

Numero di matricola

-	-	$= 10\alpha - 1$	$= 10\beta - 1$	$= 10\gamma - 1$	-

Si consideri il sistema rappresentato in fig.1 concepito al fine di effettuare dei test di fatica in trazione su molle lineari. I capi della molla si suppongono collegati, mediante giunti rotoidali senza attrito, l'uno ad una estremità di un braccio meccanico ad un grado di libertà, e l'altro ad un telaio rigido. La lunghezza a riposo della molla si suppone trascurabile.

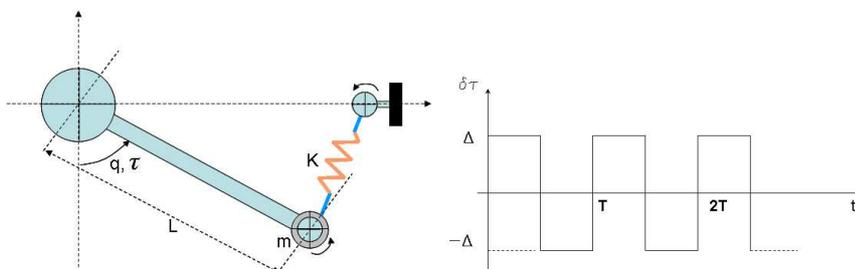


Figure 1: Sistema meccanico da controllare.

Il sistema risulta descritto dalla seguente equazione dinamica

$$mL^2\ddot{q} + mgL \sin(q) = \tau + \frac{1}{2}K \left(\sqrt{2}L\right)^2 \cos(q),$$

dove $m = (10+\gamma) Kg$ e $L = (1+\alpha) m$ sono rispettivamente la massa e la lunghezza del braccio il cui centro di massa si suppone posizionato in coincidenza della estremità del braccio, $K = (98+\beta) \frac{Kg}{m} \frac{m}{s^2}$ è l'elasticità della molla, $g = 9.8 m/s^2$ è l'accelerazione gravitazionale ed infine τ è la coppia di controllo al giunto del braccio. Il test consiste nell'applicare al braccio una coppia variabile ad onda quadra di periodo $T = 32 s$ e ampiezza Δ come descritto in fig.1. A tal fine si suppone di misurare la forza $F_m = \sqrt{2}KL\sqrt{1 - \sin(q)}$ mediante sensori posizionati sull'asse del giunto al telaio. Tali sensori sono affetti da disturbi ad alta frequenza.

- A)** Trovare tutti i punti di equilibrio del sistema con $\tau = 0$ e linearizzare il sistema in un intorno di tali punti. Si rappresentino graficamente gli equilibri e se ne discutano le proprietà di stabilità.
- B)** Trovare la funzione di trasferimento per il sistema linearizzato intorno all'equilibrio descritto in fig.1 e, dopo averne tracciato i diagrammi di Bode asintotici di ampiezza e fase, discuterne la stabilità in anello chiuso con controllo puramente proporzionale di guadagno $K_c \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando il metodo del luogo delle radici. Se esiste, si calcoli il valore di guadagno del controllore oltre il quale il sistema diventa instabile in retroazione.
- Si consideri il progetto di un controllore per la funzione di trasferimento ricavata al punto **B)** che soddisfi le seguenti specifiche:
 - Sia tale da garantire errori di inseguimento nulli a regime per riferimenti di forza a gradino di ampiezza Δ , considerando Δ sufficientemente piccolo da mantenere valida l'approssimazione lineare, e un tempo di assestamento $T_{ass} \leq 0.5T/2$ e sovralongazione $S \leq 10\%$;
 - Sia tale da garantire una attenuazione di un fattore 10^5 dei disturbi sulla misura di forza per frequenze superiori a $650Hz$;
 - Considerando che, durante le prove di test, l'elasticità della molla può variare, il controllore deve garantire che la sensibilità del sistema in anello chiuso sia non superiore ad un decimo di quella in anello aperto, nel campo di pulsazioni inferiori a $0.1rad/s$.
- C)** Si descriva esplicitamente la procedura di progetto del controllore, commentando i passaggi effettuati durante le varie fasi di progetto; si corredi la trattazione con i diagrammi di Bode asintotici e luoghi delle Radici.
- D)** Si riporti l'espressione analitica del controllore ricavato.
- OPZIONALE)** Si tracci manualmente il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento calcolata al punto **B)**.

Soluzione

Scegliendo il vettore di stato $X = (q, \dot{q})^T = (x_1, x_2)^T$ il sistema in forma di stato risulta

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{K}{m} \cos x_1 - \frac{g}{L} \sin x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{mL^2} \end{pmatrix} \tau \\ y = \sqrt{2}KL\sqrt{1 - \sin x_1} \end{cases}$$

A Per ricavare i punti di equilibrio del sistema ad ingresso nullo si impone

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{K}{m} \cos x_1 - \frac{g}{L} \sin x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I punti di equilibrio sono $\bar{X} = (\arctan(\frac{KL}{gm}), 0)^T$.

Il sistema linearizzato risulta

$$\begin{cases} \dot{\tilde{X}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\frac{K}{m} \sin \bar{X}_1 + \frac{g}{L} \cos \bar{X}_1) & 0 \end{pmatrix} \tilde{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{mL^2} \end{pmatrix} \tilde{\tau} \stackrel{def}{=} A\tilde{X} + B\tilde{\tau} \\ \tilde{y} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}KL\frac{\cos \bar{X}_1}{\sqrt{1 - \sin \bar{X}_1}} & 0 \end{pmatrix} \tilde{X} \stackrel{def}{=} C\tilde{X}. \end{cases}$$

In seguito si supponrà $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Sostituendo i valori numerici si ha che gli equilibri sono i punti $\bar{X} = (\frac{\pi}{4} + k\pi, 0)^T_{k=0,1}$.

Il punto di equilibrio $\bar{X} = (\frac{\pi}{4}, 0)^T$ ha associata una matrice dinamica

$$A|_{(\frac{\pi}{4}, 0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9.8\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

che ha due poli complessi coniugati $p = \pm 3.72j$, dove $j = \sqrt{-1}$; possiamo concludere che l'equilibrio del sistema linearizzato è marginalmente stabile.

Il punto di equilibrio $\bar{X} = (\frac{\pi}{4} + \pi, 0)^T$ ha invece matrice dinamica

$$A|_{(\frac{5\pi}{4}, 0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 9.8\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

che ha due poli reali $p = \pm 3.72$. Il punto di equilibrio del linearizzato risulta quindi instabile.

B La funzione di trasferimento dell'unico sistema stabile in anello aperto risulta

$$G(s) = C|_{(\frac{\pi}{4}, 0)} (sI - A|_{(\frac{\pi}{4}, 0)})^{-1} B = \frac{-9.05}{s^2 + 13.86}.$$

Al fine di tracciarne i diagrammi di Bode, discutiamo separatamente i contributi asintotici in modulo e fase del guadagno e della coppia di poli immaginari puri.

- **GUADAGNO:** Il guadagno di Bode della funzione di trasferimento $K_G = \frac{-18.11}{13.86} = -0.6530$ impone un contributo in ampiezza pari a $K_G|_{db} = 20 \log_{10}(|K_G|) \approx -3.7017$ e un guadagno in fase $\phi = -\pi$.

- **POLI:** La coppia di poli immaginari puri impone un contributo in ampiezza in db nullo fino alla pulsazione naturale $\omega = \sqrt{13.86} = 3.72$ oltre la quale il contributo decresce con pendenza pari a $-40db/dec$. La fase risulta invece nulla per pulsazioni inferiori alla pulsazione naturale, mentre per frequenze superiori assume il valore $-\pi$.

I diagrammi di Bode asintotici di ampiezza e fase si ottengono sommando i relativi contributi del guadagno e dei poli immaginari puri (fig.2). Supponiamo di utilizzare una retroazione del tipo mostrato in fig.4, con un controllore puramente proporzionale $C(s) = K_C$. La presenza del guadagno negativo della funzione di trasferimento impone che il sistema in retroazione risulti stabile marginalmente per $K_C \in (-\infty, 0]$ come si evidenzia in fig.3 a destra. Per quel che riguarda i valori di guadagno del controllore $K_C \in [0, +\infty)$ si nota che il sistema si mantiene marginalmente stabile fino ad un valore $K_C \leq \bar{K}_C$ oltre il quale il sistema risulta instabile (fig.3 a sinistra). Per il calcolo del valore \bar{K}_C si può notare che per tale valore i poli della funzione di trasferimento ad anello chiuso risultano coincidenti e in zero, ciò comporta l'eguaglianza

$$s^2 + 13.86 - 9.05\bar{K}_C = s^2,$$

che è soddisfatta per $\bar{K}_C = \frac{13.86}{9.05} = 1.5315$.

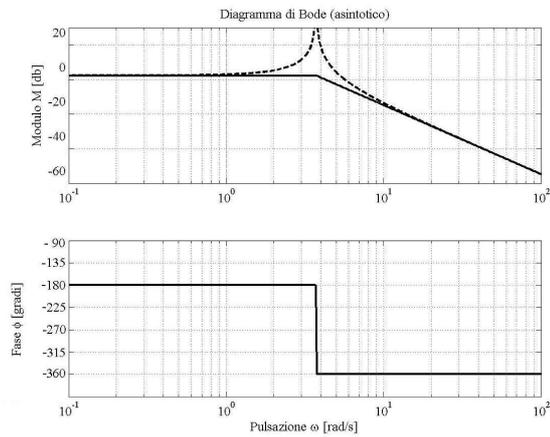


Figure 2: Diagrammi di Bode di ampiezza e fase asintotici e reali della funzione di trasferimento ad anello aperto calcolata al punto **B**).

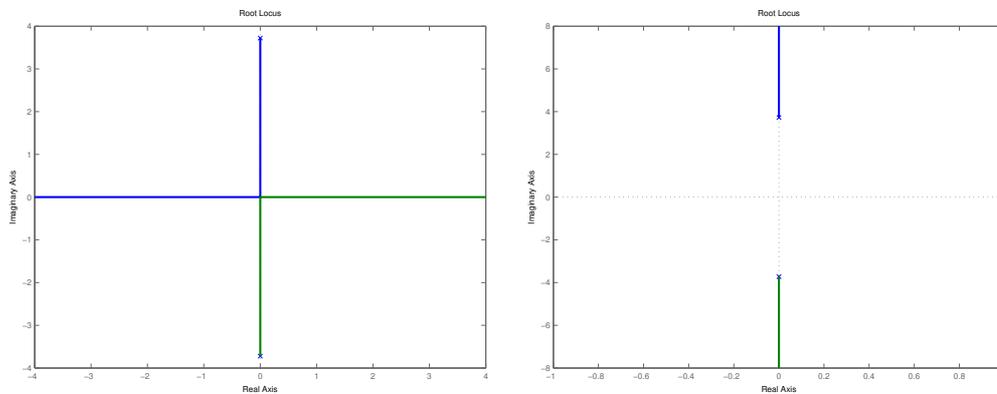


Figure 3: Luogo delle radici con K_c positivo (sinistra) e K_c negativo (destra) per la funzione di trasferimento calcolata al punto **B**.

C Consideriamo ora il progetto di un controllore in grado di garantire le specifiche statiche e dinamiche richieste. Essendo il sistema ad anello aperto marginalmente stabile, come già specificato al punto **B**), è possibile operare direttamente sui diagrammi di Bode. Osservando che l'impianto $G(s)$ non ha poli nell'origine, facendo riferimento al progetto di un controllore del tipo

$$C(s) = \frac{K}{s^t} \hat{C}(s), \quad \text{con } \hat{C}(0) = 1 ,$$

si considera la scelta del tipo t e della costante di guadagno K del controllore. Ci si riferisce sempre ad un sistema a blocchi in retroazione come riportato in fig.4, in cui il controllore abbia un guadagno negativo $k = -1$. Il relativo luogo delle radici è riportato in fig.3 a destra. Per annullare l'effetto

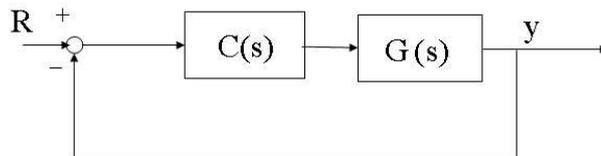


Figure 4: Schema a blocchi utilizzato per il controllo del sistema

di una variazione a gradino del riferimento di forza è necessario considerare l'effetto che esso ha sull'errore a regime:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+C(s)G(s)} \frac{\Delta}{s} = 0. \quad \text{L'effetto di una seppur piccola variazione può essere annullato introducendo un polo nell'origine nel controllore } (t = 1). \quad \text{Le specifiche statiche conducono}$$

quindi ad una struttura del controllore del tipo $C(s) = -\frac{1}{s}\hat{C}(s)$.
 Con tale compensazione il sistema chiuso in retroazione risulta instabile (fig.5). Data l'instabilità

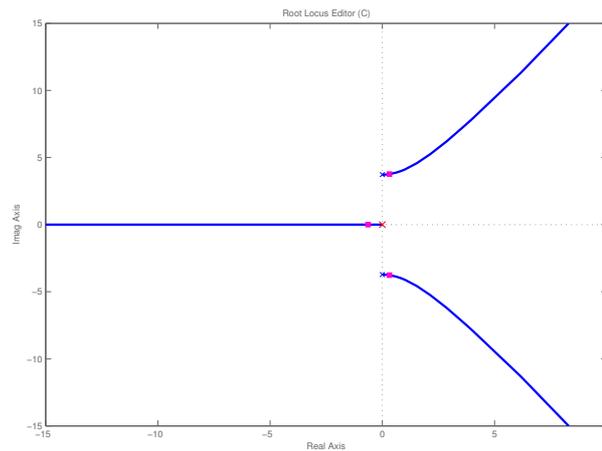


Figure 5: Luogo delle radici ottenuto con il controllore $C(s) = -\frac{1}{s}$.

del sistema è possibile utilizzare un'azione anticipatrice in grado di attirare il luogo nel semipiano a parte reale negativa. Fissiamo ad esempio uno zero in -1 e un polo in -50 . Tale operazione non consente ancora di garantire la stabilizzazione, pertanto è necessario l'inserimento di un ulteriore zero, ad esempio sempre in -1 . Si osservi che il controllore è comunque causale, anche se non strettamente proprio, data la presenza di due zeri e due poli. Il luogo delle radici e il diagramma di Bode sono riportati in (fig.6). Il controllore utilizzato fino a questo punto è il seguente:

$$C(s) = -\frac{(s+1)^2}{s(1+0.02s)}$$

La specifica sulla sovraelongazione ($S = 0.10$) ammette che il sistema in anello chiuso sia ap-

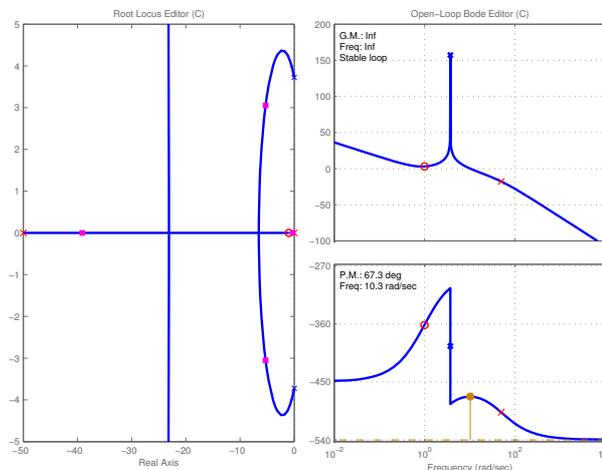


Figure 6: Luogo delle radici e diagrammi di Bode ottenuti con il controllore $C(s) = -\frac{(s+1)^2}{s(1+0.02s)}$.

prossimabile con un sistema del secondo ordine con smorzamento dei poli dominanti dell'ordine di 0.59 (come si ricava dalla espressione della sovraelongazione dei sistemi di secondo ordine $s = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$). Sul piano di Bode, questo significa che si ammette un margine di fase $\phi_M \approx 60^\circ$. In termini del solo diagramma delle ampiezze, questa specifica si riflette grossolanamente nel richiedere che l'attraversamento dell'asse a $0db$ avvenga con pendenza pari anche a -2 , purchè non lontano da un precedente tratto a pendenza -1 o 0 . La specifica sul tempo di assestamento, per il caso di sistema in anello chiuso a due poli dominanti stabilito sulla base della precedente specifica, indica che la pulsazione naturale dei due poli deve essere $\omega_N \geq 3/\delta T_a = \frac{3}{(0.5T/2)} \approx 0.64rad/sec$. Questa specifica si riflette nel chiedere che il diagramma delle ampiezze di $C(j\omega)G(j\omega)$ intersechi l'asse a $0db$ a pulsazioni superiori a $0.64rad/sec$. Tale condizione è verificata avendo un margine di fase di circa 67.3° e una pulsazione di taglio di $10.3rad/sec$ (fig.7). Per imporre la specifica di reiezione dei disturbi in alta frequenza, ovvero che sia

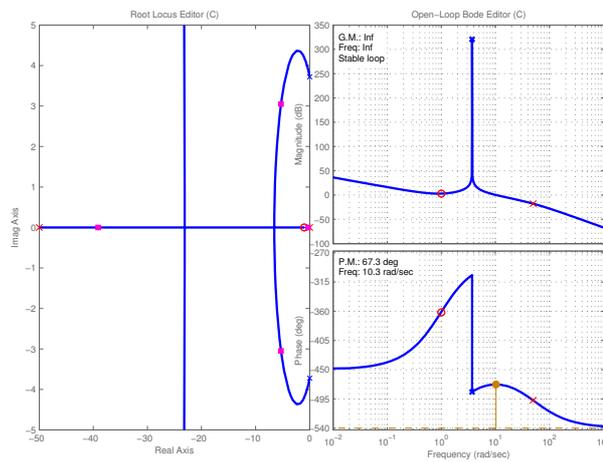


Figure 7: Luogo delle radici e diagramma di Bode del sistema dopo la compensazione $C(s) = -1 \frac{(s+1)^2}{s(1+0.02s)}$

$|C(s)G(s)| < 10^{-5}|1 + C(s)G(s)|$ nelle pulsazioni di interesse. Ciò equivale approssimativamente a chiedere che sia $|C(j\omega)G(j\omega)|_{db} \leq -100db, \forall \omega > 2\pi 650 \approx 4100rad/s$. Si garantisce questa specifica inserendo nel compensatore un polo ad alta frequenza, es. in -300 , ottenendo il diagramma di Bode riportato in fig.8. Infine per quanto riguarda la specifica relativa alla sensibilità del sis-

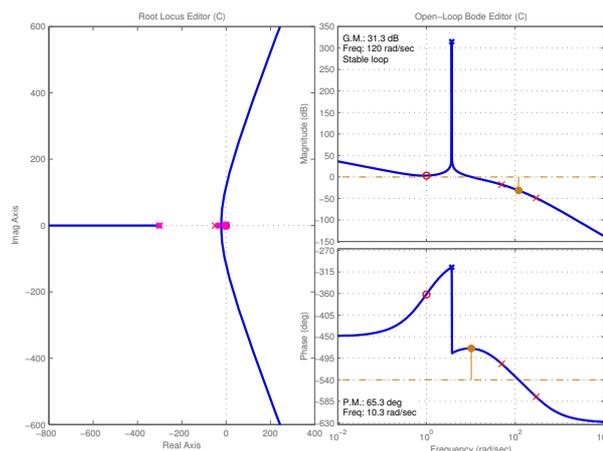


Figure 8: Diagrammi di Bode relativi al sistema con la compensazione del disturbo di misura.

tema, si deve imporre che $|1 + C(s)G(s)| > 10$ nelle pulsazioni di interesse. Ciò è garantito se $|CG|_{\omega \leq 0.1rad/sec} \geq 10$. Come si nota dal diagramma di Bode fig.8 tale specifica non è soddisfatta. Un possibile soluzione al problema è aumentare il guadagno della funzione di anello. Ponendo ad esempio $K = -2$ si verifica la specifica richiesta. Il controllore risultante è dato da

$$C(s) = -2 \frac{(s+1)^2}{s(1+0.02s)(1+0.0033s)}$$

A verifica finale del progetto, riportiamo il diagramma di Bode in figura 9 e la risposta al gradino del sistema in anello chiuso in figura 10

OPZIONALE Considerando lo schema a blocchi in fig.4, e i diagrammi di Bode della funzione di anello KG , i diagrammi di Nypquist per i due casi $K = 1$ e $K = -1$ sono riportati rispettivamente in fig.11 sinistra e destra.

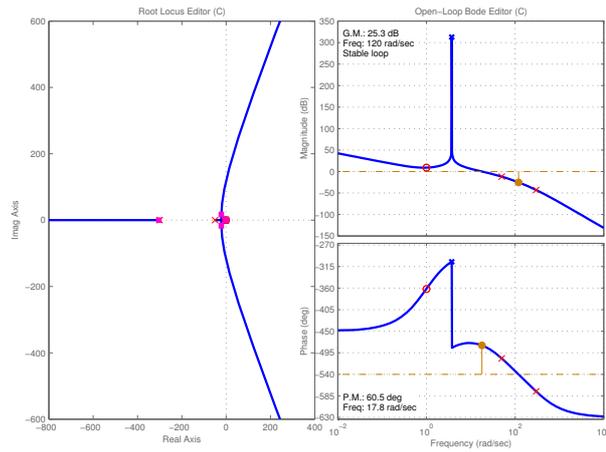


Figure 9: Luogo delle radici e diagramma di Bode del sistema dopo la compensazione $C(s) = -2 \frac{(s+1)^2}{s(1+0.02s)(1+0.0033s)}$

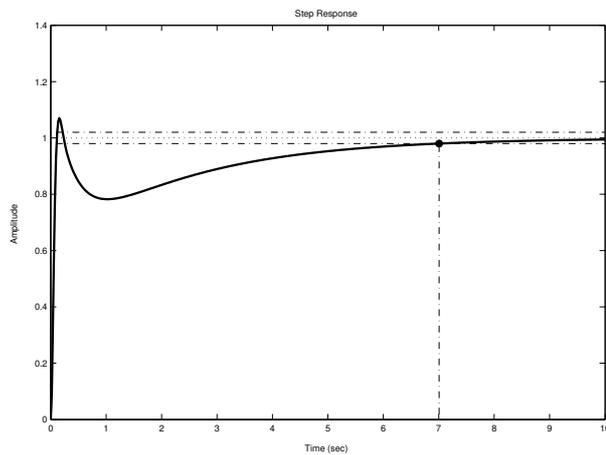


Figure 10: Risposta al gradino del sistema in retroazione.

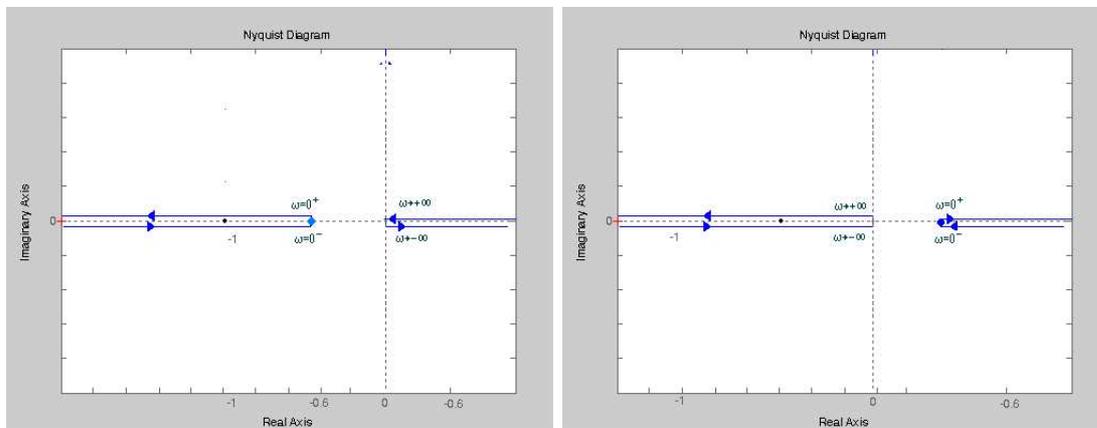


Figure 11: Diagrammi di Nyquist per $K = 1$ (sinistra) e $K = -1$ (destra).