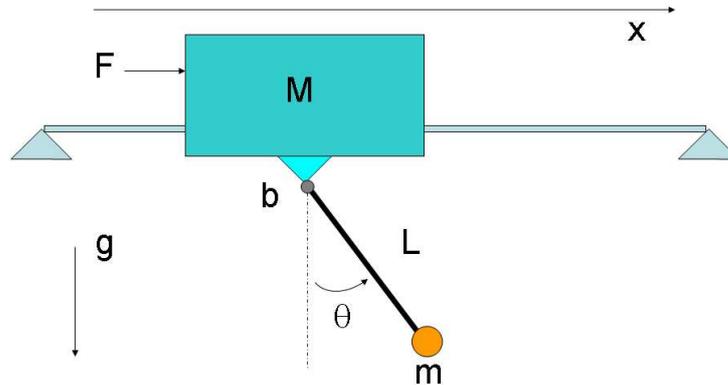


Numero di matricola

| | | | | | |
|---|---|------------------|-----------------|------------------|---|
| - | - | $= 10\alpha - 1$ | $= 10\beta - 1$ | $= 10\gamma - 1$ | - |
|---|---|------------------|-----------------|------------------|---|

Si consideri il sistema carroponete schematizzato in figura. Esso è costituito da un carrello di massa M libero di scorrere senza attrito su un piano orizzontale e soggetto ad una forza F . Al carrello è appesa una massa m vincolata attraverso un'asta rigida di lunghezza L e inerzia trascurabile. In corrispondenza della cerniera che collega la massa M con il pendolo sono inoltre presenti forze di attrito viscoso con coefficiente di smorzamento b .



Il sistema risulta descritto dalle seguenti equazioni dinamiche

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + mL \cos \theta \ddot{\theta} - mL \sin \theta \dot{\theta}^2 = F \\ mL^2 \ddot{\theta} + mgL \sin \theta + mL \cos \theta \ddot{x} = -b\dot{\theta} \end{cases}$$

dove $m = (5 + \frac{\beta}{10}) \text{ kg}$ e $M = (100 + \frac{\alpha}{10}) \text{ kg}$ sono rispettivamente la massa del pendolo e del carrello, $L = (1 + \frac{\gamma}{10}) m$ la lunghezza dell'asta rigida, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ l'accelerazione gravitazionale, $b = (5 + \frac{\beta}{10}) \text{ kg m}^2/\text{s}$ il coefficiente di smorzamento della cerniera ed F la forza agente sul carrello.

- A)** Si riportino le equazioni dinamiche del sistema in forma di stato. Si trovino i punti di equilibrio del sistema con ingresso F nullo e se ne discutano qualitativamente le proprietà di stabilità. Si ricavi infine il sistema linearizzato approssimato in un intorno dell'equilibrio con massa m più vicina alla condizione riportata in figura.
- B)** Trovare la funzione di trasferimento per il sistema linearizzato, considerando come ingresso la forza F e come uscita il segnale x_m , proiezione lungo l'asse x del vettore posizione della massa m .
- C)** Relativamente alla funzione di trasferimento ricavata al punto **B**, si consideri il progetto di un controllore che soddisfi le seguenti specifiche:
- sia tale da garantire, a regime, un errore non superiore ad $\frac{1}{20}$, quando per riferimento sia data una rampa lineare di velocità con pendenza unitaria;
 - sia tale da garantire che, a partire da una configurazione di equilibrio di cui al punto **A**, la coordinata x_m della massa m sia incrementata esattamente di 1 m , senza mai superare la quota $\Delta x_m = 1.3 \text{ m}$ e restando confinata nella fascia $0.95 \text{ m} \leq \Delta x_m \leq 1.05 \text{ m}$ entro un tempo non superiore a 0.5 s ;
 - si ipotizzi che il sensore di misura sia affetto da disturbi approssimabili in prima battuta con segnali sinusoidali a frequenze superiori a 1 KHz . Si cerchi di attenuare tali disturbi di un fattore pari almeno a 10^5 .
- D)** Si descriva esplicitamente la procedura di progetto del controllore, commentando i passaggi effettuati durante le varie fasi di progetto; si corredi la trattazione con diagrammi di Bode asintotici della funzione di trasferimento ricavata al punto **B**.
- E)** Si riporti l'espressione analitica del controllore ricavato.
- OPZIONALE)** Si tracci manualmente il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento calcolata al punto **B**) per pulsazioni $\omega \in [0, +\infty)$, nel caso particolare in cui il coefficiente di smorzamento b sia nullo.

Soluzione

A) Le equazioni del moto del sistema scritte in forma normale sono le seguenti:

$$\ddot{x} = \frac{mgL \sin \theta \cos \theta + mL^2 \sin \theta \dot{\theta}^2 + b \cos \theta \dot{\theta} + LF}{(M+m)L - mL \cos^2 \theta},$$

$$\ddot{\theta} = \frac{(M+m)mLg \sin \theta + m^2L^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}^2 + b\dot{\theta}(M+m) + FLm \cos \theta}{mL^2 [-(M+m) + m \cos^2 \theta]}.$$

Scegliendo come variabili di stato $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $x_3 = \theta$, $x_4 = \dot{\theta}$, si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{mL^2 \sin(x_3)x_4^2 + mgL \sin(x_3) \cos(x_3) + b \cos(x_3)x_4}{(M+m)L - mL \cos^2(x_3)} \\ x_4 \\ \frac{m^2L^2 \sin(x_3) \cos(x_3)x_4^2 + g(M+m)mL \sin(x_3) + bx_4(M+m)}{mL^2 [-(M+m) + m \cos^2(x_3)]} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{L}{(M+m)L - mL \cos^2(x_3)} \\ 0 \\ \frac{mL \cos(x_3)}{mL^2 [-(M+m) + m \cos^2(x_3)]} \end{bmatrix} F$$

Si osservi che l'uscita relativa alla massa oscillante m è esprimibile dalla relazione $y = x + L \sin \theta$. Per ricavare i punti di equilibrio del sistema con ingresso nullo basta imporre

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{mL^2 \sin(x_3)x_4^2 + mgL \sin(x_3) \cos(x_3) + b \cos(x_3)x_4}{(M+m)L - mL \cos^2(x_3)} \\ x_4 \\ \frac{m^2L^2 \sin(x_3) \cos(x_3)x_4^2 + g(M+m)mL \sin(x_3) + bx_4(M+m)}{mL^2 [-(M+m) + m \cos^2(x_3)]} \end{bmatrix}.$$

I punti di equilibrio con forza F nulla sono quindi: $\bar{x}_2 = 0$, $\bar{x}_4 = 0$, $\bar{x}_3 = 0 + k\pi$ con k intero relativo, per qualsiasi \bar{x}_1 assegnato. Si noti che questi punti di equilibrio sono instabili. Dalle equazioni del moto si vede infatti che inizializzando il sistema negli stati $x_1(0) = x(0)$ qualsiasi, $x_2(0) = \dot{x}(0)$ piccola a piacere ma diversa da zero, $x_3(0) = \theta(0) = 0 + k\pi$, $x_4(0) = \dot{\theta}(0) = 0$, e mantenendo sempre nulla la forza esterna F , il sistema diverge con velocità costante $\dot{x}(t) = \dot{x}(0)$, mantenendo gli stati $\theta(t) = \theta(0) = 0 + k\pi$ e $\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}(0) = 0$.

B) Il sistema linearizzato può essere ottenuto calcolando le matrici $\frac{\partial f(\mathbf{x}, u)}{\partial \mathbf{x}}$ e $\frac{\partial f(\mathbf{x}, u)}{\partial u}$ nell'equilibrio considerato. Un modo più semplice per ottenere il linearizzato partendo dalle equazioni non lineari è sviluppare direttamente in serie di Taylor tutti i termini rispetto alle variabili di stato al primo ordine e valutando tali sviluppi nell'equilibrio considerato. In tal modo, ponendoci nella posizione di equilibrio richiesta $\bar{x}_3 = 0$, si ha $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$, $\dot{\theta}^2 \approx 0$; si ottiene quindi:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + mL\ddot{\theta} = F \\ mL^2\ddot{\theta} + mgL\theta + mL\ddot{x} = -b\dot{\theta} \end{cases} \quad (1)$$

Analogamente per l'uscita si ottiene $y = x + L\theta$.

L-trasformando le equazioni del sistema, nell'ipotesi di condizioni iniziali nulle, si ottiene:

$$\begin{cases} (M+m)s^2X(s) + mLs^2\Theta(s) = F(s) \\ (mL^2s^2 + bs + mgL)\Theta(s) = -mLs^2X(s) \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ha

$$\Theta(s) = -\frac{mLs^2}{mL^2s^2 + bs + mgL}X(s)$$

Sostituendo nella prima e semplificando si ha

$$X(s) = \frac{mL^2s^2 + bs + mgL}{s^2 [MmL^2s^2 + (M+m)bs + (M+m)mgL]}F(s)$$

da cui

$$\Theta(s) = -\frac{mL}{MmL^2s^2 + (M+m)bs + (M+m)mgL}F(s).$$

Considerando infine che $G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)}$ e che $Y(s) = X(s) + L\Theta(s)$ si ottiene:

$$G(s) = \frac{bs + mgL}{s^2 [MmL^2s^2 + (M + m)bs + (M + m)mgL]}$$

La funzione di trasferimento cercata ha quindi due poli nell'origine, due poli a parte reale negativa e uno zero negativo. In particolare, per $\alpha = \beta = \gamma = 0$ la funzione di trasferimento vale

$$G(s) = \frac{5s + 49}{s^2(500s^2 + 525s + 5145)}$$

ed ha due poli nell'origine e due poli complessi coniugati a parte reale negativa in $-0.5250 \pm j3.1645$. I diagrammi di Bode della $G(s)$ vengono riportati in fig.1.

C) La funzione di trasferimento ottenuta ha due poli complessi coniugati a parte reale negativa e due poli nell'origine; è quindi possibile progettare un controllore in grado di soddisfare alle specifiche richieste utilizzando direttamente i diagrammi di Bode.

Si consideri un controllore del tipo $C(s) = \frac{k}{s^t} \hat{C}(s)$, con $\hat{C}(0) = 1$.

- La funzione di trasferimento $G(s)$ è di tipo due; pertanto, l'errore a regime per riferimenti di posizione a gradino e alla rampa sono nulli. Si scelga il tipo t del controllore pari a zero; nel caso in cui il riferimento sia una rampa lineare di velocità a pendenza unitaria, ricordando che la L-trasformata della funzione $r(t) = \frac{t^2}{2}$ è $R(s) = \frac{1}{s^3}$, per soddisfare la specifica deve valere:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{[1 + C(s)G(s)]s^2} = \frac{1}{k \frac{49}{5145}} \leq \frac{1}{20}.$$

Dalla relazione appena scritta si ricava $k \geq 2100$; nel nostro caso scegliamo ad esempio $k = 2500$. I diagrammi di Bode della funzione di trasferimento di anello $C(s)G(s)$, con $C(s) = 2500$, sono riportati in fig.2.

- Le specifiche richieste equivalgono a chiedere che la massima sovraelongazione sia del 30% e che il tempo di assestamento sia non superiore a 0.5 s. Poiché la massima sovraelongazione richiesta è diversa da zero, è possibile adottare, per il sistema in anello chiuso, l'approssimazione a due poli dominanti. Per ottenere una sovraelongazione massima del 30%, è necessario avere uno smorzamento $\delta \geq 0.3579$, cioè un margine di fase $M_\phi \geq 36^\circ$. Per soddisfare la specifica sul tempo di assestamento deve valere la relazione $\omega_n \geq \frac{3}{T_a \delta} = 16.7645 \text{ rad/s}$; è quindi necessario che il diagramma di Bode delle ampiezze della funzione $C(s)G(s)$ attraversi l'asse a zero db per pulsazioni superiori a circa 17 rad/s. Le due specifiche risultano soddisfatte introducendo nel controllore una doppia azione anticipatrice, con due zeri in -1 e due poli in -150. Il diagramma di Bode della funzione di trasferimento $C(s)G(s)$ è riportato in fig.3. Con questo controllore si ottengono un margine di fase di 47.6° e una pulsazione di taglio di 26.3 rad/s.
- La funzione di trasferimento tra il disturbo di misura $\nu(s)$ e l'uscita $y(s)$ risulta:

$$y(s) = -\frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}\nu(s)$$

Per il teorema della risposta armonica, la specifica è soddisfatta se vale la relazione

$$\frac{|C(j\omega)G(j\omega)|}{|1 + C(j\omega)G(j\omega)|} \leq \frac{1}{10^5}$$

per pulsazioni $\omega > 6300 \text{ rad/s}$. Poiché, per alte frequenze, il modulo $|C(j\omega)G(j\omega)| \ll 1$, la relazione da soddisfare è

$$|C(j\omega)G(j\omega)|_{db} \leq -100db$$

per lo stesso range di pulsazioni. Come si osserva in fig.3, questa specifica risulta già rispettata. La risposta al gradino del sistema chiuso in retroazione è riportata in fig.4.

Opzionale) Per tracciare il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento iniziale $G(s)$, avendo posto $b = 0$, è opportuno ricorrere al relativo diagramma di Bode, riportato in fig.5. Si ottiene quindi il diagramma di Nyquist per $\omega \in [0, +\infty)$, riportato in fig.6.

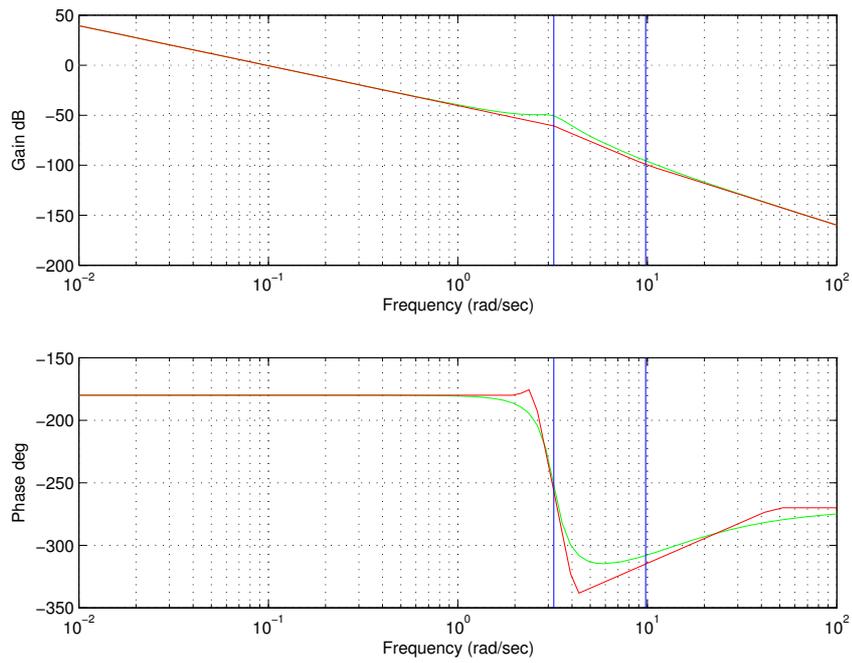


Figure 1: Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento $G(s)$

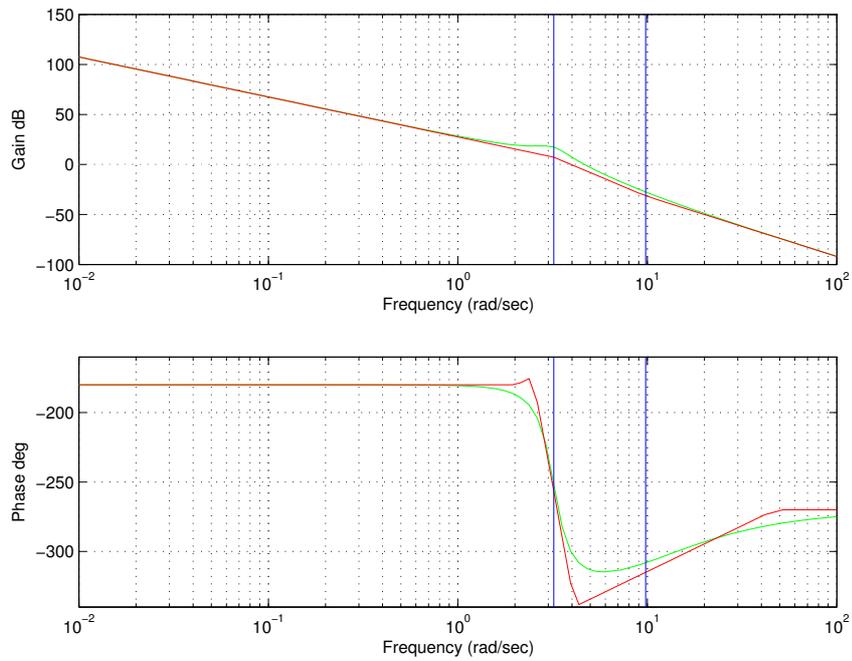


Figure 2: Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento di anello $C(s)G(s)$, con $C(s) = 2500$

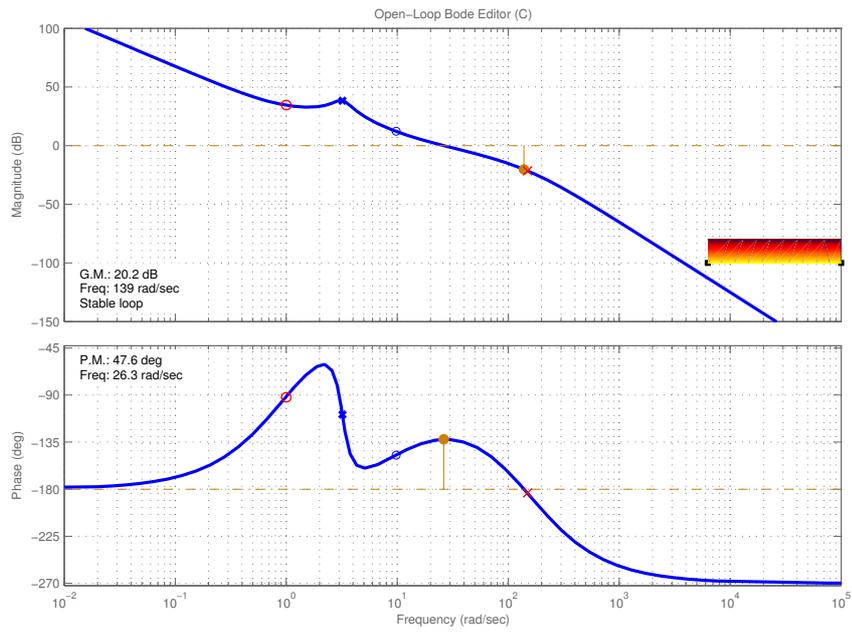


Figure 3: Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento di anello $C(s)G(s)$, con $C(s) = \frac{2500(s+1)^2}{(0.0067s+1)^2}$

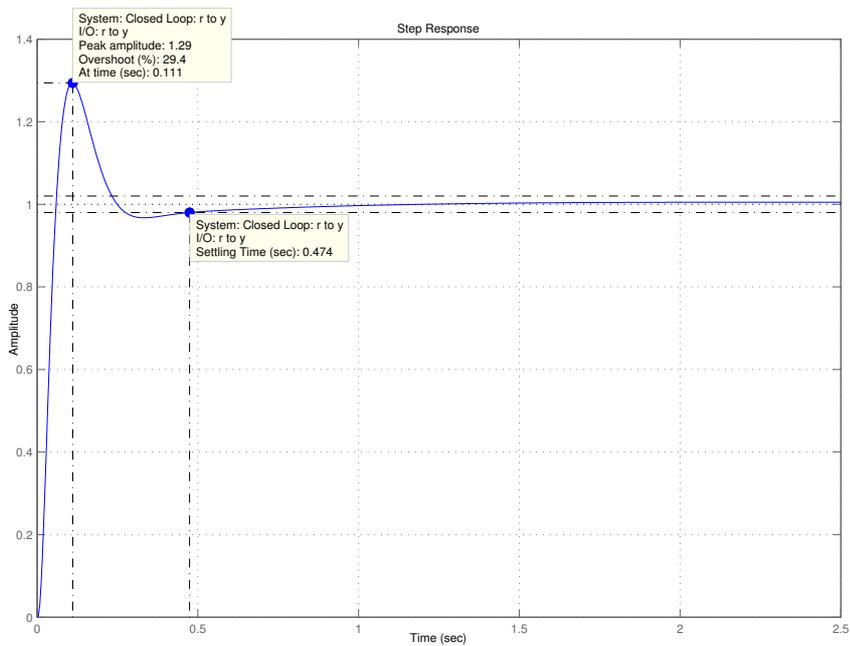


Figure 4: Risposta al gradino del sistema chiuso in retroazione

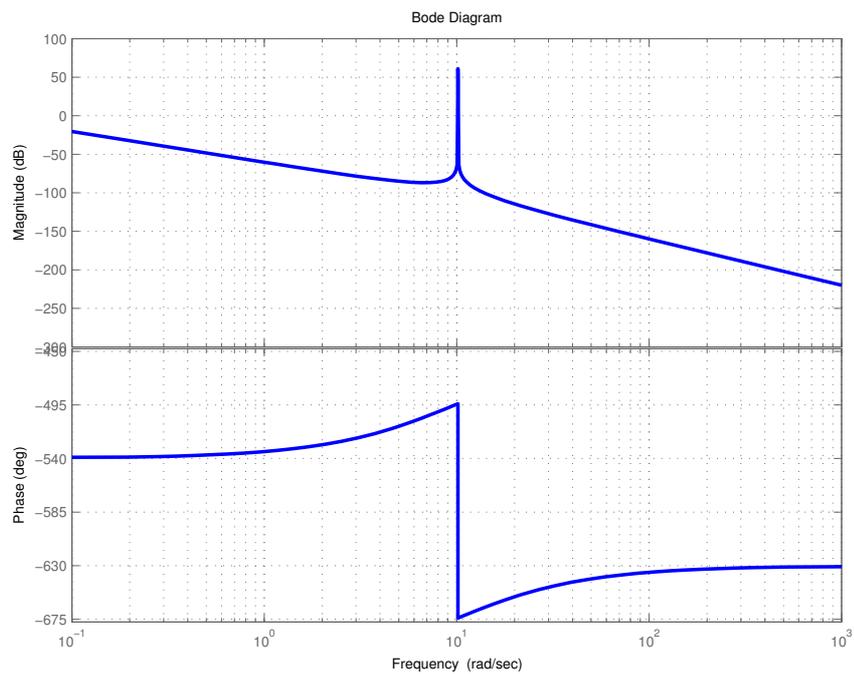


Figure 5: Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento iniziale $G(s)$, con $b = 0$

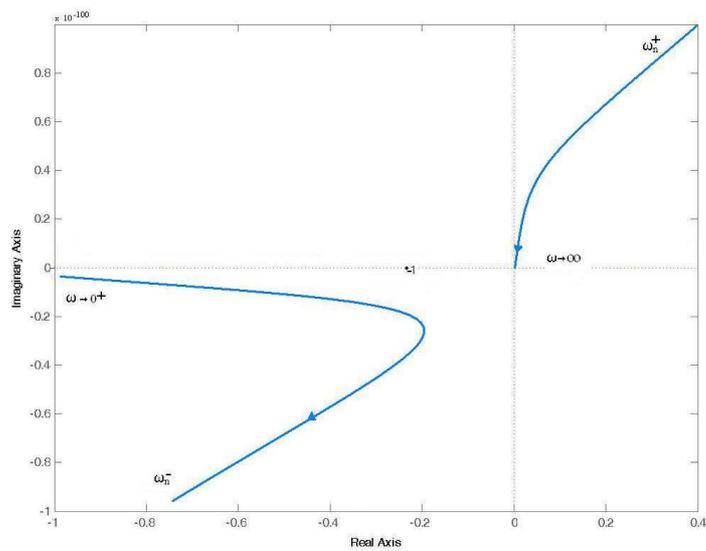


Figure 6: Diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento iniziale $G(s)$, con $b = 0$