

Numero di matricola

|   |   |                |                    |                 |   |
|---|---|----------------|--------------------|-----------------|---|
| - | - | $= 10\rho - 1$ | $= 10\epsilon - 1$ | $= 10\beta - 1$ | - |
|---|---|----------------|--------------------|-----------------|---|

Si consideri il razzo vettore riportato in fig.1.

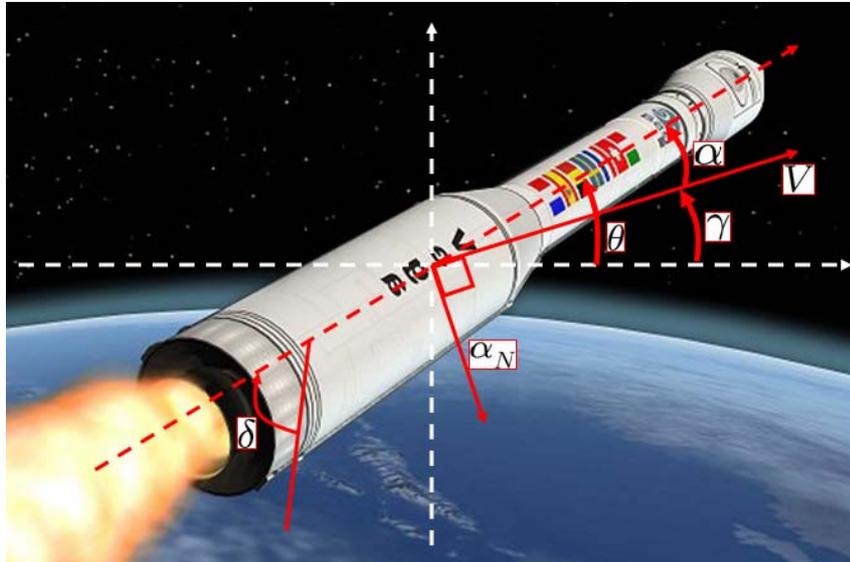


Figure 1: Vettore ARIANE-V.

La dinamica planare semplificata e linearizzata del razzo in atmosfera è data da

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = q + \frac{Z_\alpha}{V} \alpha + \frac{Z_f}{V} f \\ \dot{q} = M_\alpha \alpha + M_f f \end{cases}$$

dove  $q = \dot{\theta}$ ,  $\theta$  è l'angolo di pitch,  $\alpha$  identifica l'angolo di attacco,  $V = 416.6 + \beta [m/s]$  è la velocità del razzo,  $f$  è la posizione angolare del flap di controllo e  $Z_\alpha = -1390 + \beta [m/s^2]$ ,  $Z_f = -371.6 + \beta\rho [m/s^2]$ ,  $M_\alpha = -248 + \rho [rad/s]$ ,  $M_f = -662 + \epsilon [rad/s]$  sono opportuni parametri del sistema ottenuti in seguito alla procedura di linearizzazione della dinamica. Si scelga quale uscita del sistema la accelerazione approssimata  $\alpha_N = -V\dot{\gamma}$ , normale al vettore di velocità  $V$ , e in cui  $\gamma = \theta - \alpha$ .

- A** Trovare la forma di stato del sistema e la funzione di trasferimento  $G(s) = \frac{\alpha_N(s)}{f(s)}$ ;
- B** Costruire il luogo delle radici con retroazione positiva e negativa, descrivendo le caratteristiche salienti e non limitandosi quindi a riportare il diagramma ottenuto numericamente;
- C** Discutere, utilizzando il luogo delle radici, se è possibile rendere asintoticamente stabile il sistema con una retroazione puramente proporzionale;
- D** Discutere, utilizzando ora il criterio di Nyquist, se è possibile rendere asintoticamente stabile il sistema con una retroazione puramente proporzionale;
- E** Si progetti un controllore che garantisca le seguenti specifiche:
- Errore a regime in modulo inferiore a  $0.03 [m/s^2]$ , in corrispondenza di un riferimento a gradino per l'accelerazione normale  $\alpha_N$ ;
  - Margine di fase  $M_f \geq 60^\circ$ ;
  - Attenuazione pari a 0.01 per disturbi di misura con componenti frequenziali  $\omega \geq 100 [rad/s]$ ;
  - Qualora il sistema presenti delle variazioni parametriche, garantire che la sensibilità del sistema complessivo sia inferiore di un fattore 10 alla sensibilità del sistema in condizioni nominali, per ingressi a frequenze  $\omega \leq 0.1 [rad/s]$ .

**OPZIONALE** Trovare le risposte al gradino del sistema in anello aperto e in anello chiuso con il controllore progettato, discutendone le caratteristiche salienti.

## Soluzione

- A** Scelto il vettore di stato  $X = (\alpha, q)^T$ , e trovata l'espressione per l'uscita  $\alpha_N = -V\dot{\gamma} = V\dot{\alpha} - Vq = Z_\alpha \alpha + Z_f f$ , il sistema in forma di stato risulta

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{bmatrix} \frac{Z_\alpha}{V} & 1 \\ M_\alpha & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} \frac{Z_f}{V} \\ M_f \end{bmatrix} f \\ \alpha_N = [Z_\alpha \quad 0] X + [Z_f] f. \end{cases}$$

Il sistema, poichè presenta il termine  $D = Z_f$ , risulta non strettamente proprio, e quindi con una differenza poli-zeri nulla nella funzione di trasferimento  $G(s) = C(sI - A)^{-1}b + D$ :

$$G(s) = \frac{Z_f s^2 + Z_\alpha M_f - Z_f M_\alpha}{s^2 - \frac{Z_\alpha}{V} s - M_\alpha}.$$

Sostituendo i valori numerici, posti  $\beta = \rho = \epsilon = 0$ , si ottiene

$$G(s) = -371.6 \frac{(s - 47.2)(s + 47.2)}{s^2 + 3.329s + 248},$$

che presenta i poli complessi coniugati:  $s_p = -1.66 \pm 15.65i$ .

- B** Il sistema presenta un numero di singolarità polari e di zeri pari a 2, il che implica un numero di asintoti all'infinito pari a 0 (tutti poli in retroazione tendono agli zeri della funzione di trasferimento ad anello aperto). Poichè la funzione  $G(s)$  presenta un guadagno negativo, il luogo diretto delle radici (vedi fig.2) si ottiene per valori del guadagno  $K$  negativi (prodotto dei guadagni positivo). La

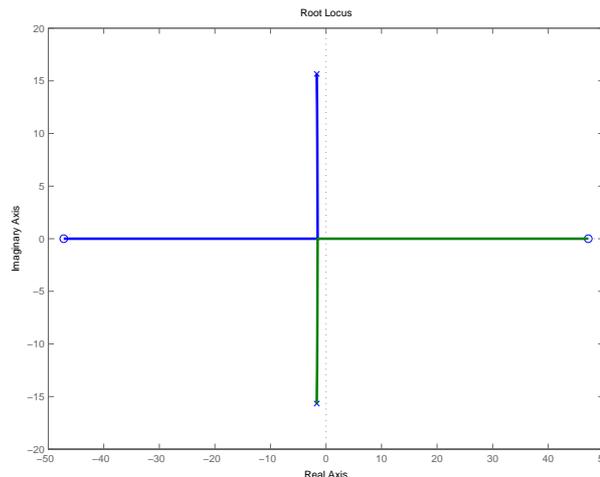


Figure 2: Luogo diretto delle radici.

porzione di asse reale che appartiene al luogo diretto è quella compresa tra i due zeri, dato il numero dispari di singolarità lasciato alla destra di un polo sull'asse reale. Il sistema diviene instabile a causa del ramo che tende allo zero a fase non minima. I valori del parametro  $K$  compatibili con la asintotica stabilità si possono ottenere applicando il teorema di Cartesio al polinomio a numeratore dell'equazione

$$1 + KG(s) = \frac{(1 - 371.6K)s^2 + 3.329s + 248 + 827850.5K}{s^2 + 3.329s + 248},$$

ovvero  $K \in (-0.0003, 0.0027)$ .

Come si osserva dal luogo delle radici, in un primo intervallo di valori il parametro  $K$  influenza solo la parte immaginaria delle singolarità polari in anello chiuso. Il luogo inverso delle radici, riportato in fig.3, si ottiene per valori positivi del guadagno  $K$  (prodotto dei guadagni negativo). Le porzioni di asse reale che appartengono al luogo inverso sono il complemento di quelle che vi appartenevano precedentemente, dato che tutto l'asse reale deve essere contenuto nell'unione di luogo diretto e

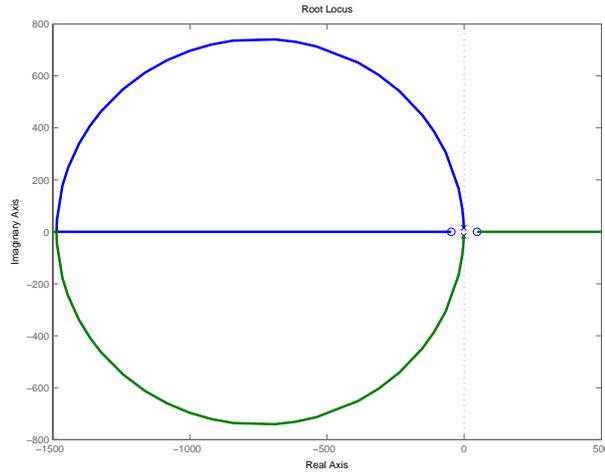


Figure 3: Luogo inverso delle radici.

inverso. Per il calcolo dei punti di biforcazione, cioè quei punti dell'asse reale in cui convergono due rami del luogo, si ricorda la formula

$$\frac{d}{ds} \left( -\frac{D(s)}{N(s)} \right) = 0,$$

in cui  $D(s)$ ,  $N(s)$  identificano rispettivamente il denominatore e il numeratore della funzione di trasferimento  $G(s)$ . Nel nostro caso si ottiene

$$\frac{1}{371.6} \frac{d}{ds} \frac{s^2 + 3.329s + 248}{s^2 - (47.2)^2} = 0 \rightarrow 3.329s^2 + 2[(47.2)^2 + 248]s + 3.329(47.2)^2 = 0,$$

che ha come soluzione i due punti di biforcazione, per retroazione positiva e negativa,  $(p_1, p_2) = (-1486, -1.5)$ .

**C** Dalla trattazione svolta al punto precedente risulta che è possibile rendere il sistema asintoticamente stabile con una retroazione puramente proporzionale con guadagno  $K \in (-0.0003, 0.0027)$ .

**D** Poichè il sistema in anello aperto è asintoticamente stabile, al fine di garantire la asintotica stabilità in anello chiuso il suo diagramma di Nyquist non deve circondare nè toccare il punto  $-1$ .

Il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento con retroazione positiva è riportato in fig.4. Si ricorda che a differenti guadagni  $K$  corrispondono scalature differenti del diagramma polare (l'eventuale intersezione con l'asse reale varia al variare di  $K$ ).

Come si nota dall'andamento del diagramma in corrispondenza del punto di intersezione con l'asse reale negativo, esistono dei valori di  $K$  per i quali il sistema in anello chiuso risulta asintoticamente stabile. Tali valori sono quelli per i quali il punto di intersezione con l'asse negativo risulta alla destra del punto  $-1$ .

Il diagramma di Nyquist in caso di retroazione negativa è riportato in fig.5. Anche in questo caso è possibile rendere asintoticamente stabile il sistema in retroazione con guadagni sufficientemente piccoli.

**E** Considerando un controllore  $C(s) = 1$ , le specifiche richieste sono evidenziate nel diagramma di Bode di ampiezza riportato in fig.6. Essendo asintoticamente stabile in anello aperto, si può procedere con il progetto sul diagramma di Bode. Peraltro, è importante sottolineare che, non essendo il sistema a fase minima (presenza dello zero a parte reale positiva), il progetto del controllore non può essere condotto mediante ispezione del solo diagramma di Bode delle ampiezze. Al fine di soddisfare la prima specifica è necessario che, per il teorema del valore finale, la trasformata dell'errore  $e(s)$  ad anello chiuso calcolata in  $s = 0$  sia minore o uguale a 0.03, cioè:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s e(s) \Big|_{s=0} = \frac{1}{1 + KG(s)} \Big|_{s=0} = \frac{1}{1 + K \frac{371.6 \cdot 2228}{248}} \leq 0.03$$

che impone un valore del guadagno  $K \geq 0.009$ .

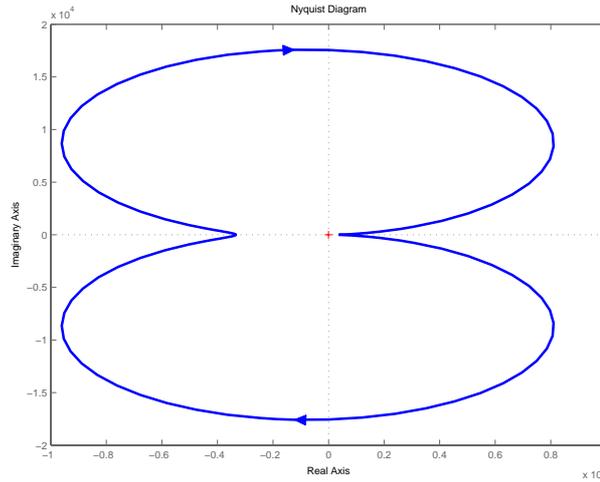


Figure 4: Diagramma di Nyquist per retroazione positiva.

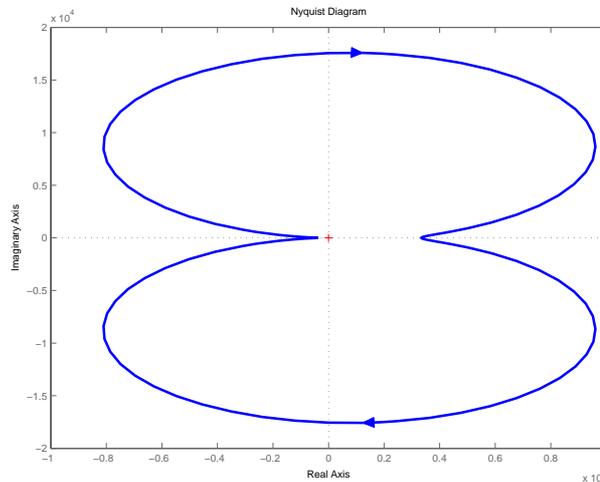


Figure 5: Diagramma di Nyquist per retroazione negativa.

In un sistema in retroazione, la sensibilità  $S_{LF}(s)$  alle basse frequenze risulta

$$S_{LF}(s) = \frac{1}{1 + G(s)C(s)},$$

e la quarta specifica  $S_{LF} \leq 0.1$  ( $|C(s)G(s)| \geq 20db$ ) è automaticamente soddisfatta con il valore del guadagno  $K = 0.009$  come si evidenzia in fig.7. Il sistema risulta comunque instabile in retroazione a causa del valore positivo in decibel che assume l'ampiezza alla fase  $\phi = 180^\circ$ . Al fine di rendere il sistema asintoticamente stabile e per verificare la terza specifica (attenuazione dei disturbi alle alte frequenze) è opportuno ricorrere ad una azione attenuatrice. Infatti è necessario diminuire il guadagno  $C(s)G(s)$  alle alte frequenze al fine di soddisfare la quarta specifica, cioè la diseguaglianza

$$S_{HF}(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \leq 0.01 \quad (|C(s)G(s)| \leq -40db),$$

dove  $S_{HF}(s)$  è la funzione sensitività alle alte frequenze. A tal fine è sufficiente introdurre un unico polo  $s_p$  nel controllore a monte delle singolarità della  $G(s)$ , ad esempio in  $s_p = -0.0366$ . In tal modo il sistema in retroazione soddisfa anche la seconda specifica, risultando un margine di fase  $M_f \approx 90^\circ$ . A causa della presenza del suddetto polo si osserva una caduta di guadagno alle basse frequenze, che impone un aumento del guadagno del controllore fino a  $K = 0.0116$  per soddisfare la quarta specifica. Il controllore che soddisfa tutte le specifiche risulta quindi

$$C(s) = \frac{0.0116}{27s + 1}.$$

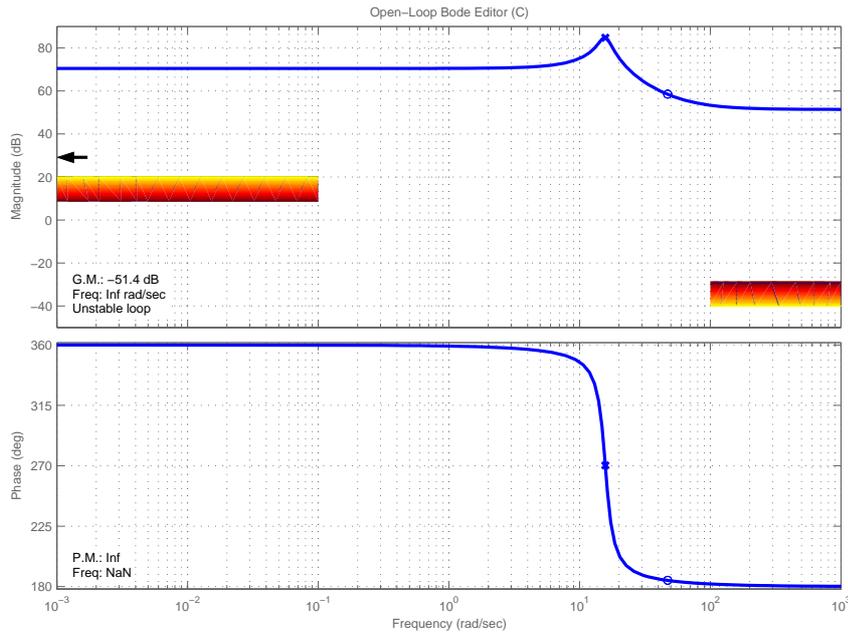


Figure 6: Diagrammi di Bode per la  $G(s)$  con controllore  $C(s) = 1$ .

I diagrammi di Bode ed il luogo delle radici del sistema controllato sono riportati in fig.8, mentre la risposta al gradino è riportata in fig.10.

**OPZIONALE** La risposta  $y(t)$  al gradino del sistema in anello aperto è riportata in fig.9. Il valore di regime della risposta  $y(\infty)$  si ottiene applicando il teorema del valore finale alla  $Y(s) = G(s)\frac{1}{s}$ ,

$$\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)\frac{1}{s} = \frac{371.6(47.2)^2}{248} \approx 3338,$$

mentre il valore iniziale  $y(0)$  si ottiene applicando ora il teorema del valore iniziale

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sG(s)\frac{1}{s} = -371.6.$$

Si osserva che il segno di  $y(0)$  e  $y(\infty)$  sono discordi, dando luogo al caratteristico fenomeno di “inversione” della risposta al gradino di sistemi a fase non minima. Il sistema presenta inoltre due poli complessi coniugati con transitorio  $\gamma(t)$  asintoticamente stabile con decadimento esponenziale a velocità  $\lambda = -1.664$ , e con pulsazione  $\omega = \sqrt{(248 - (1.664)^2)} = 15.75$ , che impone un periodo dell’oscillazione (distanza tra due massimi)  $T \approx 0.4sec$ , cioè

$$\gamma(t) \approx e^{-1.664t} \sin(15.75t).$$

La risposta al gradino del sistema controllato è riportata in fig.10, e corrisponde alla antitrasformata della funzione:

$$Y(s) = \frac{G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)} \frac{1}{s} = \frac{-4.31s^2 + 9603}{27s^3 + 86.57s^2 + 6699s + 9851} \frac{1}{s}.$$

Come si nota, l’utilizzo di un controllore strettamente proprio impone una funzione di trasferimento strettamente propria in anello chiuso (cioè  $y(0) = 0$ ).

La funzione di trasferimento in anello chiuso presenta un modo esponenziale decrescente e un modo oscillante entrambi asintoticamente stabili. In particolare, i poli della funzione di trasferimento risultano

$$\begin{cases} p_1 = -1.49, \\ p_2 = -.86 - 15.646i, \\ p_3 = -.86 + 15.646i. \end{cases}$$

che comportano un transitorio con modi asintoticamente stabili

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = e^{-1.49t}, \\ \gamma_2(t) = e^{-0.86t} \sin(15.646t). \end{cases}$$

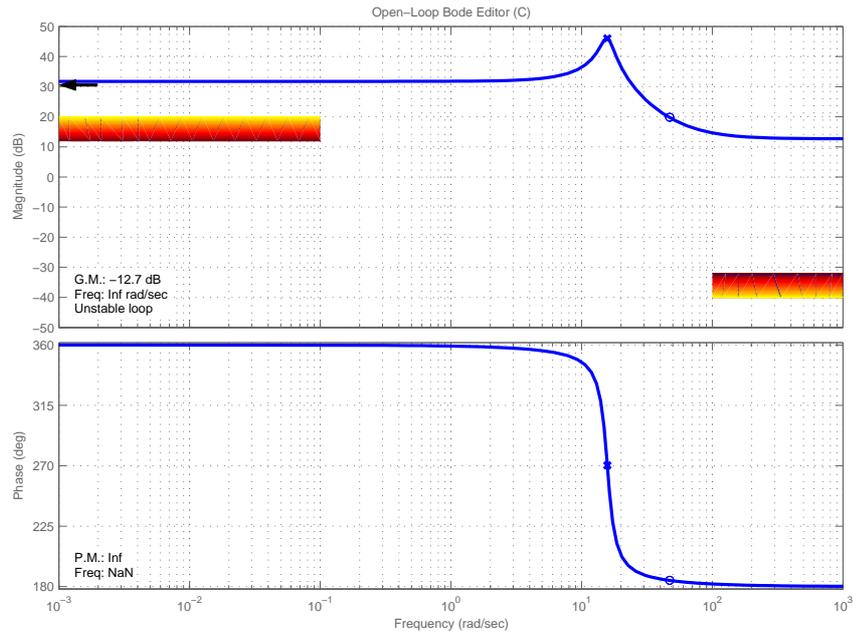


Figure 7: Diagrammi di Bode per la  $G(s)$  con controllore  $C(s) = 0.009$ .

In questo caso, la presenza di zeri a fase non minima è evidenziata dal valore negativo che assume la derivata  $\dot{y}(t)$  della risposta nei primi intervalli di simulazione, infatti

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s^2 G(s) \frac{1}{s} = \frac{-4.31}{27} = -0.16,$$

mentre il valore a regime della risposta si ottiene applicando il teorema del valor finale e vale  $y(\infty) = 9603/9851 \approx 0.975$ .

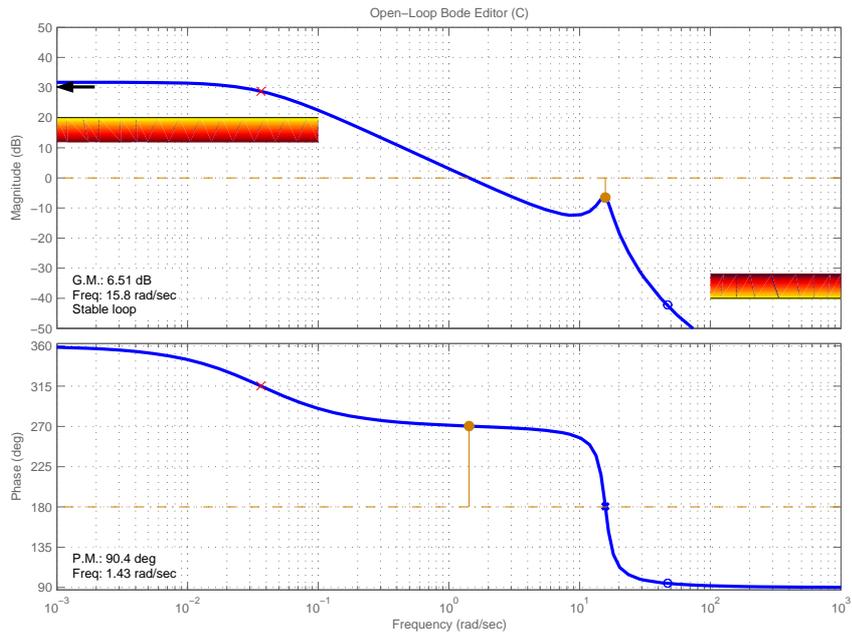


Figure 8: Diagrammi di Bode del sistema controllato.

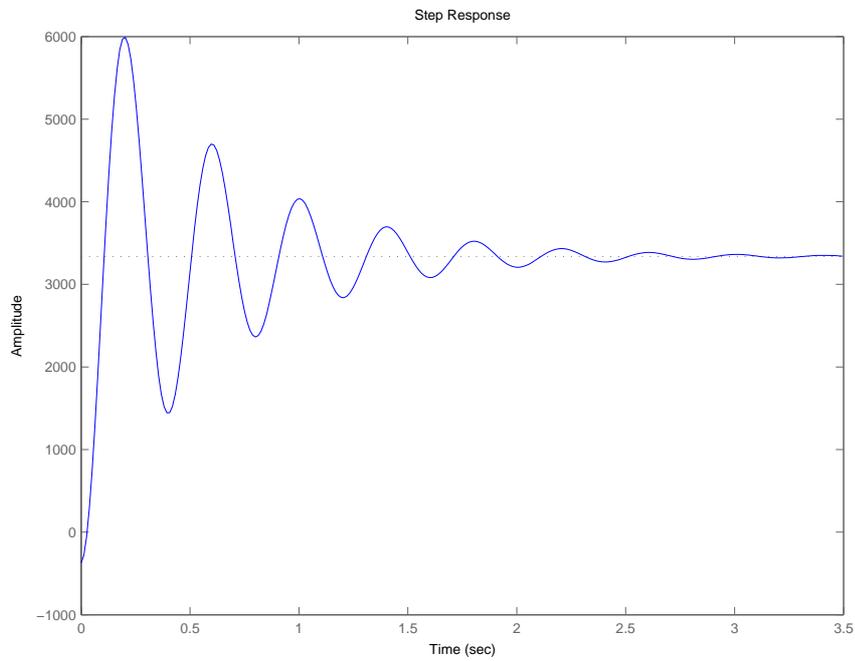


Figure 9: Risposta al gradino del sistema in anello aperto.

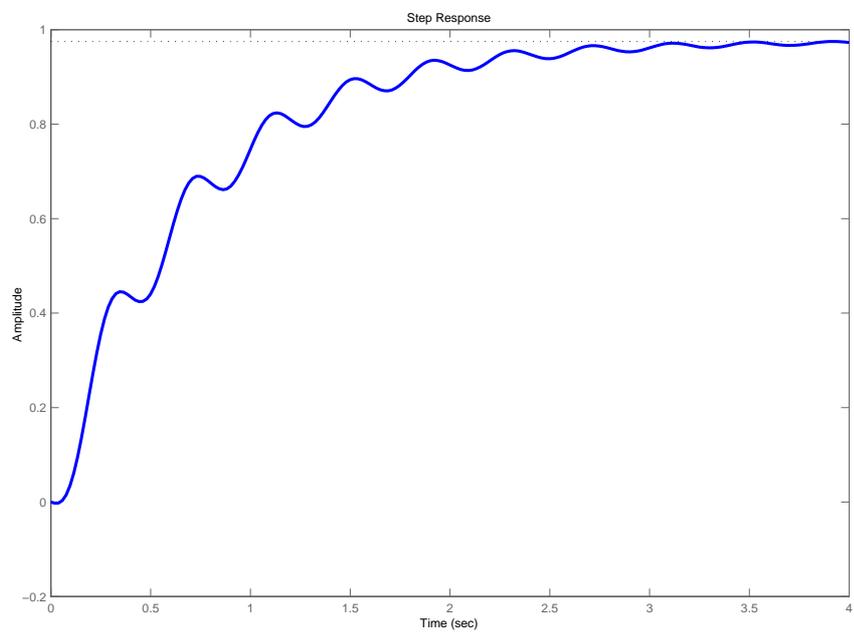


Figure 10: Risposta al gradino del sistema controllato.