispetta tutte le specifiche di progetto.

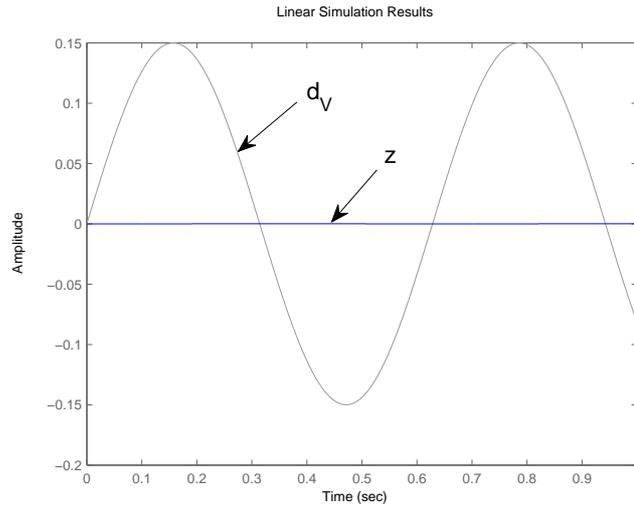


Figure 11: Risposta del sistema controllato ad un segnale sinusoidale applicato come disturbo sulla tensione di attuazione V .

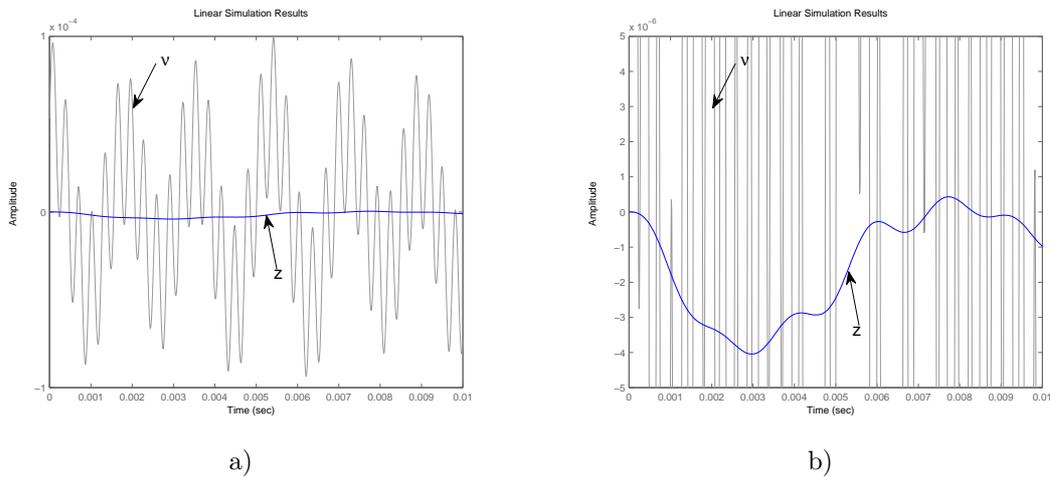


Figure 12: Risposta del sistema controllato ad un segnale sinusoidale applicato come disturbo di misura di posizione (a) e relativo zoom (b).

E

e1) Ponendo

$$C(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} := \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

si ottiene facilmente una realizzazione in uno spazio di stato a dimensione due, ovvero

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Be(t) \\ u(t) &= Cx(t) + De(t) \end{aligned} \quad (1)$$

ad esempio usando la forma canonica di controllo. Poniamo quindi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [K\omega_n^2 \quad 0]$$

Per simulare in tempo discreto il sistema LTITC 1, si può usare il metodo di Eulero in avanti, cioè porre

$$\dot{x}(kT) \approx \frac{1}{T} [x(kT + T) - x(kT)],$$

ottenendo il sistema LTITD dato da

$$\begin{aligned} \dot{x}(k+1) &= \hat{A}x(k) + \hat{B}e(k) \\ u(k) &= Cx(k) + De(k) \end{aligned} \quad (2)$$

dove $\hat{A} = I + AT$ e $\hat{B} = BT$.

Il codice che realizza una simulazione del controllore in forma discreta può essere scritto in un linguaggio che permette le operazioni tra matrici (ad esempio Matlab) nel modo seguente:

```
T=Ts; %scelta del tempo di campionamento T
A=[1, 0; 0, 1]+[0, 1; -w_n^2, -2*delta*w_n]*T; %Calcolo delle matrici
B=[0;1]*T; C=[K*w_n^2 0]; D=0;
x=[0;0]; %condizioni iniziali
%
% ciclo indefinito fino ad interruzione
while(condizione_arresto == 0)
u = input('Next Input'); % Leggi ingresso
y=C*x+D*u;
disp(y); % Scrivi uscita
x=A*x + B*u;
end
```

- e2) Per rispondere a questo secondo quesito è opportuno riscrivere la matrice (mediante un appropriato cambiamento di coordinate) in forma di Jordan reale, ovvero

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

dove $\alpha = -\xi\omega_n$ e $\beta = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ sono rispettivamente la parte reale ed immaginaria della coppia di numeri complessi e coniugati.

La matrice della discretizzazione con Eulero in avanti diviene

$$\hat{A} = AT_s + I = \begin{bmatrix} \alpha T_s + 1 & \beta T_s \\ -\beta T_s & \alpha T_s + 1 \end{bmatrix}$$

i cui autovalori hanno parte reale $\alpha T_s + 1$ e parte immaginaria βT_s . Affinché il sistema dis-

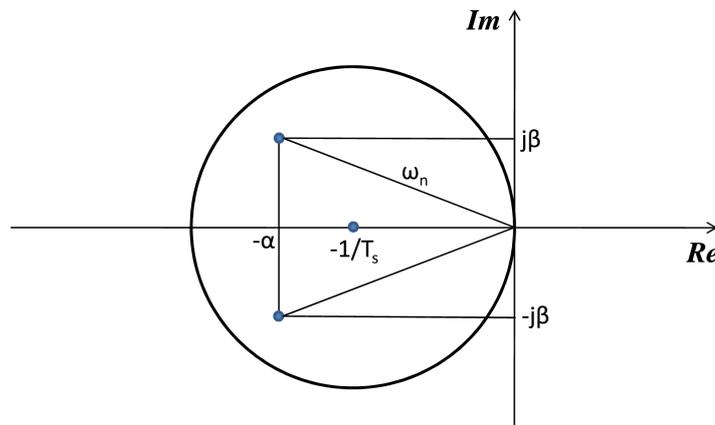


Figure 13: Condizione di stabilità.

cretizzato sia asintoticamente stabile, questi autovalori devono avere modulo inferiore all'unità, da cui

$$(T_s\alpha + 1)^2 + (\beta T_s)^2 \leq 1. \quad (3)$$

Questa è l'equazione di un cerchio nel piano complesso, con centro in $[-1/T_s, 0]$ e raggio $1/T_s$. Affinché il controllore discretizzato sia asintoticamente stabile, è quindi necessario scegliere un tempo di campionamento T_s così piccolo che gli autovalori del controllore in tempo continuo siano interni a tale cerchio (vedi fig. 13).

Esprimendo la (3) in termini di pulsazione naturale e smorzamento dei poli del sistema da simulare, si ottiene

$$T_s \leq \frac{2\xi}{\omega_n}.$$

Da questa forma si osserva che, all'aumentare della pulsazione naturale del sistema da simulare, il tempo di campionamento per il metodo di Eulero in avanti deve diminuire. Lo stesso effetto ha la diminuzione dello smorzamento ξ del sistema da simulare.