

Numero di matricola

-	-	$= \alpha - 1$	$= 10\beta - 1$	$= 100\gamma - 1$	-
---	---	----------------	-----------------	-------------------	---

Si consideri un semplice modello di trasduttore elettromeccanico per vibrazioni rappresentato in fig.1. Esso può essere schematizzato con un guscio esterno di massa trascurabile contenente all'interno una piccola massa nota. Essa è vincolata al contenitore stesso mediante un sistema molla-smorzatore ed è libera di oscillare verticalmente. La trasduzione elettromeccanica è rappresentata dallo smorzatore b_e .

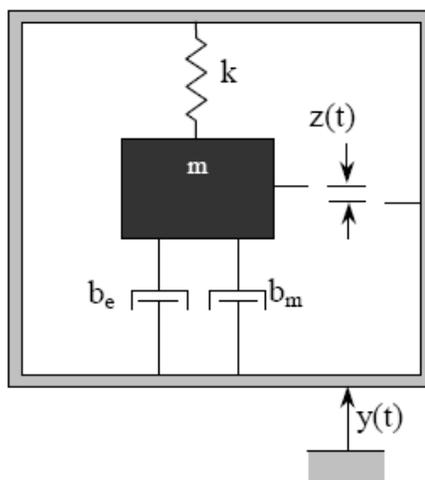


Figure 1: Sistema elettromeccanico da controllare.

Il sistema, trascurando la presenza della forza di gravità, risulta descritto dalla seguente equazione:

$$m\ddot{z} + (b_e + b_m)\dot{z} + kz = -m\ddot{y} \quad (1)$$

dove $z(t)$ è l'allungamento della molla, $y(t)$ la posizione assegnata al contenitore, $m = 200 + \alpha$ g la massa mobile interna, $b_m = b = 1Ns/m$ e $k = 10 + \beta$ N/m rispettivamente il coefficiente di attrito meccanico e la costante elastica della molla, $b_e = 1Ns/m + \gamma$ il coefficiente di attrito dovuto alla trasduzione elettromeccanica. Per testare la qualità e l'affidabilità del sensore come indicatore dinamico di posizione si desidera controllare la posizione $z(t)$ della massa mobile supponendo di agire direttamente sulla posizione $y(t)$.

- A) Portare il sistema in forma di stato ed esplicitare le matrici A, B, C, D del sistema considerando il sistema inizialmente a riposo. Ricavare la funzione di trasferimento fra $y(t)$ e $z(t)$.
- B) Tracciare manualmente i diagrammi di Bode asintotici di ampiezza e fase.
- C) Per la funzione di trasferimento ricavata al punto A), si consideri il progetto di un controllore che soddisfi le seguenti specifiche:
 - C1) assegnato un riferimento a gradino costante di 2 mm la massa m deve oscillare garantendo a regime un errore minore del 0.025%.
 - C2) Essendo il contenitore di altezza limitata e pari a 2.3 mm la massa m , a partire dalla posizione centrale di riposo, deve evitare di urtare le pareti superiore ed inferiore del contenitore e deve raggiungere a regime il valore assegnato (C1) in un tempo non superiore a 50 ms;
 - C3) supponendo che il trasduttore di misura di $z(t)$ sia affetto da rumore sinusoidale per pulsazioni superiori a $30 rad/s$, si cerchi di attenuare tali disturbi di un fattore pari a 10^2 .

Soluzione

- A) Essendo il sistema lineare, L-trasformando l'equazione con condizioni iniziali nulle, è semplice calcolare la funzione di trasferimento $G(s) \stackrel{def}{=} \frac{Z(s)}{Y(s)}$. In particolare ponendo $b^* = b_e + b_m$ si ha:

$$G(s) = -\frac{s^2}{s^2 + \frac{b^*}{m}s + \frac{k}{m}} \quad (2)$$

Si osservi che il sistema non è strettamente causale essendo presente una doppia derivazione dell'ingresso corrispondente ad un numero equivalente di poli e zeri.

Esprimendo il sistema in forma matriciale una possibile rappresentazione è la seguente:

$$\begin{cases} \dot{X} \stackrel{def}{=} AX + Bu = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b^*}{m} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y \stackrel{def}{=} CX + Du = \left(\frac{k}{m} \quad \frac{b^*}{m} \right) X + [-1]u \end{cases}$$

Fissando i parametri α, β, γ nulli si ottiene numericamente:

$$G(s) = \frac{-s^2}{(s^2 + 10s + 50)}$$

- B) I diagrammi di Bode asintotici di ampiezza e fase sono riportati in (fig.2).

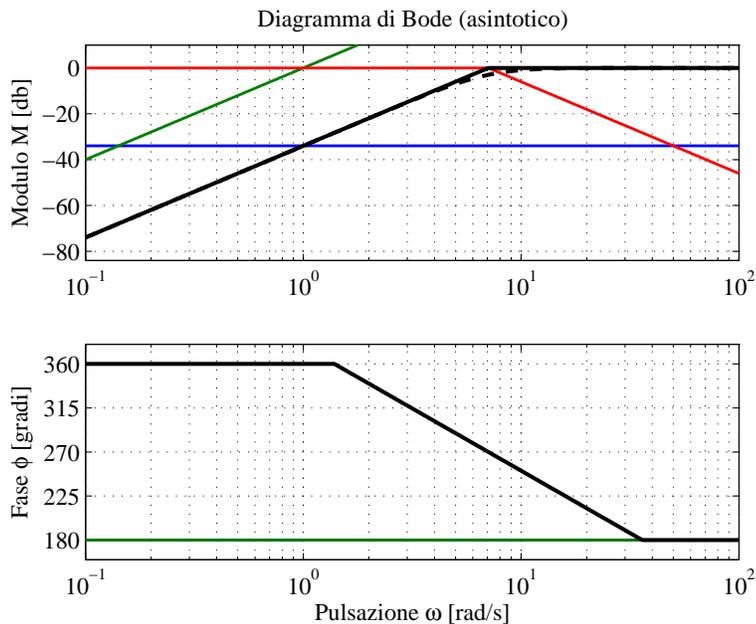


Figure 2: Diagrammi di Bode di ampiezza e fase asintotici e reali della funzione di trasferimento ad anello aperto calcolata al punto B).

- C) Consideriamo ora il progetto di un controllore in grado di garantire le specifiche statiche e dinamiche richieste. Ci si riferisce ad un sistema a blocchi in retroazione negativa come riportato in fig.3. Essendo l'impianto ad anello aperto asintoticamente stabile, per progettare il controllore è possibile operare direttamente sui diagrammi di Bode.

Per le specifica statica ci si riferisce al progetto di un controllore del tipo

$$C(s) = \frac{K}{s^t} \hat{C}(s), \quad \text{con} \quad \hat{C}(0) = 1 .$$

Si consideri la scelta del tipo t e della costante di guadagno K_c del controllore. In particolare è conveniente lavorare con un guadagno negativo del controllore.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = E^* = 0.025.$$

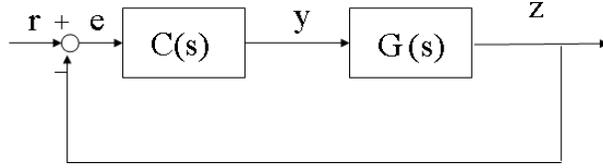


Figure 3: Schema a blocchi utilizzato per il controllo del sistema.

Si osservi che la funzione di trasferimento ad anello aperto è di tipo -2 avendo due zeri nell'origine. Per limitare l'errore bisogna rendere la funzione di trasferimento

$$\frac{E(s)}{Y(s)} = \frac{1}{1 + C(s)G(s)}$$

di tipo 0 ed avendo $G(s)$ due zeri nell'origine, è necessario introdurre due poli nell'origine nel controllore. Infatti, utilizzando il teorema del valore finale si ha che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + C(s)G(s)} \frac{2 \cdot 10^{-3}}{s} \leq 0.025 \cdot 2 \cdot 10^{-3}$$

e

ponendo $C(s) = \frac{K_c}{s^2} \hat{C}(s)$ si ottiene

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{K_c}{m}} < E^*$$

Quindi

$$|K_c| \geq |E^* \frac{k}{m}| = 2000.$$

Con tale compensazione si ottiene diagramma di Bode riportato in fig.4.

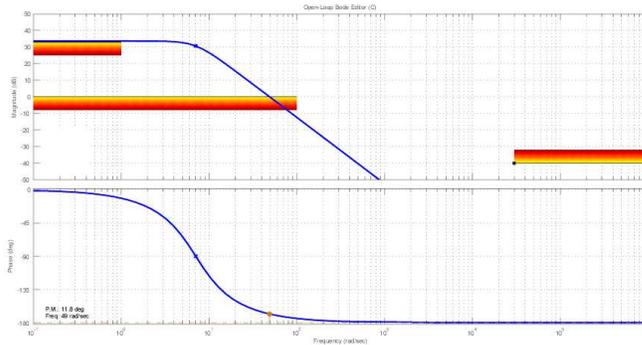


Figure 4: Diagrammi di Bode ottenuti con il controllore $C(s) = \frac{-2400}{s^2}$.

La specifica sulla posizione della massa mobile da raggiungere evitando la rottura in un tempo fissato si traduce in una specifica sulla sovralongazione e sul tempo di assestamento. In particolare risulta che:

$$S = \frac{|z_{max} - z_r|}{|z_r|} = \frac{0.0022 - 0.002}{0.002} = 10\%.$$

Ciò ammette che il sistema in anello chiuso sia approssimabile con un sistema del secondo ordine con smorzamento dei poli dominanti pari a 0.5912 (come si ricava dalla espressione della sovralongazione dei sistemi di secondo ordine $s = e^{-\frac{\pi \delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$). Sul piano di Bode, questo significa che si ammette un margine di fase $\phi_M \approx 60^\circ$.

Tale specifica non risulta attualmente rispettata avendo il sistema un margine di fase di circa 12° (fig.4).

La specifica sul tempo di assestamento, per il caso di sistema in anello chiuso a due poli dominanti indica che la pulsazione naturale dei due poli deve essere $\omega_N \geq 3/\delta T_a \approx 101 \text{ rad/sec}$. Questa specifica in particolare si riflette nel chiedere che il diagramma delle ampiezze di $C(j\omega)G(j\omega)$ intersechi l'asse a 0db a pulsazioni superiori a 101 rad/sec .

Tale condizione non è rispettata avendo attualmente una pulsazione di taglio di 49 rad/sec (fig.4).

Per migliorare la pulsazione di taglio si potrebbe agire aumentando il guadagno del controllore ottenendo tuttavia valori ancora insufficienti e una drastica riduzione del margine di fase fino all'instabilità. Risulta più conveniente utilizzare un'azione anticipatrice che consente di aumentare il margine di fase. Ponendo ad esempio uno zero reale in -13.5 si ottengono i diagrammi di Bode riportati fig.5. In tal caso si hanno un margine di fase di 88.9° e una pulsazione di taglio di

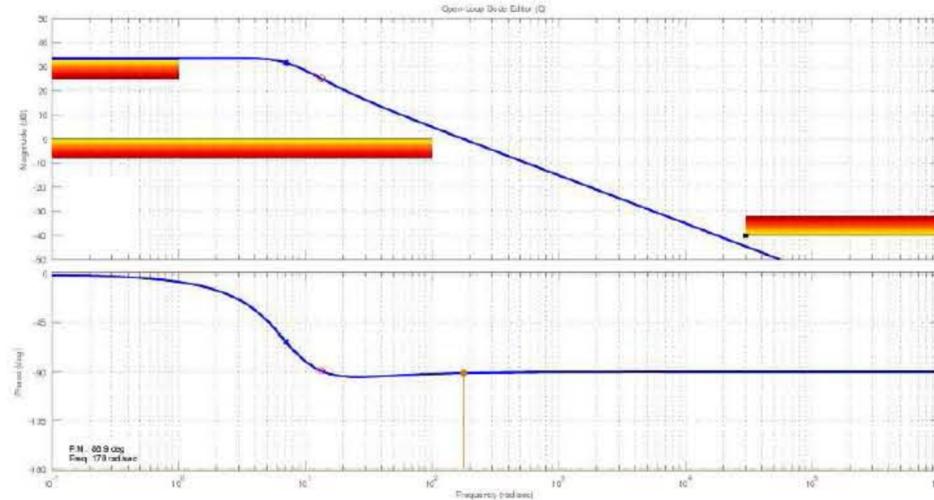


Figure 5: Diagramma di Bode del sistema dopo la compensazione $C(s) = -2400 \frac{(1+0.074s)}{s^2}$

178 rad/sec e quindi entrambe le specifiche risultano rispettate.

Per imporre la specifica di reiezione dei disturbi in alta frequenza, ovvero che sia $|C(s)G(s)| < 10^{-2}|1 + C(s)G(s)|$ nelle pulsazioni di interesse. Ciò equivale approssimativamente a chiedere che sia $|C(j\omega)G(j\omega)|_{db} \leq -100\text{db}, \forall \omega > 30000\text{rad/s}$. Come si può vedere questa specifica risulta già garantita ed il controllore risulta peraltro causale (diagramma di Bode riportato in fig.5). Il controllore risultante è dato da

$$C(s) = -2400 \frac{(1 + 0.074s)^2}{s^2}.$$

A verifica finale del progetto del controllore, viene riportata la risposta al gradino unitario del sistema in anello chiuso in fig.6

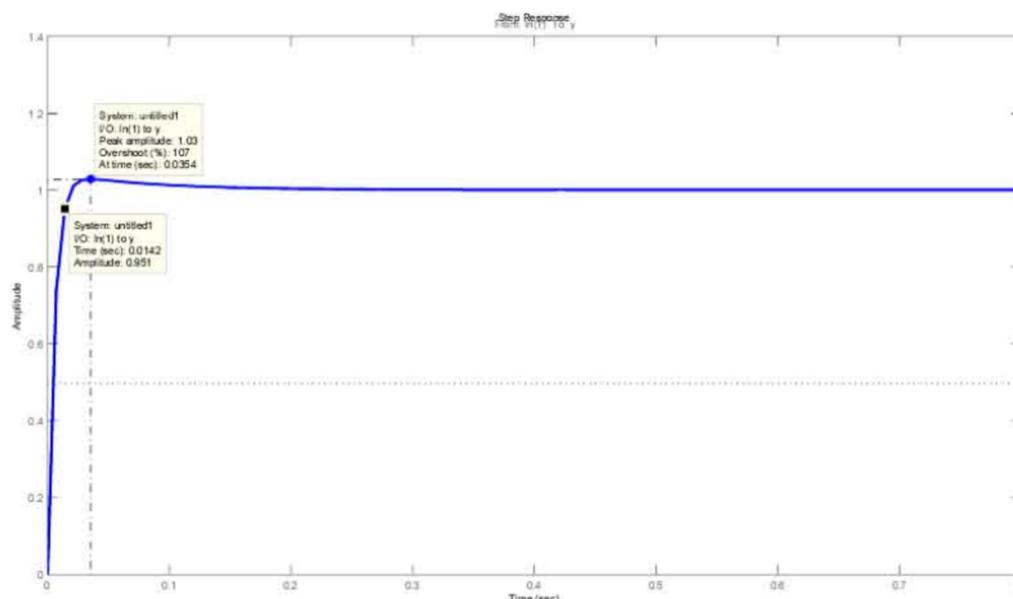


Figure 6: Risposta al gradino unitario del sistema chiuso in retroazione.