

Numero di matricola

-	-	$= 10\alpha - 1$	$= 10\beta - 1$	$= 10\gamma - 1$	-
---	---	------------------	-----------------	------------------	---

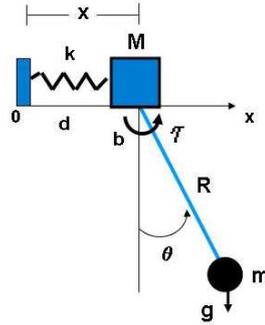


Figure 1: Modello del sistema

Si consideri il sistema riportato in fig.1 in cui un pendolo di massa  $m$  è incernierato tramite un'asta di lunghezza  $R$  ad un carrello di massa  $M$ , collegato ad una parete fissa tramite una molla di costante elastica  $k$  e libero di muoversi longitudinalmente lungo l'asse  $x$ . Siano  $b$  e  $d$  rispettivamente il coefficiente di attrito del pendolo e il coefficiente di attrito tra il carrello e il piano. Si indichi con  $x$  la posizione del carrello e con  $\theta$  l'angolo formato dal pendolo con la verticale al carrello. Sia infine  $\tau$  la coppia che agisce sul pendolo. I valori numerici del sistema sono i seguenti:  $m = 5Kg$ ,  $M = 1Kg$ ,  $R = 0.5(1 + \gamma 10^{-2})m$ ,  $k = 0.1(1 + \alpha 10^{-2})N/m$ ,  $b = (50 + \beta)N s/m$ ,  $d = 1N s$ . La dinamica del sistema risulta

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{mR\dot{\theta}^2 \sin \theta + mg \sin \theta \cos \theta - kx - d\dot{x} + \frac{b}{R}\dot{\theta} \cos \theta - \frac{\cos \theta}{R}\tau}{M + m \sin^2 \theta} \\ \ddot{\theta} = \frac{-mR\dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta - (m+M)g \sin \theta + kx \cos \theta + d\dot{x} \cos \theta - (1 + \frac{M}{m})\frac{b}{R}\dot{\theta} + (1 + \frac{M}{m})\frac{\tau}{R}}{R(M + m \sin^2 \theta)} \end{cases}$$

Si può verificare che, per  $\tau = 0$ , il sistema presenta equilibri in  $x = 0$ ,  $\theta = n 180^\circ$ ,  $\dot{x} = 0$ ,  $\dot{\theta} = 0$ , con  $n \in \mathbf{Z}$ . Scegliendo come vettore di stato  $z = [x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}]$ , come ingresso la coppia  $\tau$  e come uscita  $\theta$ , il sistema linearizzato per  $n = 1$  risulta essere descritto dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & \frac{mg}{M} & -\frac{d}{M} & -\frac{b}{RM} \\ -\frac{k}{RM} & \frac{(m+M)g}{RM} & -\frac{d}{MR} & -\frac{(M+m)b}{mMR^2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{MR} & \frac{(m+M)}{mMR^2} \end{bmatrix}^T \quad C = [0 \ 1 \ 0 \ 0] \quad D = 0$$

- A) Si discuta la stabilità del sistema linearizzato;
- B) Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema e si disegnino i diagrammi di Bode asintotici;
- C) Assumendo che sia sempre valida l'approssimazione lineare, si progetti un controllore che rispetti le seguenti specifiche;
- C1) Il sistema risulti stabile a ciclo chiuso;
  - C2) Il pendolo a partire dalla sua posizione di equilibrio ( $\theta = 180^\circ$ ) raggiunga esattamente un angolo di  $181^\circ$ , assestandosi tra  $180.95^\circ$  e  $181.05^\circ$  dopo un tempo pari a  $T = 1s$  e senza superare l'angolo di  $181.15^\circ$ ;
  - C3) L'angolo  $\theta$  del pendolo viene misurato attraverso un potenziometro affetto da disturbi periodici di frequenza non inferiore a  $1kHz$  e di ampiezza non superiore a 10 gradi. Si richiede che l'effetto di tali disturbi sulla posizione regolata della massa sia limitato ad al più  $\pm 10^{-4}$  gradi.
- D) Si riporti la forma del controllore e si discutano le scelte progettuali.

## Soluzioni

A) Sostituendo i valori numerici, calcolati per  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ , si ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.1 & 49 & -1 & -100 \\ -0.2 & 117.6 & -2 & -240 \end{bmatrix} \quad B = [0 \ 0 \ 2 \ 4.8]^T \quad C = [0 \ 1 \ 0 \ 0] \quad D = 0$$

Gli autovalori della matrice  $A$  risultano  $\lambda_1 = -241.3$ ,  $\lambda_2, \lambda_3 = -0.0833 \pm 0.0986i$ ,  $\lambda_4 = 0.49$ . La presenza di un autovalore a parte reale positiva ( $\lambda_4$ ) rende il sistema instabile.

B) La funzione di trasferimento del sistema, che può essere calcolata con la formula  $G(s) = C[sI - A]^{-1}B + D$ , risulterebbe:

$$G(s) = \frac{4.8(s^2 + 0.1667s + 0.01667)}{(s + 241.3)(s - 0.49)(s^2 + 0.1667s + 0.01667)}$$

C) Essendo il sistema instabile a ciclo aperto, si sceglie l'utilizzo di due controllori in cascata: il primo per garantire la stabilità del sistema ed il secondo per soddisfare le specifiche dinamiche.

C1) Per stabilizzare il sistema basta utilizzare un controllore proporzionale  $C_1(s) = 50$ . La nuova funzione di trasferimento su cui progettare il secondo controllore  $C_2(s)$  risulta essere:

$$G_1(s) = \frac{240(s^2 + 0.1667s + 0.01667)}{(s + 240.3)(s + 0.5092)(s^2 + 0.1666s + 0.01667)}$$

che risulta asintoticamente stabile, avendo tutti i poli a parte reale negativa.

C2) Per garantire l'inseguimento a gradino con errore nullo è necessario utilizzare un controllore  $C_2(s)$  caratterizzato da un polo nell'origine. Un controllore di questo tipo, però non consente di rispettare completamente la specifica C2. Il sistema deve raggiungere un riferimento pari a  $181^\circ$  senza superare l'angolo di  $181.15^\circ$ , considerando che il valore di equilibrio è pari a  $180^\circ$ . Ciò vuol dire ammettere una sovraelongazione percentuale  $S \leq (1.15 - 1) = 15\%$ . Approssimando il sistema controllato come un sistema del secondo ordine, si può utilizzare la formula  $S = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$  ottenendo che il valore dello smorzamento deve essere  $\delta \simeq 0.5$ . Per garantire questa specifica il sistema deve avere approssimativamente un margine di fase non inferiore a  $M_\phi \simeq 50^\circ$ . Inoltre, dalla specifica si evince che il tempo di assestamento risulta  $T_a = 1s$ . Infatti l'angolo di regime raggiunto dal pendolo sarà pari a  $181^\circ$  e il range entro il quale viene richiesto che il pendolo si stabilizzi entro  $1s$  è pari ad uno scostamento del 5% rispetto al valore di regime. Applicando la formula  $\omega_T = 3/(\delta T_a)$  si trova che la pulsazione di taglio deve avere un valore almeno pari a  $\omega_T = 3/(0.5 \cdot 1) \simeq 6 \text{ rad/s}$ . Per garantire questa specifica si inserisce nel controllore  $C_2(s)$  uno zero in  $s = -3$  e si sceglie come guadagno statico 30. La struttura di controllo sin qui progettata è costituita da due controllori in cascata,  $C_1(s) = 50$  e  $C_2(s) = \frac{30(1+0.33s)}{s}$ .

L'effetto di questo controllore è riportato in fig.2

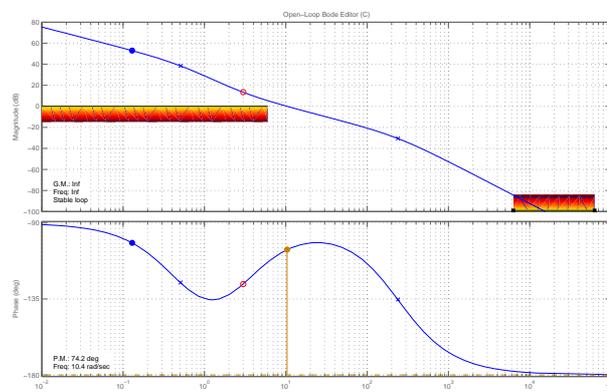


Figure 2: Diagrammi di Bode relativi al sistema di controllo con  $C_1(s) = 50$  e  $C_2(s) = \frac{30(1+0.33s)}{s}$

**C3)** Tenendo presente che la relazione tra il disturbo  $D(j\omega)$  e l'uscita  $Y(j\omega)$  risulta

$$Y(j\omega) = -\frac{C_2(j\omega)G_1(j\omega)}{1 + C_2(j\omega)G_1(j\omega)}D(j\omega),$$

al fine di soddisfare la specifica deve risultare

$$\left\| \frac{C_2(j\omega)G_1(j\omega)}{1 + C_2(j\omega)G_1(j\omega)} \right\| \leq \frac{10^{-4}}{10} = 10^{-5}.$$

per  $\omega > 2\pi \cdot 10^3 \text{ rad/s}$ . Pertanto si ha

$$\|C_2(j\omega)G_1(j\omega)\| \leq 10^{-5} \|1 + C_2(j\omega)G_1(j\omega)\| \leq 10^{-5} (1 + \|C_2(j\omega)G_1(j\omega)\|)$$

Trascurando il termine  $\|C_2G_1\|$  rispetto a 1, la condizione da imporre diventa  $\|C_2G_1\| \leq 10^{-5}$ , che in decibel risulta  $\|C_2G_1\|_{db} = -100$ .

Questa specifica non risulta soddisfatta come si vede dai diagrammi di Bode riportati in fig.2. Aggiungendo un ulteriore polo in  $s = -300$  si abbassa il guadagno di Bode nelle frequenze di interesse soddisfacendo la specifica richiesta, senza compromettere il margine di fase e la pulsazione di taglio precedentemente calcolati (vedi fig. 3)

**D)** Il Controllore finale risulta essere:

$$C_2(s) = \frac{30(1 + 0.33s)}{s(1 + 0.0033s)}$$

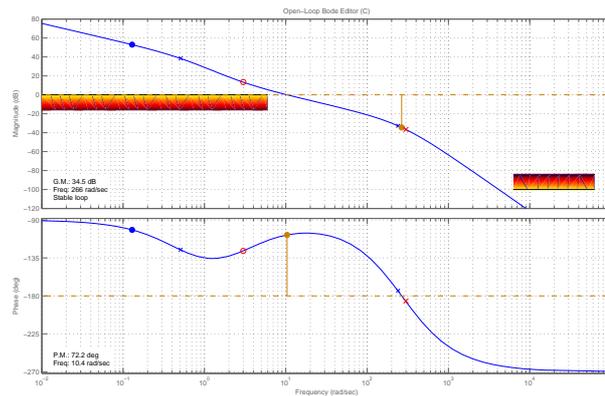


Figure 3: Diagrammi di Bode relativi al sistema di controllo finale