

Si consideri il modello dinamico di un motore elettrico in corrente continua con eccitazione a magneti permanenti (figura 1).

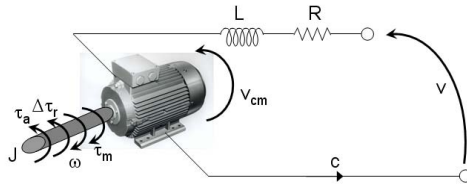


Figure 1: Motore elettrico in corrente continua.

Siano R ed L la resistenza e l'induttanza del circuito d'armatura (composto dagli avvolgimenti posti sul rotore e dal circuito di commutazione), e si indichi con v la tensione ai capi di questo circuito (cioè sulle spazzole del commutatore), e con c la corrente che vi scorre. La rotazione delle spire del circuito del rotore nel campo generato dai magneti permanenti provoca una tensione contro-elettromotrice $v_e = k_e \omega$, che è proporzionale alla velocità di rotazione ω secondo una costante k_e determinata dalla intensità del campo e da altri parametri costruttivi. La dinamica delle variabili elettriche nel circuito di armatura è quindi descritta dalla equazione differenziale

$$L \frac{dc}{dt} + Rc + v_e = v \quad (1)$$

La coppia motrice τ_m generata sul rotore è proporzionale a sua volta alla corrente di armatura c , $\tau_m = k_m c$, secondo una costante di proporzionalità k_m . Nel caso ideale in cui non ci siano perdite energetiche nel motore, il bilancio delle potenze elettriche e meccaniche mostra che tali costanti coincidono. Si supponga quindi che valga $k_e = k_m = k$. Il moto del rotore è determinato dalla equazione dinamica di equilibrio tra la coppia motrice τ_m , la coppia resistente del carico a valle τ_r , la coppia d'inerzia data dal momento ridotto J , e la coppia di attrito che si suppone proporzionale alla velocità angolare secondo un coefficiente di smorzamento viscoso b :

$$J \frac{d\omega}{dt} + b\omega = \tau_m - \tau_r \quad (2)$$

- A** Si determini il moto di regime dell'albero motore e la corrispondente corrente di armatura di equilibrio nell'ipotesi di tensione di armatura $v = \bar{v}$ e coppia resistente nominale $\tau_r = \bar{\tau}_r$ costanti;
- B** Supponendo di disporre della misura della velocità dell'albero motore ω e di poter controllare la tensione di armatura v , si determini una rappresentazione del sistema in forma di stato intorno all'equilibrio corrispondente a \bar{v} e $\bar{\tau}_r$;
- C** Si determinino le funzioni di trasferimento tra gli ingressi (la tensione di armatura v e la coppia resistente τ_r) e l'uscita (la velocità dell'albero motore ω) e se ne discuta la stabilità;

Si considerino i seguenti valori numerici: $k = 0.05$ Nm/A, $J = 3.5 \cdot 10^{-7}$ Kg m², $b = 10^{-4}$ N m s/rad, $R = 10$ Ω, $L = 8$ mH. Si scelgano arbitrariamente i valori di \bar{v} e $\bar{\tau}_r$.

- D** Si tracci l'andamento qualitativo dei modi associati al sistema, specificandone i parametri di interesse;
- E** Si determini una legge di controllo per la tensione v che agisca in modo da garantire le seguenti specifiche:
- e1)** la velocità dell'albero motore si deve portare da zero ad un valore compreso nell'intervallo 10 ± 0.5 rad/s in un tempo non superiore a 10 ms e senza mai eccedere un limite di velocità di sicurezza pari a 12 rad/s, fermo restando che il valore di regime deve risultare pari a 10 rad/s;
- e2)** ipotizzando che il carico applicato τ_r all'albero motore vari nel tempo piuttosto lentamente, con frequenze non superiori a 1 Hz, e non superiori in valore assoluto 10 mNm, ovvero sia del tipo

$$\tau_r = \bar{\tau}_r + T \sin(\omega_r t), \quad 0 < T < 10 \text{ mNm}, \quad \omega_r \leq 2\pi,$$

si garantisca che la variazione indotta sulla velocità ω non sia maggiore ± 1 rad/s;

e3) si supponga che la dinamo tachimetrica per la misura della velocità angolare dell'albero motore garantisca una misura corretta per frequenze inferiori a 3.2 KHz, ma sia affetta al di sopra di queste frequenze da un errore pari al massimo a 10 rad/s. Si desidera che l'effetto sulla regolazione dell'uscita sia inferiore a 1 rad/s.

Si riporti esplicitamente il controllore ottenuto ed il diagramma di Bode del guadagno di anello con le relative specifiche da rispettare.

Soluzione

A Con riferimento ai valori riportati, il sistema lineare complessivo all'equilibrio sarà dato da

$$\begin{cases} \dot{c} = 0 = -\frac{R}{L}c - \frac{k}{L}\omega + \frac{\bar{v}}{L} \\ \dot{\omega} = 0 = \frac{k}{J}c - \frac{b}{J}\omega - \frac{\bar{\tau}_r}{J} \end{cases}$$

dal quale risultano i seguenti punti di equilibrio

$$\begin{cases} \bar{c} = \frac{b\bar{v} + k\bar{\tau}_r}{k^2 + bR} \\ \bar{\omega} = \frac{k\bar{v} - R\bar{\tau}_r}{k^2 + bR} \end{cases}$$

B Una rappresentazione del sistema lineare in forma di stato intorno all'equilibrio dato da \bar{c} , $\bar{\omega}$, \bar{v} e $\bar{\tau}_r$ si può ottenere indicando come variabili di stato $x = [x_1, x_2]^T = [c, \omega]^T$ e definendo le variabili errore $\tilde{x} = x - \bar{x} = [c - \bar{c}, \omega - \bar{\omega}]^T$, $\tilde{v} = v - \bar{v}$ e $\tilde{\tau}_r = \tau_r - \bar{\tau}_r$. In questo modo il sistema in esame avrà una rappresentazione di stato con equilibrio nell'origine per ingresso nullo, riportata di seguito

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = -\frac{R}{L}(\tilde{x}_1 + \bar{x}_1) - \frac{k}{L}(\tilde{x}_2 + \bar{x}_2) + \frac{\tilde{v} + \bar{v}}{L} \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \frac{k}{J}(\tilde{x}_1 + \bar{x}_1) - \frac{b}{J}(\tilde{x}_2 + \bar{x}_2) - \frac{\tilde{\tau}_r + \bar{\tau}_r}{J} \end{cases}$$

dalla quale, notando che

$$\begin{cases} -\frac{R}{L}\bar{x}_1 - \frac{k}{L}\bar{x}_2 + \frac{\bar{v}}{L} = 0 \\ \frac{k}{J}\bar{x}_1 - \frac{b}{J}\bar{x}_2 - \frac{\bar{\tau}_r}{J} = 0 \end{cases}$$

si ottiene la forma di stato desiderata che tiene conto dello scostamento dalle condizioni di equilibrio

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{k}{L} \\ \frac{k}{J} & -\frac{b}{J} \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{\tau}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{k}{L} \\ \frac{k}{J} & -\frac{b}{J} \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{v} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J} \end{bmatrix} \tilde{\tau}_r = A\tilde{x} + B_v\tilde{v} + B_{\tau_r}\tilde{\tau}_r$$

C Il calcolo delle due funzioni di trasferimento è possibile applicando la sovrapposizione degli effetti al sistema lineare ottenuto, considerando separatamente l'effetto di \tilde{v} e $\tilde{\tau}_r$. La funzione di trasferimento può essere ottenuta calcolando

$$\frac{\Omega(s)}{\tilde{V}(s)} = G_v(s) = C(sI - A)^{-1}B_v \quad \text{e} \quad \frac{\Omega(s)}{\tilde{\tau}_r(s)} = G_{\tau_r}(s) = C(sI - A)^{-1}B_{\tau_r}$$

oppure applicando la trasformata di Laplace al sistema in forma di stato e procedendo per sostituzione. Independentemente dal procedimento adottato, si ottiene

$$G_v(s) = \frac{k}{LJs^2 + (Lb + RJ)s + k^2 + bR} \quad \text{e} \quad G_{\tau_r}(s) = -\frac{Ls + R}{LJs^2 + (Lb + RJ)s + k^2 + bR}$$

L'analisi di stabilità del sistema può essere svolta in vari modi, ad esempio risolvendo l'equazione di secondo grado oppure applicando il criterio di Routh al denominatore (comune) delle funzioni di trasferimento. Alternativamente (e molto più semplicemente), notando che i parametri fisici a denominatore sono necessariamente tutti positivi, si deduce dal criterio di Descartes per polinomi di secondo grado che le funzioni di trasferimento sono asintoticamente stabili e presentano modi oscillanti smorzati o modi esponenzialmente convergenti in dipendenza dei valori dei parametri.

D Sostituendo i valori numerici dati, le funzioni di trasferimento diverranno complessivamente

$$G_v(s) = \frac{1.8 \cdot 10^7}{s^2 + 1536s + 1.25 \cdot 10^6} \quad \text{e} \quad G_{\tau_r}(s) = -\frac{2.86 \cdot 10^6(s + 1250)}{s^2 + 1536s + 1.25 \cdot 10^6}$$

Entrambe le funzioni di trasferimento presentano due radici complesse e coniugate a parte reale negativa: $\lambda_{1,2} = -767.86 \pm 812.65j = \sigma \pm \omega_j$, le quali genereranno modi oscillanti con pulsazione naturale $\omega_n = 1.12 \cdot 10^3$ rad/s e smorzamento $\delta = 0.67$ (figura 2-a,b). In figura 2-c è riportata anche la risposta impulsiva della funzione di trasferimento $G_v(s)$. Si noti come l'andamento della risposta impulsiva, la quale tiene conto anche del vettore degli ingressi e delle uscite, sia una combinazione lineare dei modi propri. In figura 2-d è riportata, invece, la risposta impulsiva della funzione di trasferimento $G_{\tau_r}(s)$.

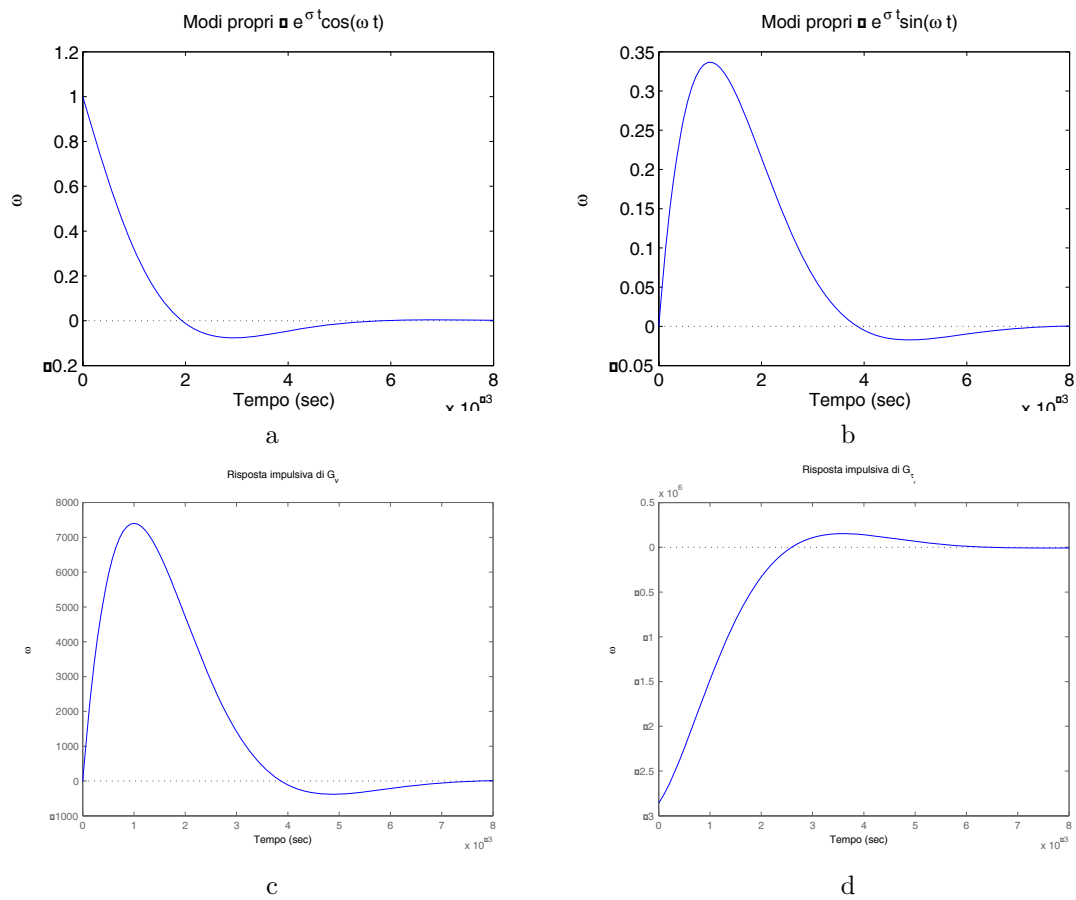


Figure 2: Modi propri del sistema (a,b) e risposta impulsiva delle funzioni di trasferimento $G_v(s)$ (c) e $G_{tr}(s)$ (d).

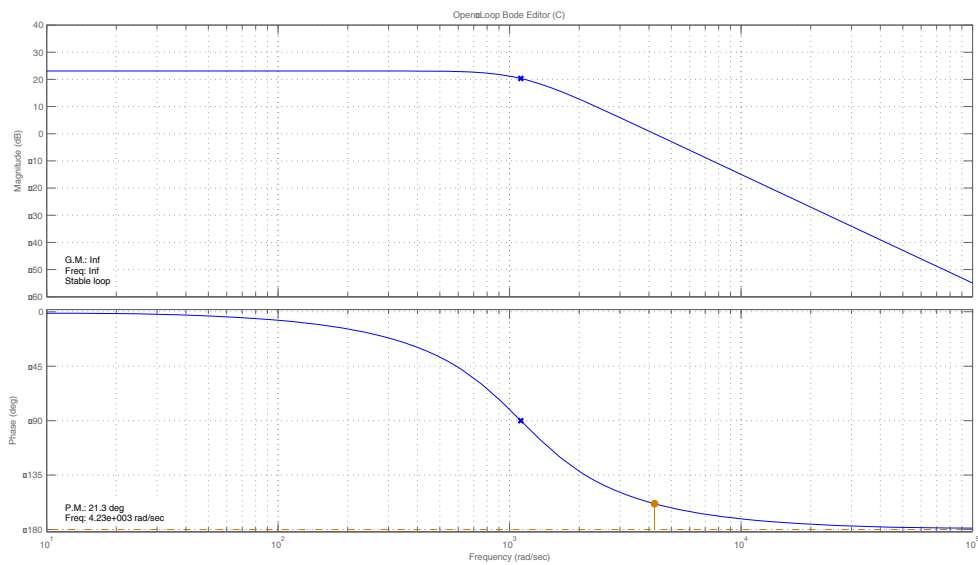


Figure 3: Diagramma di Bode della f.d.t. $G_v(s)$.

E Come visto, il sistema in esame è asintoticamente stabile in anello aperto per qualsiasi scelta dei parametri fisici. Pertanto, il progetto di un controllore che permetta al sistema complessivo di rispettare le specifiche può essere affrontato direttamente sui diagrammi di Bode (la $G_v(s)$ è anche

a fase minima). Facendo riferimento al progetto di un controllore del tipo

$$C(s) = \frac{k_c}{s^t} \hat{C}(s), \text{ con } \hat{C}(0) = 1,$$

iniziamo considerando la scelta del *tipo* t e della costante di guadagno k_c del controllore basandoci sulle specifiche statiche.

- e1) la prima richiesta impone errore nullo a regime per l'inseguimento a segnali costanti $\omega(t) \equiv \bar{\omega}$. Per l'analisi della specifica è necessario applicare il teorema del Valore Finale alla funzione errore di inseguimento

$$E(s) = R(s) - Y(s) \Rightarrow E(s) = \frac{1}{1 + C(s)G_v(s)} R(s),$$

quindi, nel caso di segnali a gradino,

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + C(s)G_v(s)} \frac{\bar{\omega}}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{k_c}{s^t} \hat{C}(s)G_v(s)} \bar{\omega}.$$

La soluzione prevede il piazzamento di un polo nell'origine del controllore ($t = 1$), lasciando il guadagno generico pari a k_c .

Nella seconda parte della specifica è richiesto un tempo di assestamento al 5% del valore di regime, pari a 0.01 s, permettendo una sovralongazione che al massimo sia pari al 20% del valore costante $\hat{\omega}$ assegnato. Le specifiche sul tempo di assestamento T_a e sulla sovralongazione percentuale $S\%$ possono essere ottenute con un controllore che renda il sistema in anello chiuso approssimabile con un sistema a due poli dominanti le cui caratteristiche frequenziali siano

$$S = \exp\left(\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\right) \Rightarrow \delta = 0.46 \Rightarrow M_\phi \approx 46 \text{ deg}$$

$$\omega_T = \frac{3}{\delta T_a} \Rightarrow \omega_T \approx 652.2 \text{ rad/s}$$

Il diagramma di Bode con i vincoli sulla pulsazione di taglio ω_T sono riportati in fig. 4.

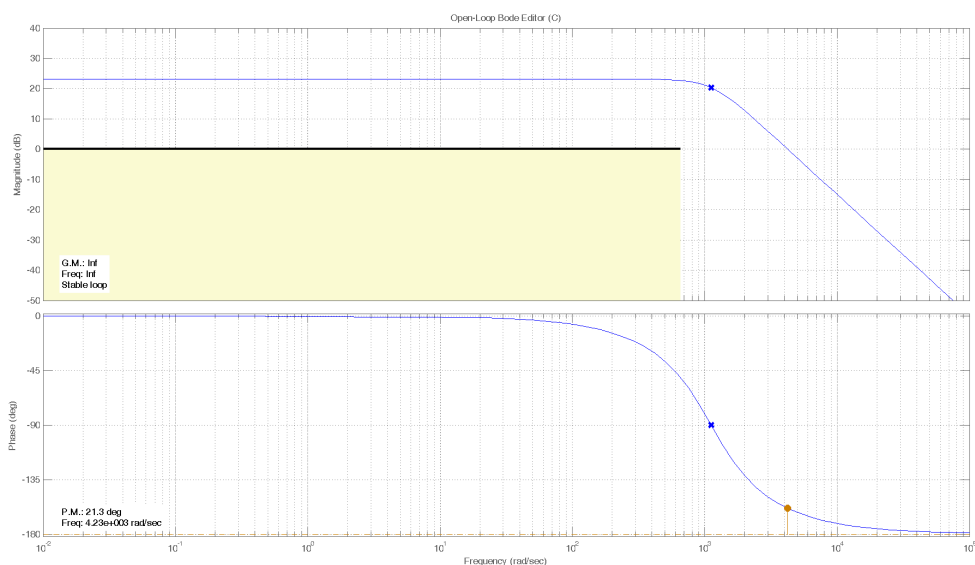


Figure 4: Diagramma di Bode della f.d.t. $G_v(s)$ con specifica sulla banda passante.

- e2) supponendo che il sistema complessivo controllato a ciclo chiuso sia asintoticamente stabile (mediante l'azione del controllore $C(s)$) è possibile applicare il teorema della risposta armonica. Infatti, notando che la funzione di trasferimento tra il disturbo sulla coppia $\tilde{\tau}_r$ e l'uscita $\omega = y$ (fare attenzione a non confondere l'uscita con la pulsazione) è pari a

$$Y(j\omega) = \frac{G_{\tau_r}(j\omega)}{1 + C(j\omega)G_v(j\omega)} \tilde{\tau}_r(j\omega) = \bar{G}(j\omega) \tilde{\tau}_r(j\omega),$$

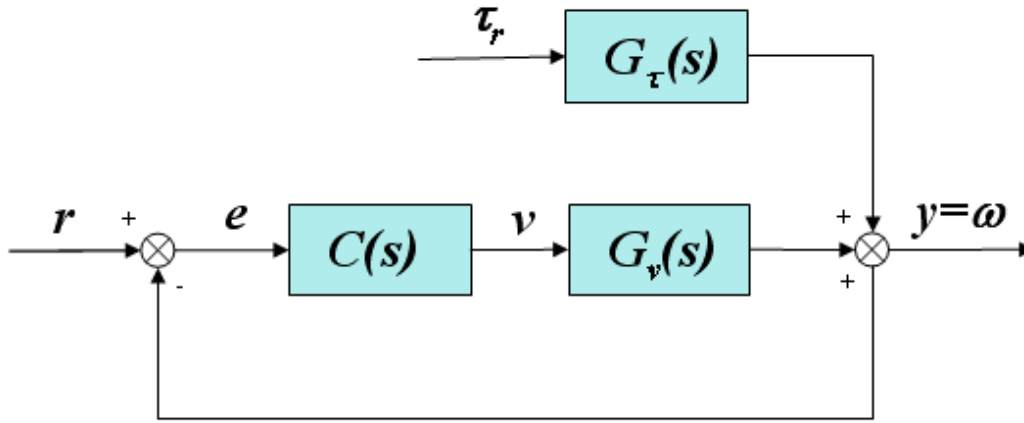


Figure 5: Schema a blocchi.

risulta avere lo stesso denominatore della f.d.t. ad anello chiuso (figura 5)

$$G_c(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{C(j\omega)G_v(j\omega)}{1 + C(j\omega)G_v(j\omega)},$$

e quindi asintoticamente stabile. Applicando, quindi, il teorema della risposta armonica

$$y(t) = |\bar{G}(j\omega)| T \sin(\omega t + \angle \bar{G}(j\omega)),$$

questa specifica è equivalente a richiedere che per pulsazioni $\omega < 2\pi$ rad/s si abbia $y(t) < \pm 1$ rad/s. Considerando il caso peggiore, si consideri la valutazione conservativa $|\sin(\omega t + \angle \bar{G}(j\omega))| \leq 1$ e, dal diagramma di Bode di G_{τ_r} (fig. 6) si prenda l'amplificazione massima nel range frequenziale considerato (pari al guadagno statico di G_{τ_r} , equivalente a $2857.1 = 69.12$ db, rilevabile sui diagrammi di Bode o calcolabile esplicitamente imponendo $s = 0$). In questo caso

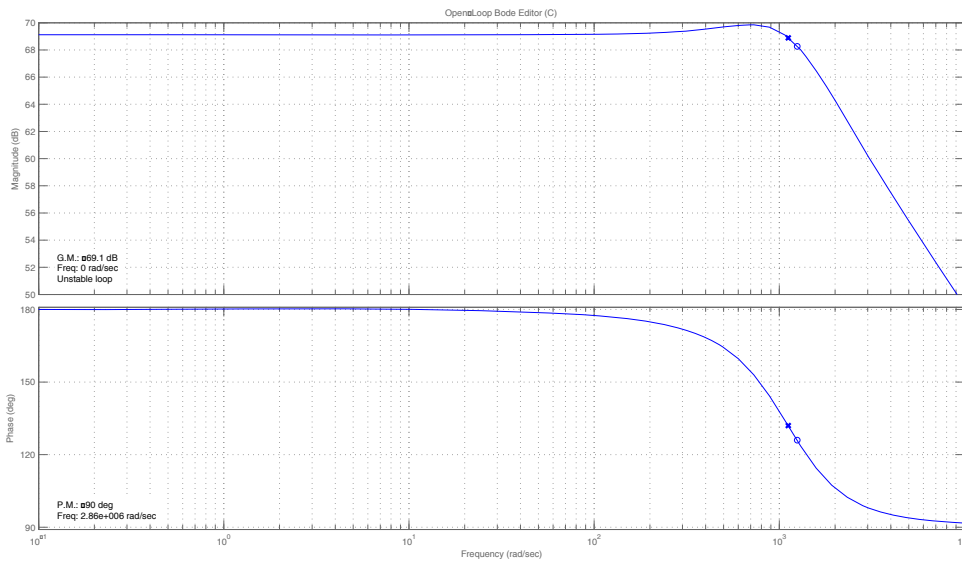


Figure 6: Diagramma di Bode della f.d.t. del disturbo sulla coppia resistente $G_{\tau_r}(s)$.

la specifica richiede

$$\left| \frac{10^{-2}G_{\tau_r}(j\omega)}{1 + C(j\omega)G_v(j\omega)} \right| < \left| \frac{10^{-2}2857.1}{1 + C(j\omega)G_v(j\omega)} \right| < 0 \text{ db.}$$

Perciò, per basse frequenze si cerca un guadagno elevato di $C(s)G_v(s)$ e quindi un controllore $C(s)$ tale per cui $\left| \frac{C(s)G_v(s)}{28.57} \right|_{\text{db}} > 0$, o, equivalentemente,

$$|C(s)G_v(s)| > 30 \text{ db},$$

per pulsazioni $\omega < 2\pi$. Nella fig. 7 è riportato esplicitamente il vincolo relativo a questa specifica.

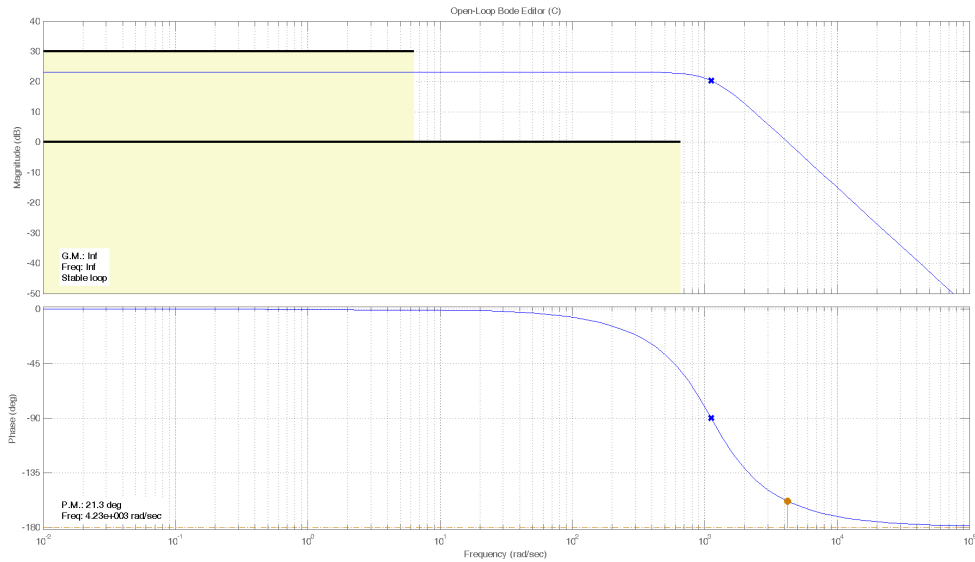


Figure 7: Diagramma di Bode della f.d.t. $G_v(s)$ con specifica sulla banda passante e sul disturbo di coppia resistente.

e3 il terzo quesito si riferisce ad una specifica sul rumore di misura. Sia quindi ν il disturbo sul sensore di velocità e si indichi con

$$\Omega(s) = -\frac{C(s)G_v(s)}{1 + C(s)G_v(s)}\nu(s),$$

la f.d.t. tra il disturbo di misura e l'uscita del sistema. Nella specifica analizzata in questo punto si richiede un basso guadagno della funzione d'anello $C(s)G_v(s)$ per elevate pulsazioni superiori a circa $2 \cdot 10^4$ rad/s in modo che l'effetto sull'uscita sia inferiore a 1 rad/s quando il disturbo di misura sia al suo massimo valore di 10 rad/s. Questo si traduce (tramite l'applicazione del teorema della risposta armonica) in una richiesta di attenuazione del disturbo di misura pari a 0.1, ossia

$$|G_c(s)| = \frac{|C(s)G_v(s)|}{|1 + C(s)G_v(s)|} \approx |C(s)G_v(s)| < -20 \text{ db},$$

per pulsazioni maggiori di $2 \cdot 10^4$ rad/s. Le limitazioni relative a questa specifica sono riportate in figura 8.

Una possibile soluzione per il controllore $C(s)$ in grado di rispettare tutte le specifiche proposte è la seguente

$$C(s) = \frac{1.363(s^2 + 400s + 104 \cdot 10^4)}{s(s + 2700)}$$

per la quale il diagramma di Bode del guadagno d'anello è riportato in figura 9. Si noti che il controllore presenta un polo nell'origine (da specifica), una coppia di zeri complessi e coniugati (necessari per dare un incremento di fase ed alzare il diagramma di Bode per la specifica sulla pulsazione di taglio) in prossimità del doppio polo del sistema ed infine un ulteriore polo per ottenere il rispetto della specifica sul rumore di misura. Quest'ultimo polo garantisce anche la causalità del controllore ed il margine di fase desiderato. In figura 10 è riportato il diagramma di Bode del

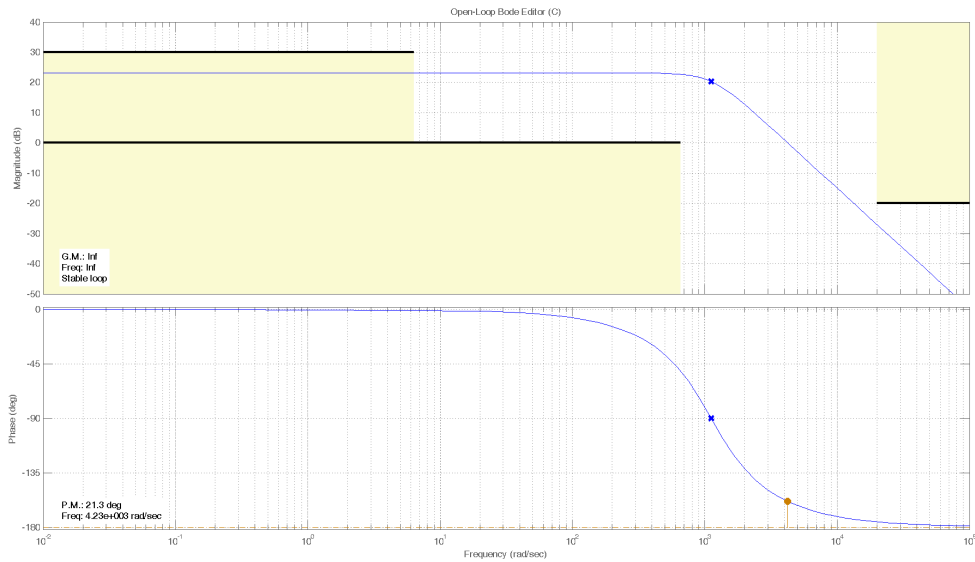


Figure 8: Diagramma di Bode della f.d.t. $G_v(s)$ con specifica sulla banda passante, sul disturbo sulla coppia resistente e sul disturbo di misura.

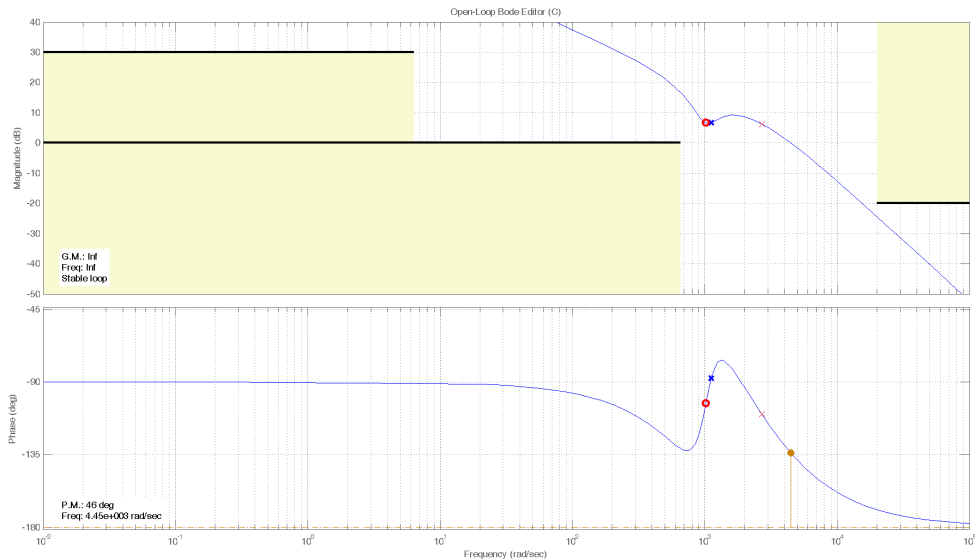


Figure 9: Diagramma di Bode risultante dal progetto del guadagno di anello $C(s)G_v(s)$.

sistema controllato. Come si nota, la non perfetta cancellazione degli zeri del controllore con i poli del sistema modifica leggermente l'andamento della funzione di trasferimento a pulsazioni inferiori alla banda passante ($\omega \approx 10^3$ rad/s), modificando l'approssimazione fatta di sistema del secondo ordine (doppio polo dominante). Infatti, la risposta al gradino del sistema chiuso in retroazione differirà da una risposta del secondo ordine a causa della presenza del doppio zero a frequenza inferiore al doppio polo (una cancellazione perfetta, peraltro di difficile realizzazione in un sistema reale, avrebbe eliminato il problema). Il progetto risulta comunque essere buono, come mostrato dalla risposta al gradino del sistema controllato, riportata in figura 11.

Nella figura 12 è inoltre riportata la risposta del sistema controllato nel caso in cui, come da specifica, l'errore sulla coppia resistente sia di tipo sinusoidale con pulsazione $\omega_r = 2\pi$. Il grafico può essere ottenuto da Matlab utilizzando il comando `lsim` ed impostando un ingresso sinusoidale

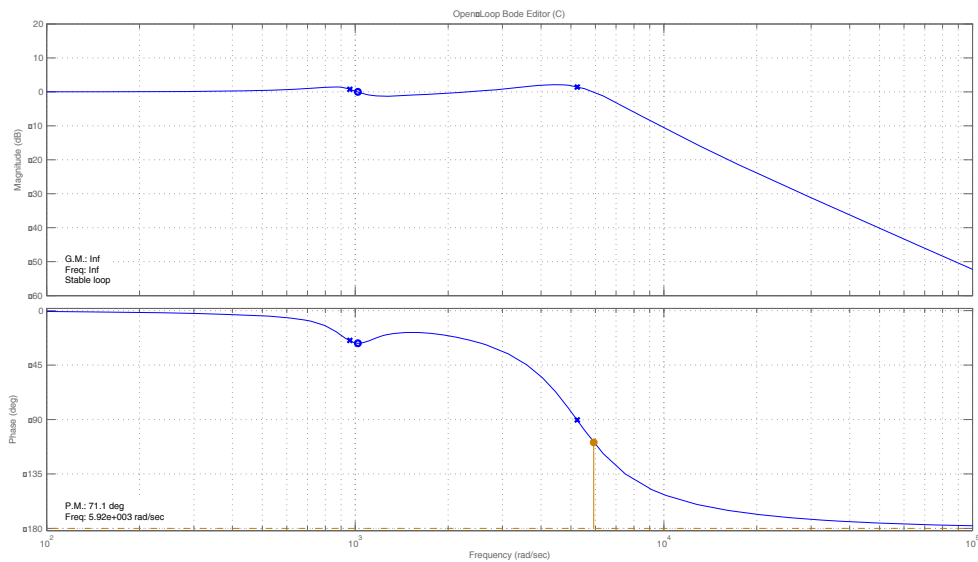


Figure 10: Diagramma di Bode del sistema controllato.

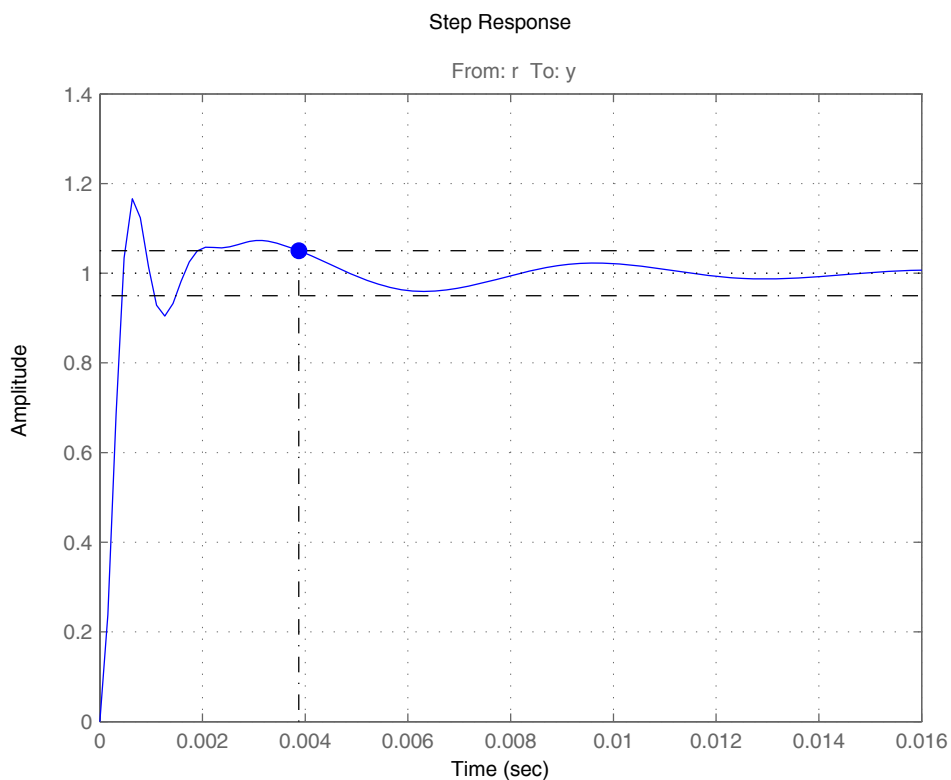


Figure 11: Risposta al gradino del sistema controllato.

di pulsazione desiderata e di ampiezza 10^{-2} Nm. Il sistema al quale l'ingresso è applicato ha come funzione di trasferimento $G_{\tau_r}(s)/(1 + C(s)G_v(s))$.

In modo simile, utilizzando ancora il comando `lsim` è possibile valutare sperimentalmente l'effetto del disturbo ν sull'uscita del sistema (figura 13). La funzione di trasferimento in questo caso sarà

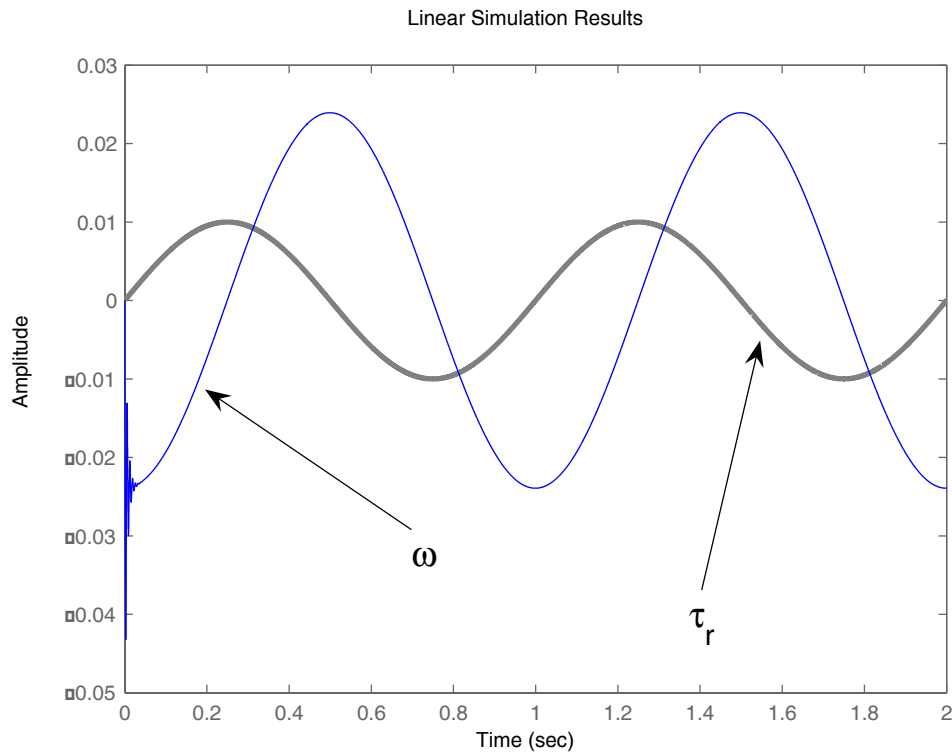


Figure 12: Risposta del sistema controllato ad un segnale sinusoidale $10^{-2} \sin(2\pi t)$ applicato come disturbo sulla coppia resistente.

$-(C(s)G_v(s))/(1 + C(s)G_v(s))$, mentre il disturbo è stato simulato dal seguente segnale

$$\nu(t) = \frac{10}{\sum_{i=1}^3 \nu_i} (\nu_1 \sin(2 \cdot 10^4 t) + \nu_2 \cos(3.5 \cdot 10^4 t) + \nu_3 \sin(10^5 t + \frac{\pi}{4}))$$

dove le ampiezze sono generate casualmente, indipendentemente ed uniformemente distribuite nell'intervallo $[0; 1]$, di valore $\nu_1 = 0.45465$, $\nu_2 = 0.27236$ e $\nu_3 = 0.42318$.

Come si nota dalle verifiche sperimentali riportate in figura 11, 12 e 13, il sistema controllato rispetta tutte le specifiche di progetto.

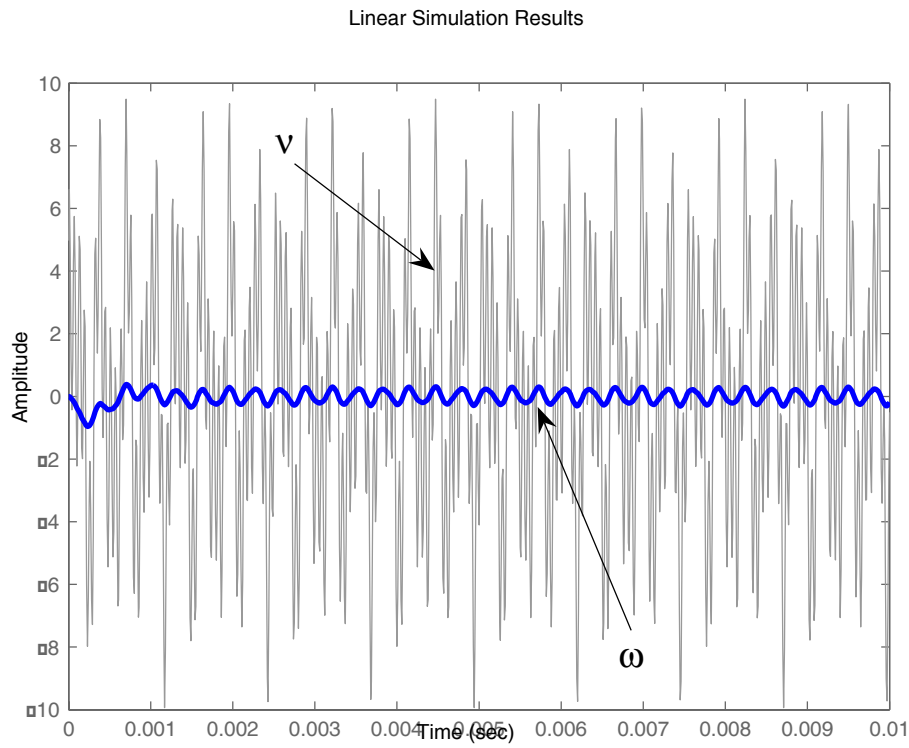


Figure 13: Risposta del sistema controllato ad un disturbo di misura ν .