Regolazione e Controllo dei Sistemi Meccanici — 13 Febbraio 2006

Numero di matricola						
	$-$	$-$	$-$	$-$	$= 10\alpha - 1$	$= 10\beta - 1$

1) Si consideri il pendolo schematizzato in figura 1 e descritto dalla seguente equazione:

$$mL^2\ddot{\theta} - mgL\sin\theta = C.$$

Sia $m = 20 + \frac{\alpha}{10}$ kg la massa del pendolo, $L = 3 + \frac{\beta}{10}$ m la sua lunghezza, $g = 9.81$ m/s^2 l'accelerazione di gravità. Si desidera controllare l'angolo θ del pendolo, agendo sulla coppia di controllo C.

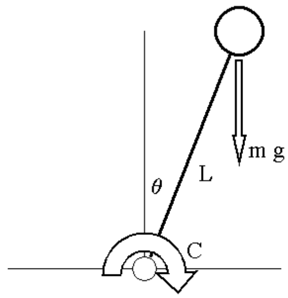

Figure 1: Sistema meccanico da controllare

A) Si calcolino i punti di equilibrio del sistema nel caso in cui la coppia C sia costante e pari a $C = \bar{C} = 0$.

B) Si linearizzi il sistema in un intorno della configurazione di equilibrio ricavata al punto A) più prossima a quella rappresentata in figura. Si determini una rappresentazione in forma di stato per il sistema lineare ottenuto e si discuta la stabilità dell'equilibrio.

C) Per il sistema linearizzato si ricavi la funzione di trasferimento tra l'uscita θ e l'ingresso C.

D) Per la funzione di trasferimento ricavata, si progetti un controllore in retroazione in modo da soddisfare le seguenti specifiche:

D.1) partendo dalla configurazione di equilibrio precedentemente ottenuta, il pendolo sia in grado di raggiungere a regime un qualsiasi angolo $\hat{\theta}$ con errore nullo;

D.2) nel raggiungere l'angolo $\hat{\theta}$, sia garantita una sovraelongazione non superiore al 30% e un tempo di assestamento non superiore a 2.5 s;

D.3) siano attenuati di un fattore 10^4 gli effetti di rumore sinusoidale, con pulsazione superiore a 500 rad/s, agente sul trasduttore di misura dell'angolo θ.

E) Si supponga di voler realizzare il controllore precedentemente progettato per mezzo di un programma al computer, in cui ogni calcolo sia svolto su tempi multipli del tempo di "clock" $T = 0.001$ s. Si disponga di una prima porta di ingresso che legga il valore istantaneo del riferimento $\theta_r(t)$ e di una seconda porta di ingresso che legga il valore istantaneo dell'angolo del pendolo $\theta(t)$. Sia inoltre presente una porta di uscita che acquisisca il valore istantaneo calcolato del controllo $C(t)$, per renderlo disponibile all'impianto da controllare. Utilizzando uno pseudo linguaggio di programmazione, si scriva un programma che simuli il controllore progettato.

OPZIONALE) Utilizzando il programma Simulink, si simuli l'evoluzione dinamica del sistema in anello chiuso ottenuto al punto D) nel caso in cui il riferimento sia $\theta_r = 0$ rad, a partire dalla configurazione iniziale $\theta(0) = 0$ rad, $\dot{\theta}(0) = 1$ rad/s.

2) Si consideri il sistema massa-molla-smorzatore rappresentato in figura 2. Al variare del parametro b nell'intervallo $0 \leq b \leq 2\sqrt{mk}$, si discutano i modi del sistema e si traccino qualitativamente i diagrammi di Nyquist della funzione di trasferimento che lega la forza $f(t)$ e la posizione $y(t)$.

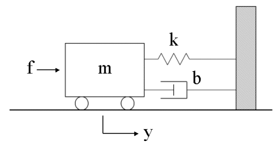

Figure 2: Sistema massa-molla-smorzatore

Soluzione

Esercizio 1

A) Scelte come variabili di stato $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, il sistema può essere descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{g}{L}\sin x_1 + \frac{C}{mL^2}. \end{cases}$$

Nel caso $C = \bar{C} = 0$, annullando le derivate delle variabili di stato si ottengono le configurazioni di equilibrio

$$\bar{x}_1 = \bar{\theta} = k\pi, \qquad \bar{x}_2 = \bar{\dot{\theta}} = 0,$$

con $k = 0, 1, 2, \ldots$.

B) La configurazione di equilibrio più prossima a quella rappresentata è $\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = 0$. Il sistema linearizzato può essere ottenuto introducendo le variabili traslate: $\tilde{x} = x - \bar{x} = x$, $\tilde{u} = u - \bar{u} = C - \bar{C}$=C, $\tilde{y} = y - \bar{y} = \theta - \bar{\theta} = \theta$ e le matrici $\mathbf{A} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(\bar{x},\bar{u})}$, $\mathbf{B} = \frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{(\bar{x},\bar{u})}$, $\mathbf{C} = \frac{\partial h}{\partial x}\big|_{(\bar{x},\bar{u})}$, $\mathbf{D} = \frac{\partial h}{\partial u}\big|_{(\bar{x},\bar{u})}$. Si ottengono le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \mathbf{A}\tilde{x} + \mathbf{B}\tilde{u}, \\ \tilde{y} &= \mathbf{C}\tilde{x} + \mathbf{D}\tilde{u}, \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{mL^2} \end{bmatrix}; \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{D} &= 0. \end{aligned}$$

Gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ sono in $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{g}{L}}$. Poiché il sistema ha un autovalore positivo, il punto di equilibrio risulta instabile.

C) In un intorno della configurazione di equilibrio $\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = 0$ è possibile approssimare l'equazione del moto del sistema con la seguente:

$$mL^2\ddot{\theta} - mgL\theta = C.$$

L-trasformando la precedente equazione si ottiene

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{mL^2s^2 - mgL}.$$

D) La funzione di trasferimento del sistema $G(s)$ ha un polo positivo. È quindi opportuno impiegare la tecnica del doppio anello di retroazione, schematizzata in fig.3. Per prima cosa, utilizzando il luogo delle radici della f.d.t.

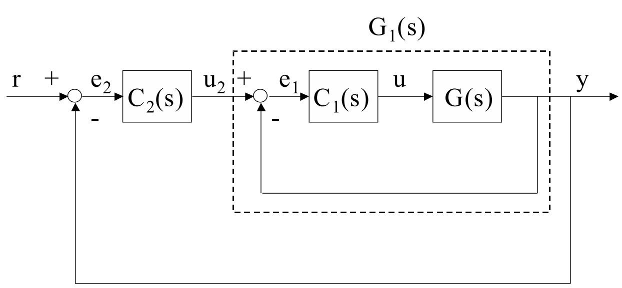

Figure 3: Schema del sistema di controllo da progettare con la tecnica del doppio anello di retroazione

$G(s)$ si progetta un controllore $C_1(s)$ tale che la f.d.t. dell'anello chiuso più interno $G_1(s) = \frac{C_1(s)G(s)}{1+C_1(s)G(s)}$ sia asintoticamente stabile.

Come si osserva in fig.4, la f.d.t. $G_1(s) = \frac{C_1(s)G(s)}{1+C_1(s)G(s)}$ non può essere resa asintoticamente stabile con un controllore $C_1(s)$ puramente proporzionale. Per rendere la f.d.t. $G_1(s)$ asintoticamente stabile, è possibile impiegare una rete anticipatrice (fig.5). Inserendo ad esempio nel controllore $C_1(s)$ uno zero in -1, un polo in -5 e aumentando il guadagno a 1000 si ottiene $C_1(s) = 1000\frac{s+1}{0.2s+1}$ e $G_1(s) = \frac{27.7778(s+1)}{(s+0.5148)(s^2+4.485s+22.2)}$, i cui poli sono in -0.5148 e

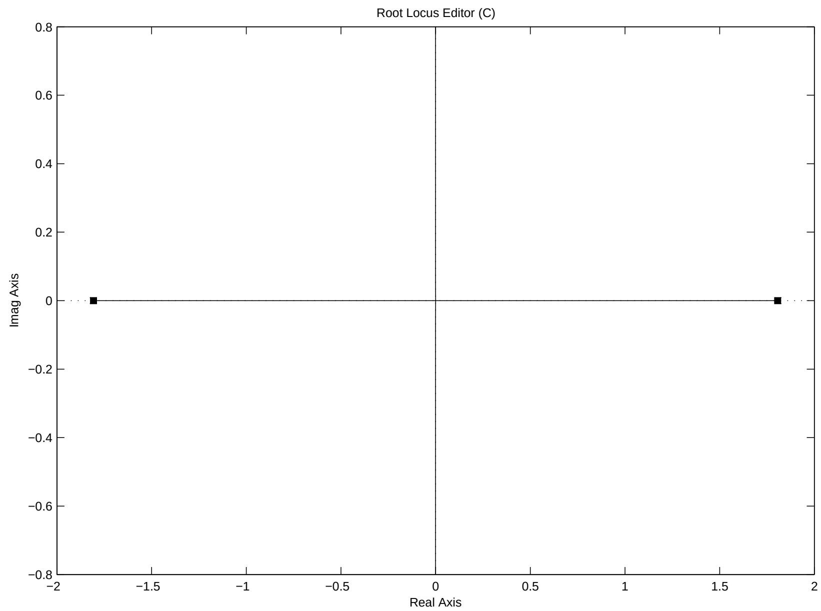

Figure 4: Luogo delle radici della f.d.t. $G(s)$

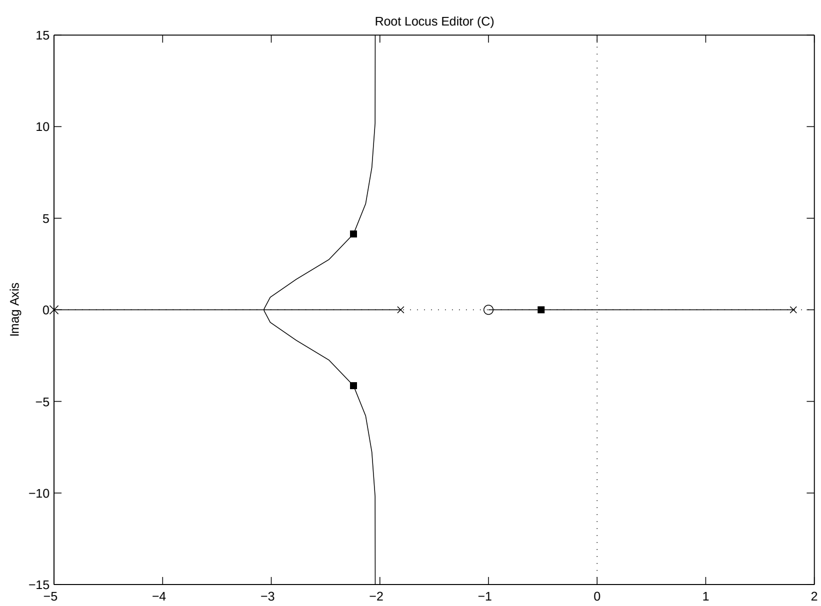

Figure 5: Luogo delle radici della f.d.t. $C_1(s)G(s)$

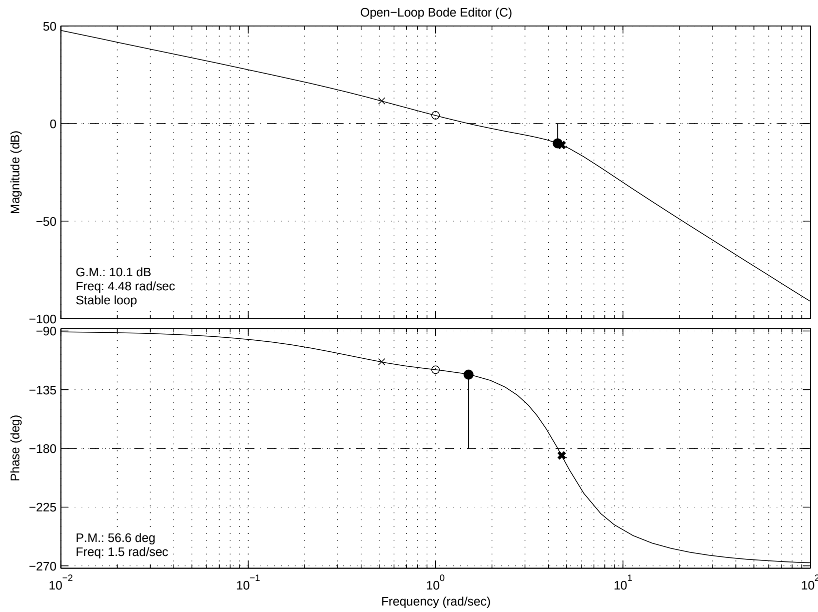

Figure 6: Diagrammi di Bode della f.d.t. $C_2(s)G_1(s)$ con $C_2(s) = \frac{1}{s}$

in $-2.2426 \pm 4.1436\ i$. A questo punto, il sistema $G_1(s)$ viene chiuso in retroazione con il controllore $C_2(s)$, il cui compito è quello di soddisfare le specifiche e il cui progetto può essere fatto sui diagrammi di Bode della f.d.t. di anello $C_2(s)G_1(s)$.

Facendo riferimento al progetto di un controllore nella forma:

$$C_2(s) = \frac{K}{s^t}\hat{C}(s), \quad \text{con} \quad \hat{C}(0) = 1,$$

la scelta del *tipo* t e della costante di guadagno K del controllore $C_2(s)$ può essere fatta in base alle specifiche statiche. Affinché l'errore a regime per un riferimento a gradino sia nullo, è sufficiente introdurre un polo nell'origine. I diagrammi di Bode della f.d.t. $C_2(s)G_1(s)$, con $C_2(s) = \frac{1}{s}$, vengono riportati in fig.6.

La massima sovraelongazione ammessa per il sistema in anello chiuso è del 30%. Tale specifica si traduce nell'imporre che il sistema in anello chiuso sia approssimabile ad un sistema del secondo ordine con uno smorzamento dei poli dominanti pari o superiore a $\delta = 0.3579$ (come si ricava dall'espressione della sovraelongazione per i sistemi del secondo ordine $S = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$). Sul piano di Bode, questo significa che si ammette un margine di fase $\phi_M \approx 36^o$. La specifica sul tempo di assestamento, per il caso di sistema in anello chiuso a due poli dominanti stabilito sulla base della precedente specifica, indica che la pulsazione naturale dei due poli deve essere $\omega_N \geq \frac{3}{\delta T_a} \approx 3.4\ \ rad/s$. Questa specifica si traduce nel chiedere che il diagramma di Bode delle ampiezze di $C_2(\jmath\omega)G_1(\jmath\omega)$ intersechi l'asse a $0db$ per pulsazioni superiori a $3.4\ \ rad/s$.

Per soddisfare queste specifiche è necessario introdurre un'opportuna azione anticipatrice. Ad esempio fissando il guadagno $k = 1.3$ e piazzando uno zero in -1 si ottengono i diagrammi di Bode riportati in fig.7. Così facendo si ottengono un margine di fase di 41.1^o e una pulsazione di taglio di $6.63\ \ rad/sec$.

A questo punto rimane da imporre la specifica di reiezione dei disturbi in alta frequenza:

$$|C_2(j\omega)G_1(j\omega)|_{db} \leq -80\ \ db$$

per $\omega \geq 500\ \ rad/s$. Si garantisce questa specifica inserendo nel compensatore un polo in alta frequenza. Ponendo il polo in -200, si ottiene il diagramma di Bode riportato in fig.8. Le specifiche relative a margine di fase e pulsazione di taglio rimangono verificate.

Il controllore finale ottenuto risulta:

$$C_2(s) = 1.3\frac{(s+1)}{s(0.005s+1)}.$$

Come si vede in fig.9, la risposta al gradino del sistema in anello chiuso rispetta le specifiche assegnate.

E) Il controllore C_1 ha in ingresso l'errore $e_1(t) = u_2(t) - y(t)$ e in uscita il controllo $u(t)$. Per prima cosa, è necessario ricavare l'equazione differenziale del controllore. Posto $C_1(s) = k_1\frac{\tau_1 s+1}{\tau_2 s+1}$ si ottiene:

$$(\tau_2 s + 1)\, U(s) = (k_1\tau_1 s + k_1)\, E_1(s),$$

da cui, per anti-trasformazione e supponendo nulle le condizioni iniziali, si ricava l'equazione in forma normale:

$$\dot{u}(t) + \frac{1}{\tau_2}u(t) = \frac{k_1\tau_1}{\tau_2}\dot{e}_1(t) + \frac{k_1}{\tau_2}e_1(t).$$

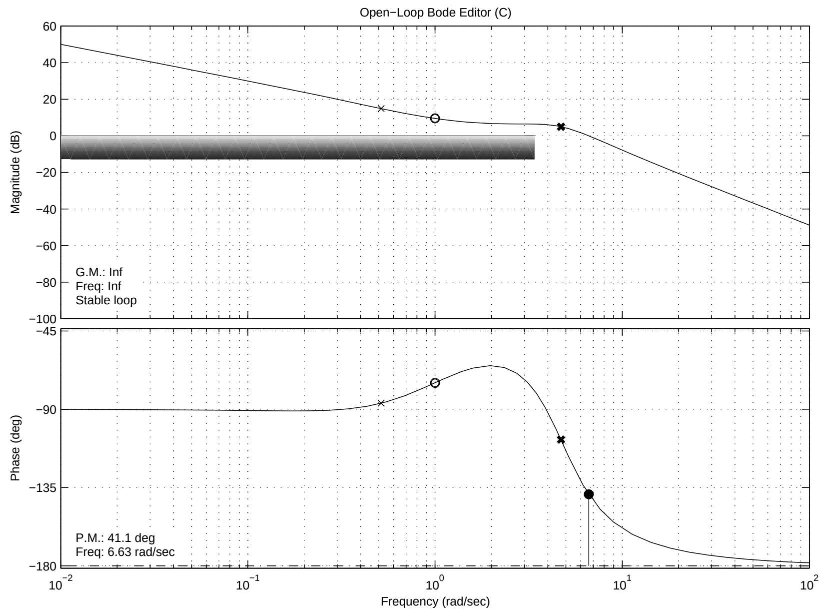

Figure 7: Diagrammi di Bode della f.d.t. $C_2(s)G_1(s)$ con $C_2(s) = 1.3\frac{s+1}{s}$

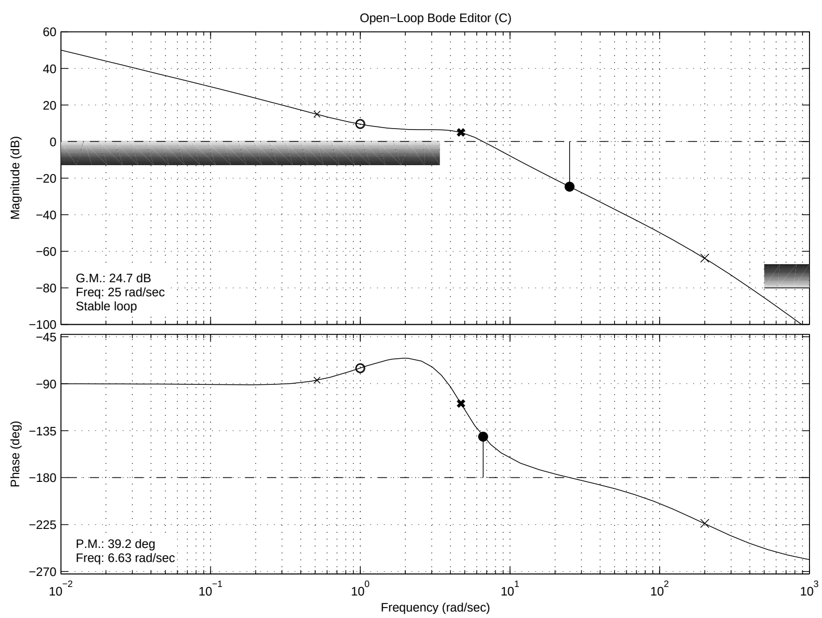

Figure 8: Diagramma di Bode della f.d.t. $C_2(s)G_1(s)$ con $C_2(s) = 1.3\frac{(s+1)}{s(0.005s+1)}$

A questo punto, è immediato ottenere la rappresentazione del controllore C_1 in forma canonica di controllo, indicando con w il relativo stato e ricordando che il sistema non è strettamente proprio:

$$\begin{aligned}\dot{w}(t) &= A_a w(t) + B_a e_1(t),\\ u(t) &= C_a w(t) + D_a e_1(t),\end{aligned}$$

dove:

$$A_a = -\frac{1}{\tau_2}, \qquad B_a = 1,$$

$$C_a = \frac{k_1}{\tau_2} - \frac{k_1\tau_1}{\tau_2^2}, \quad D_a = \frac{k_1\tau_1}{\tau_2}.$$

Il controllore C_2 ha in ingresso l'errore $e_2(t) = r(t) - y(t)$ e in uscita il segnale $u_2(t)$. Anche in questo caso, posto $C_2(s) = k_2\frac{\tau_3 s+1}{s(\tau_4 s+1)}$, è necessario ricavare l'equazione differenziale del controllore. Si ottiene:

$$\left(\tau_4 s^2 + s\right) U_2(s) = \left(k_2\tau_3 s + k_2\right) E_2(s),$$

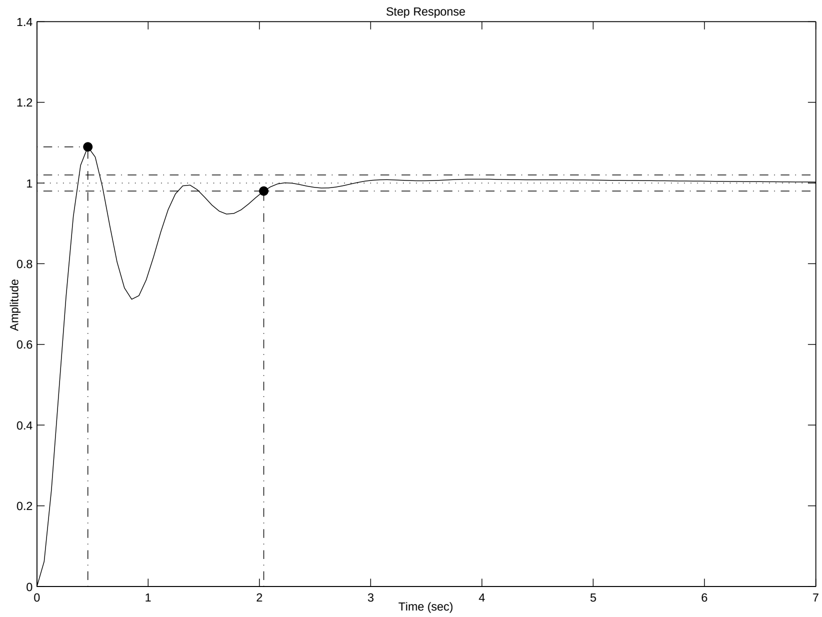

Figure 9: Risposta al gradino della f.d.t. di anello chiuso

da cui, per anti-trasformazione e supponendo nulle le condizioni iniziali, si ricava l'equazione in forma normale:

$$\ddot{u}_2(t) + \frac{1}{\tau_4}\dot{u}_2(t) = \frac{k_2\tau_3}{\tau_4}\dot{e}_2(t) + \frac{k_2}{\tau_4}e_2(t).$$

A questo punto, è possibile ottenere la rappresentazione del controllore C_2 in forma canonica di controllo, indicando con $\mathbf{z}$ il relativo stato:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{A_b}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B_b}e_2(t),\\ u_2(t) &= \mathbf{C_b}\mathbf{z}(t) + \mathbf{D_b}e_2(t),\end{aligned}$$

dove:

$$\mathbf{A_b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\tau_4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B_b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C_b} = \begin{bmatrix} \frac{k_2}{\tau_4} & \frac{k_2\tau_3}{\tau_4} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D_b} = 0.$$

Discretizzando la variabile tempo e indicando con i il generico istante di calcolo, è possibile approssimare la derivata prima degli stati w e $\mathbf{z}$ con una differenza finita:

$$\dot{w}(i) \simeq \frac{w(i+1) - w(i)}{T}, \qquad \dot{\mathbf{z}}(i) \simeq \frac{\mathbf{z}(i+1) - \mathbf{z}(i)}{T}.$$

La realizzazione in tempo discreto del controllore C_1 è quindi la seguente:

$$\begin{aligned} w(i+1) &= A_{d_a}w(i) + B_{d_a}e_1(i),\\ u(i) &= C_{d_a}w(i) + D_{d_a}e_1(i),\end{aligned}$$

dove:

$$A_{d_a} = [TA_a + 1] = 1 - \frac{T}{\tau_2},$$
$$B_{d_a} = TB_a = T,$$
$$C_{d_a} = C_a,$$
$$D_{d_a} = D_a.$$

La realizzazione in tempo discreto del controllore C_2 è invece:

$$\begin{aligned}\mathbf{z}(i+1) &= \mathbf{A_{d_b}}\mathbf{z}(i) + \mathbf{B_{d_b}}e_2(i),\\ u_2(i) &= \mathbf{C_{d_b}}\mathbf{z}(i),\end{aligned}$$

dove:

$$\mathbf{A_{d_b}} = [T\mathbf{A_b} + \mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 - \frac{T}{\tau_4} \end{bmatrix},$$

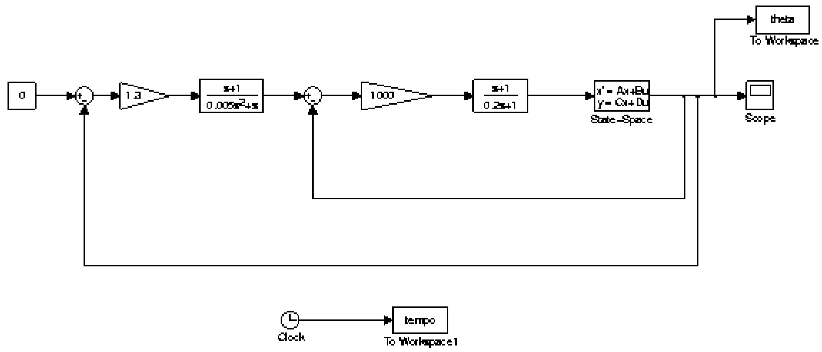

Figure 10: Schema Simulink per la simulazione del sistema in anello chiuso

$$\mathbf{B_{d_b}} = T\mathbf{B_b} = \begin{bmatrix} 0 \\ T \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C_{d_b}} = \mathbf{C_b}.$$

Il segmento di un programma per l'implementazione su computer del controllore globalmente progettato risulterebbe scritto, in uno pseudo-linguaggio di programmazione:

```
  ...
  constant k1, k2, tau1, tau2, tau3, tau4, T, T_max;
  constant z1_0=0;
  constant z2_0=0;
  constant w_0=0;
  ...
  z1=z1_0;
  z2=z2_0;
  w=w_0;
  for i=0:T_max/T
    u2=k2/tau4*z1+k2*tau3/tau4*z2;
    r=read(input1);
    y=read(input2);
    e2=r-y;
    e1=u2-y;
    z1_buffer=z1;
    z2_buffer=z2;
    z1=z1_buffer+T*z2_buffer;
    z2=(1-T/tau4)*z2_buffer+T*e2;
    u=(k1/tau2-k1*tau1/tau2^2)*w+k1*tau1/tau2*e1;
    write(u,output);
    w_buffer=w;
    w=(1-T/tau2)*w_buffer+T*e1;
end
```

Si noti che, avendo utilizzato la tecnica del doppio anello di retroazione, è necessario prima di tutto calcolare il segnale di uscita del controllore più esterno $u_2(i)$, per poi calcolare l'ingresso del controllore più interno $e_1(i) = u_2(i) - y(i)$.

OPZIONALE Poiché si chiede di simulare il sistema in anello chiuso nel caso in cui lo stato iniziale del pendolo non è nullo, è necessario descrivere il pendolo in forma di stato per mezzo delle matrici **A**, **B**, **C** e **D** e specificare le condizioni iniziali $x_0 = [0\ 1]$. Lo schema Simulink progettato è riportato in fig.10. Si noti che il riferimento è nullo. L'evoluzione temporale del sistema viene riportata in fig.11. Si osserva che lo schema di controllo progettato è in grado di riportare il pendolo nello stato $\theta = \dot{\theta} = 0$.

Esercizio 2

- Il sistema può essere rappresentato in forma di stato per mezzo della matrice dinamica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori della matrice A valgono:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}.$$

Il discriminante risulta positivo per $b > 2\sqrt{mk}$, quindi per valori esterni al campo di variazione di b indicato nel testo.

Al variare di di b all'interno del campo indicato, si possono avere diverse situazioni.

- Caso $0 < b < 2\sqrt{mk}$. Si hanno autovalori complessi coniugati $\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega$, con $\sigma = -\frac{b}{2m}$ e $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$. I modi propri del sistema sono del tipo $e^{\sigma t}\sin\omega t$, $e^{\sigma t}\cos\omega t$. Essendo $\sigma < 0$, i modi sono convergenti a zero.
- Caso $b = 0$. Si hanno autovalori immaginari puri $\lambda_{1,2} = \pm j\omega = \pm j\sqrt{\frac{k}{m}}$. Si hanno modi oscillanti, limitati ma non convergenti, del tipo $\sin\omega t$, $\cos\omega t$.
- Caso $b = 2\sqrt{mk}$. Gli autovalori della matrice A sono reali e coincidenti: $\lambda_{1,2} = -\sqrt{\frac{k}{m}}$. La molteplicità algebrica degli autovalori è 2, mentre la molteplicità geometrica è 1. La matrice A è infatti simile alla matrice di Jordan

$$J = \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{k}{m}} & 1 \\ 0 & -\sqrt{\frac{k}{m}} \end{bmatrix}.$$

  I modi del sistema sono del tipo $e^{\lambda t}$, $te^{\lambda t}$; essi sono convergenti a zero, essendo $\lambda < 0$.

- La f.d.t. che lega l'ingresso $f(t)$ e l'uscita $y(t)$ è

$$G(s) = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{m}{k}s^2 + \frac{b}{k}s + 1}.$$

La f.d.t. ricavata è tipica di un sistema del secondo ordine, con pulsazione naturale $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e smorzamento dei poli $\delta = \frac{b}{2\sqrt{mk}}$. Al variare di b nell'intervallo specificato, δ varia da 0 a 1. I diagrammi di Nyquist dipendono dal valore di δ, quindi da b. In fig.12 vengono riportati alcuni diagrammi di Nyquist, relativi al caso $k = 1$, $m = 1$, per valori decrescenti di b. Si nota che al diminuire di b il diagramma di Nyquist si allarga. Il caso $b = \delta = 0$ è particolare, poiché Matlab non è in grado di tracciare correttamente il diagramma di Nyquist. Tracciando preventivamente i diagrammi di Bode, è comunque possibile tracciare il diagramma di Nyquist, come riportato in fig.13. Si noti che la fase di $G(j\omega)$ è, in questo caso, 0 o $-\pi$.

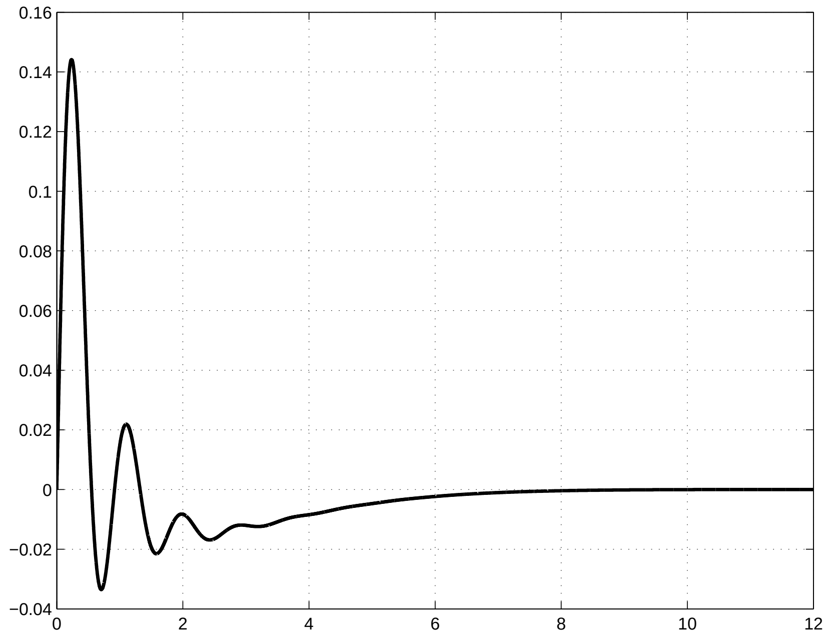

Figure 11: Evoluzione del sistema in anello chiuso nel caso $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 1$

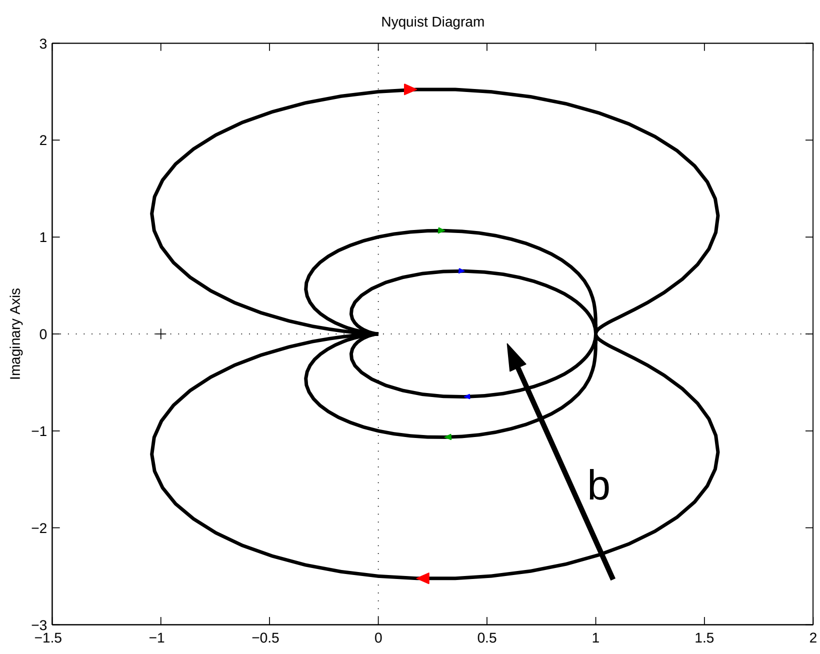

Figure 12: Diagrammi di Nyquist della f.d.t. $G(s)$ al variare del parametro b

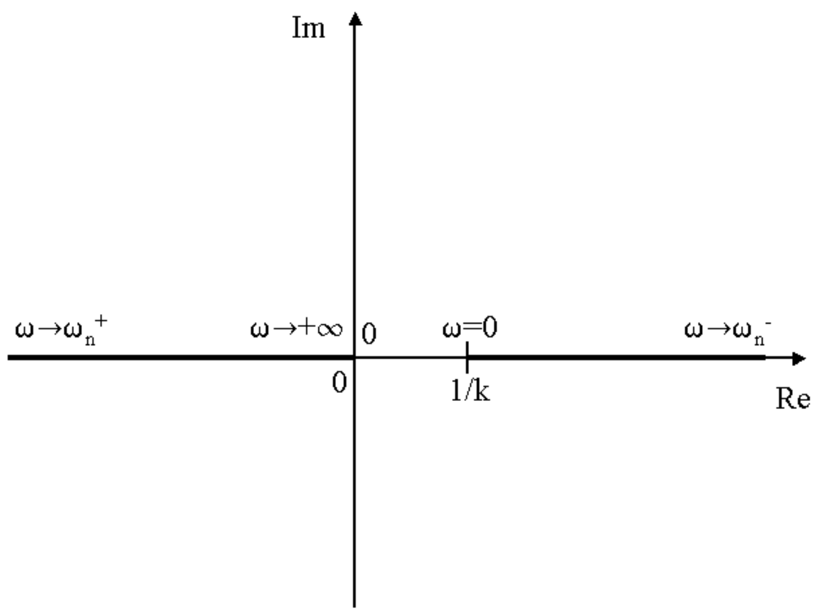

Figure 13: Diagrammi di Nyquist della f.d.t. $G(s)$ per $b = 0$