

Numero di matricola

-	-	$= \alpha - 1$	$= \beta - 1$
$= \gamma - 1$	-	-	-

Si consideri il modello cinematico monotraccia di veicolo a trazione anteriore illustrato in fig.1 e

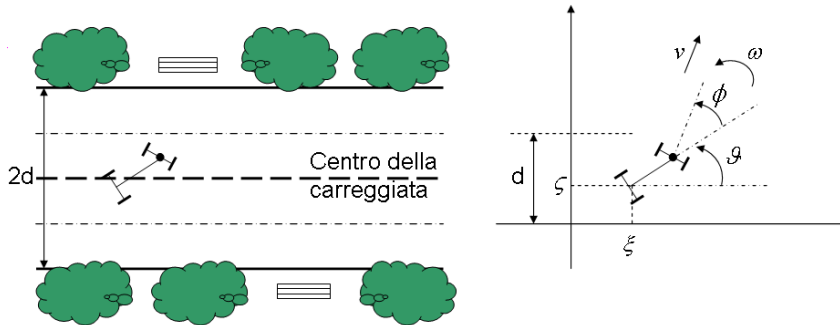


Figure 1: Modello del veicolo

descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{\xi} &= v \cos \theta \cos \phi \\ \dot{\zeta} &= v \sin \theta \cos \phi \\ \dot{\theta} &= \frac{\sin \phi}{L} v \\ \dot{\phi} &= \omega \end{cases}$$

dove  $L = (2 + \frac{a}{10})[m]$  indica la distanza tra gli assi delle ruote,  $v = (10 + 3\beta)[m/sec]$  la velocità longitudinale dell'asse anteriore considerata costante, e  $\omega$  la velocità angolare di sterzata. La misura disponibile è la distanza  $\zeta$  del centro dell'asse posteriore dal centro della corsia. La larghezza di ogni corsia è pari a  $d = 4[m]$ .

**A (V.O. –in alternativa ad E)** Si consideri il problema di guidare automaticamente il veicolo, in modo da eseguire un moto rettilineo sull'asse della corsia  $\zeta = 0$ . Si derivi il modello linearizzato del sistema attorno al moto di riferimento  $\hat{\zeta} \equiv 0$ ,  $\hat{\theta} \equiv 0$ ,  $\hat{\phi} \equiv 0$  e  $\hat{\xi}(t) = \xi(0) + vt$ . Si studi la raggiungibilità e l'osservabilità del modello linearizzato considerando come ingresso la velocità di sterzata e come uscita la distanza  $\zeta$  dal centro della corsia. Si descrivano gli eventuali sottosistemi non osservabile e non raggiungibile, e se ne dia una interpretazione fisica.

**B (V.O./N.O.)** Si consideri, nel seguito, il modello ridotto alle tre variabili di stato  $(\zeta, \theta, \phi)$  (ignorando cioè la prima equazione differenziale). Si determinino le condizioni di equilibrio a ingresso nullo. Si linearizzi il sistema intorno alla condizione di equilibrio con  $\hat{\zeta} \equiv 0$ ,  $\hat{\theta} \equiv 0$ ,  $\hat{\phi} \equiv 0$  considerando come ingresso la velocità di sterzata e come uscita la distanza  $\zeta$  dal centro della corsia (questo rappresenta il modello linearizzato del veicolo intorno all'andamento nominale dato da un moto rettilineo sull'asse  $\zeta = 0$  a velocità costante). Si determini la funzione di trasferimento del sistema.

**C (V.O./N.O.)** Si disegni il luogo delle radici del sistema e si progetti un controllore causale che renda il sistema in anello chiuso asintoticamente stabile.

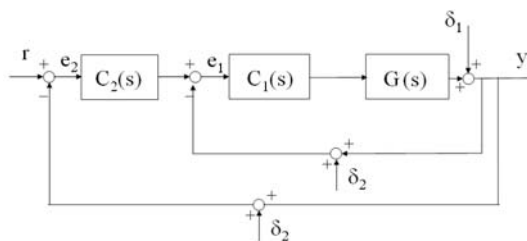


Figure 2: Schema a blocchi complessivo.

**D (V.O./N.O.)** Con riferimento alla figura 2, in cui  $C_1(s)$  è il controllore progettato al punto precedente, si progetti un controllore causale  $C_2(s)$  che, usando la misura del valore di uscita  $\zeta$  verifichi le seguenti specifiche:

- 1) l'influenza di un termine di deriva laterale dovuto a forze aerodinamiche sulle uscite della forma  $\delta_1(t) = At$  sia inferiore a  $0.1A$ ;
- 2) l'errore nel cambio di corsia sia nullo a regime;
- 3) dopo un cambio di corsia, la posizione del centro dell'asse posteriore delle ruote rispetto al centro della nuova corsia si assesti in  $\pm 20[cm]$  entro un tempo di  $2sec$ .  
Inoltre per garantire che il veicolo non fuoriesca dalla corsia di marcia, si faccia in modo che il valore massimo di scostamento dal centro della corsia sia  $|\zeta - d| < \frac{1}{4}d$
- 4) se possibile, sia completamente reiettato un disturbo  $\delta_2(t)$  sulla lettura del sensore di posizione.
- 5) **(Opzionale)** la posizione raggiunta a regime dopo un cambio di corsia dal sistema non deve essere alterata per più di  $\pm 10[cm]$  rispetto al centro della corsia neppure nel caso in cui il valore effettivo della velocità lineare  $v$  sia diverso da quello noto del 10% a causa della presenza di vento longitudinale;

**E (V.O. – in alternativa ad A)** Al fine di confrontare tecniche diverse di analisi e sintesi del controllore, si delinea il progetto di un controllore basato su regolatore per lo stesso sistema dinamico in modo da renderlo asintoticamente stabile.

**N.B.** Il candidato è tenuto a giustificare in modo dettagliato, chiaro e completo ogni singola risposta, corredando il compito con i diagrammi utilizzati nella progettazione dei controllori.

## Soluzione

**A** Introduciamo le variabili  $x_1 = \xi - \hat{\xi} = \xi - (\xi(0) + vt)$ ,  $x_2 = \zeta - \hat{\zeta} = \zeta$ ,  $x_3 = \theta - \hat{\theta} = \theta$ ,  $x_4 = \phi - \hat{\phi} = \phi$ , e il controllo  $u_1 = \omega - \hat{\omega} = \omega$ . In queste variabili si può scrivere il sistema  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ ,  $y = h(\mathbf{x})$  con

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \cos x_3 \cos x_4 v - v \\ \dot{x}_2 &= \sin x_3 \cos x_4 v \\ \dot{x}_3 &= \frac{\sin x_4}{L} v \\ \dot{x}_4 &= u_1 \\ y &= x_2 \end{aligned}$$

e linearizzare usando le matrici

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin x_3 \cos x_4 v & -\cos x_3 \sin x_4 v \\ 0 & 0 & \cos x_3 \cos x_4 v & -\sin x_3 \cos x_4 v \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\cos x_4}{L} v \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} &= [0 \ 1 \ 0 \ 0]. \end{aligned}$$

Il linearizzato lungo il moto desiderato si ottiene valutando queste matrici nell'origine (che è un punto di equilibrio per  $u_1 = 0$ ) e risulta in  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ ,  $y = \mathbf{C}\mathbf{x}$ , con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v/L \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

e  $\mathbf{C} = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$ .

Il sistema così ottenuto non è completamente raggiungibile, come è facile osservare dalla matrice di raggiungibilità, che ha rango 3. È facile osservare che la coppia  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  è già in forma standard di raggiungibilità, eccetto che per il fatto che il sottosistema non raggiungibile è anteposto a quello raggiungibile. Il sottosistema non raggiungibile è dunque semplicemente  $\dot{x}_1 = 0$ , con l'evidente significato che nel moto a velocità di avanzamento costante, non è possibile raggiungere valori della ascissa arbitrari in tempi arbitrari.

Il sistema linearizzato non è completamente osservabile dalla uscita data, come è facile osservare dalla matrice di osservabilità, che ha rango 3. È ancora facile osservare che la coppia  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  è già in forma standard di osservabilità, eccetto che per il fatto che il sottosistema non osservabile è anteposto a quello osservabile. Il sottosistema  $\dot{x}_1 = 0$  è dunque sia inosservabile che irraggiungibile. Il significato fisico della inosservabilità di questo sottosistema è evidente dal fatto che la uscita, consistente nella distanza del centro dell'asse posteriore dalle ascisse, è inalterata dalla posizione lungo le ascisse stesse del veicolo.

**B** Il sistema nelle tre variabili  $(\zeta, \theta, \phi)$  risulta:

$$\begin{cases} \dot{\zeta} &= v \sin \theta \cos \phi \\ \dot{\theta} &= \frac{\sin \phi}{L} v \\ \dot{\phi} &= \omega \end{cases}$$

I punti di equilibrio, ad ingresso nullo, si ottengono dalla soluzione del sistema

$$\begin{cases} \dot{\zeta} &= 0 \\ \dot{\theta} &= 0 \\ \dot{\phi} &= 0 \end{cases}$$

dalla seconda equazione si deduce che  $\hat{\phi} = k_1 \pi$  e dalla prima  $\hat{\theta} = k_2 \pi$  con  $k_1$  e  $k_2$  numeri interi. I punti di equilibrio sono  $(s, k_1 \pi, k_2 \pi)$  con  $s \in \mathbf{R}$  qualsiasi.

Sia  $x = (\zeta, \theta, \phi)^T$ , linearizzando il sistema intorno all'origine si ottengono le seguenti matrici

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{x}, \omega)}{\partial \mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & v \cos \theta \cos \phi & -v \sin \theta \sin \phi \\ 0 & 0 & \frac{v \cos \phi}{L} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & \frac{v}{L} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A; \\ \frac{\partial f(\mathbf{x}, \omega)}{\partial \omega} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = B; \\ \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} &= [1 \ 0 \ 0] = C. \end{aligned}$$

dove  $h(\mathbf{x}) = \zeta$  rappresenta l'uscita.

- C) La funzione di trasferimento del sistema si trova con i comandi `sys=ss(A,B,C,0)`, `G=tf(sys)` e in generale risulta  $G(s) = \frac{v^2}{Ls^3}$ , nel seguito della soluzione vengono riportati casi numerici relativi al caso  $\alpha = \beta = 0$ . Il sistema risulta marginalmente stabile e per renderlo asintoticamente stabile è possibile lavorare sul luogo delle radici. Il luogo delle radici del sistema è riportato a sinistra nella figura 3 e presenta un ramo sull'asse reale negativo e due rami che formano un angolo di  $\pm 60$  gradi con l'asse reale positivo.

Per poter richiamare i due rami del luogo delle radici, che giacciono nel semipiano a parte reale positiva, si possono ad esempio inserire due zeri con parte reale piccola (es. in  $-0.3$ ). Per rendere il controllore causale è necessario inserire almeno due poli ad alta frequenza per mantenere almeno in parte i rami nel semipiano negativo. In questa soluzione vengono considerati due poli reali in  $-30$ . Il luogo delle radici ottenuto con il controllore  $C_1(s) = 0.006 \frac{(1+3.3s)^2}{(1+0.033s)^2}$  è riportato a destra in figura 3 e in un dettaglio in 4.

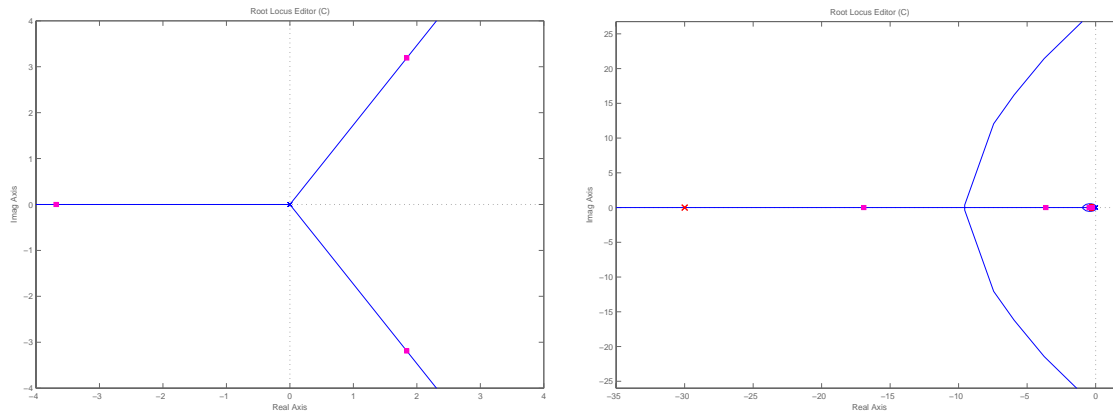


Figure 3: Luogo delle radici della  $G(s)$  (sinistra) e del sistema stabilizzato.

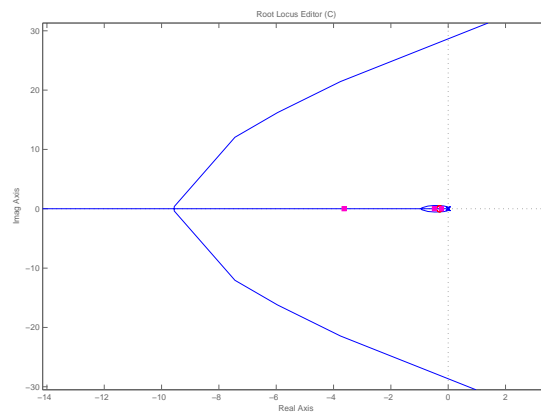


Figure 4: Dettaglio del luogo delle radici del sistema stabilizzato.

La funzione di trasferimento in anello chiuso risulta

$$G_1(s) = \frac{C_1(s)G(s)}{1 + C_1(s)G(s)} = 3000 \frac{(s + 0.3)^2}{(s + 38.73)(s + 16.92)(s + 3.631)(s + 0.4783)(s + 0.2372)}$$

I diagrammi asintotici di Bode sono riportati in figura 5. La struttura a blocchi è riportata in figura 6

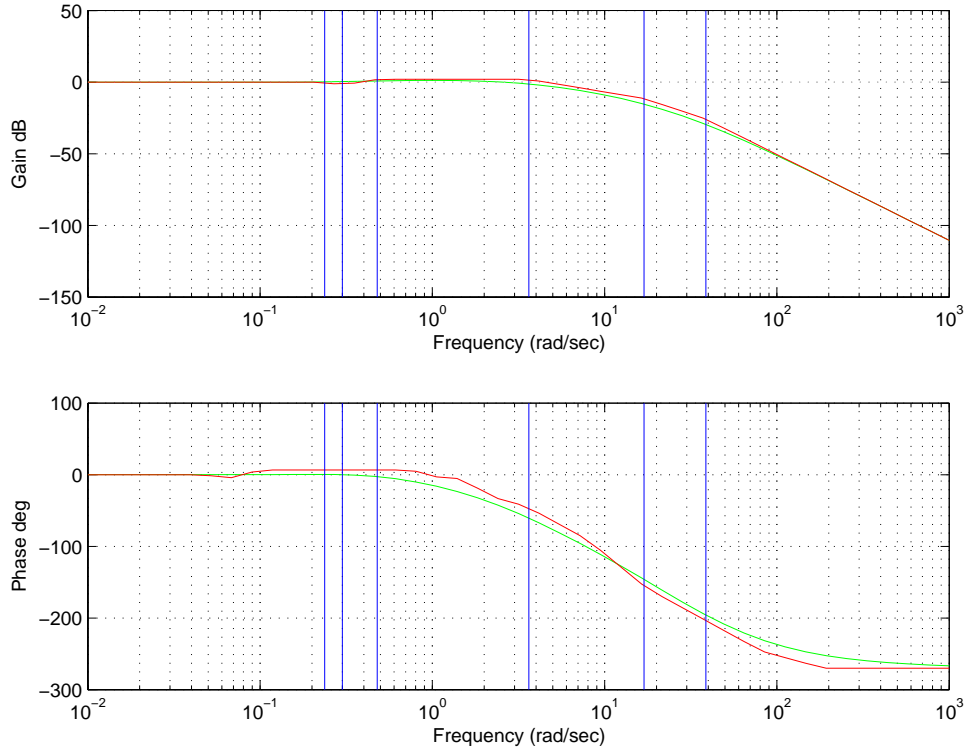


Figure 5: Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento  $G_1(s)$ .

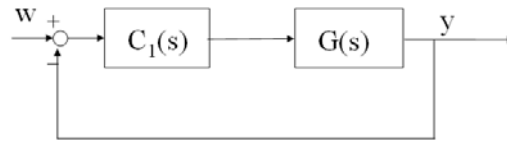


Figure 6: Schema a blocchi di stabilizzazione.

**D** Il controllore che ci prestiamo a progettare viene posto in modo da formare un controllo in cascata con il controllore progettato al punto precedente, lo schema complessivo è riportato in figura 2.

Per il calcolo della funzione di trasferimento del sistema si noti che

$$Y(s) = \Delta_1(s) + G(s)C_1(s)e_1(s)$$

dove

$$e_1(s) = C_2(s)e_2(s) - (Y(s) + \Delta_2(s))$$

e

$$e_2(s) = r(s) - (Y(s) + \Delta_2(s))$$

sostituendo le ultime due relazioni nella prima e ricavando  $Y(s)$  si ottiene

$$Y(s) = \frac{C_1(s)C_2(s)G(s)}{1+C_1(s)G(s)+C_2(s)C_1(s)G(s)}r(s) - \frac{(1+C_2(s))C_1(s)G(s)}{1+C_1(s)G(s)+C_2(s)C_1(s)G(s)}\Delta_2(s) + \frac{1}{1+C_1(s)G(s)+C_2(s)C_1(s)G(s)}\Delta_1(s) \quad (1)$$

Si consideri il controllore della forma  $C_2(s) = \frac{k_c}{s^t} \hat{C}_2(s)$  tale che  $\hat{C}_2(0) = 1$ .

1) Per quanto riguarda la prima specifica, si consideri la funzione di trasferimento tra  $\Delta_1(s)$  e  $Y(s)$ :

$$G_\delta(s) = \frac{1}{1 + C_1(s)G(s) + \frac{k_c}{s^t} \hat{C}_2(s)C_1(s)G(s)}$$

la trasformata della rampa risulta  $\Delta_1(s) = \frac{A}{s^2}$  e per il teorema del valore finale vogliamo valutare il

$$\lim_{s \rightarrow 0} s G_\delta(s) \frac{A}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + C_1(s) \frac{v^2}{Ls^3} + \frac{k_c}{s^t} \hat{C}_2(s)C_1(s) \frac{v^2}{Ls^3}} \frac{A}{s} = \frac{A}{k_c C_1(0) \frac{v^2}{L}} \lim_{s \rightarrow 0} s^{t+2},$$

tale limite è nullo anche per  $t = 0$  per cui la specifica è già verificata.

2) L'errore di inseguimento del riferimento è  $r(s) - Y(s) = \frac{1 + C_1(s)G(s)}{1 + C_1(s)G(s) + C_2(s)C_1(s)G(s)} r(s)$ , il riferimento risulta essere un gradino di ampiezza pari alla distanza  $d$  da compiere per il cambio di corsia. Applicando il teorema del valore finale si ha

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1 + C_1(s) \frac{v^2}{Ls^3}}{1 + C_1(s) \frac{v^2}{Ls^3} + \frac{k_c}{s^t} \hat{C}_2(s)C_1(s) \frac{v^2}{Ls^3}} \frac{d}{s} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3 + C_1(s) \frac{v^2}{L}}{s^{t+3} + C_1(s) s^t \frac{v^2}{L} + k_c \hat{C}_2(s)C_1(s) \frac{v^2}{L}} s^t d \\ &= \frac{C_1(0) \frac{v^2}{L}}{k_c C_1(0) \frac{v^2}{L}} d \lim_{s \rightarrow 0} s^t \end{aligned} \quad (2)$$

tale limite è nullo se  $t \geq 1$  e quindi se si pone nel controllore  $C_2(s)$  un polo nell'origine il cambio di corsia viene effettuato senza errore.

3) le specifiche richieste sono equivalenti a richiedere che il tempo di assestamento sia minore di  $6[sec]$  in quanto  $20[cm] = 0.2[m] = 5\%4[m] = 5\%d$  e  $d$  è il valore a regime se, volendo cambiare corsia, in ingresso si pone un gradino ad ampiezza  $d$ . Inoltre si richiede che la sovraelongazione sia minore del 25% e quindi che il margine di fase deve essere almeno  $45deg$  da cui si deduce che la pulsazione di taglio deve essere superiore a  $\frac{10}{9}rad/sec$ .

4) La funzione di trasferimento tra l'uscita  $Y(s)$  e il disturbo  $\delta_2(t)$  risulta

$$Y(s) = -\frac{(1 + C_2(s))C_1(s)G(s)}{1 + C_1(s)G(s) + C_2(s)C_1(s)G(s)} \Delta_2(s) = \frac{(1 + C_2(s))G_1(s)}{1 + C_2(s)G_1(s)} \Delta_2(s)$$

se si considera la sostituzione  $G_1(s) = \frac{C_1(s)G(s)}{1 + C_1(s)G(s)}$ . La funzione di trasferimento del controllore  $C_2(s) = \frac{k_c}{s^t} \hat{C}(s)$  compare sia a numeratore che a denominatore e quindi qualsiasi tipo di singolarità aggiunto al controllore (quindi qualsiasi sia il valore di  $t$ ) viene a cancellarsi con la stessa singolarità a numeratore della funzione di trasferimento impedendo una reiezione completa del disturbo. Nel caso in cui si è in presenza di un disturbo sulla misura dell'uscita non è mai possibile reiettarlo totalmente in ogni frequenza. Una possibilità che rimane al controllista è quella di rinunciare alla retroazione delle uscite sugli ingressi.

5) L'uscita del sistema controllato nominale è

$$Y(s) = \frac{C_1(s)C_2(s)G(s)}{1 + C_1(s)G(s) + C_2(s)C_1(s)G(s)} r(s) = \frac{C_2(s)G_1(s)}{1 + C_2(s)G_1(s)} r(s) = G_c(s)r(s),$$

in cui si è considerata la sostituzione  $G_1(s) = \frac{C_1(s)G(s)}{1 + C_1(s)G(s)}$ . L'uscita del sistema controllato perturbato è invece  $Y + \Delta Y = (G_c + \Delta G_c)r$ . L'alterazione della posizione a regime della risposta al gradino risulta  $\lim_{s \rightarrow 0} s |\Delta G_c| \frac{1}{s}$ . Si vuole quindi che  $\lim_{s \rightarrow 0} |\Delta G_c(s)| < 10^{-1}$ .  $\Delta G_c = \frac{1}{1 + C_2 G_1} \frac{\partial G_1}{\partial v} \frac{v}{G_1} G_c \frac{10}{100} = \frac{C_2}{(1 + C_2 G_1)^2} \frac{\partial G_1}{\partial v} \frac{10v}{100}$ . Si ha

$$\frac{\partial G_1}{\partial v} = \frac{C_1 \frac{\partial G}{\partial v}}{(1 + C_1 G)^2} = \frac{C_1 \frac{2v}{Ls^3}}{(1 + C_1 \frac{v^2}{Ls^3})^2}$$

ottenuta dal fatto che  $\frac{\partial G}{\partial v} = \frac{2v}{Ls^3}$ . Si noti che  $\frac{\partial G_1}{\partial v}$  va a zero come  $s^3$  per  $s \rightarrow 0$  da cui  $\lim_{s \rightarrow 0} |\Delta G_c(s)| = 0$ . La specifica richiesta è quindi sempre verificata.

Concludendo il controllore  $C_2(s)$ , deve avere un polo nell'origine e il margine di fase e la pulsazione di taglio dedotte al punto 3. Una volta inserito un polo nell'origine si nota che è sufficiente inserire uno zero in modo da aumentare la pulsazione di taglio, ad esempio in  $-0.06$ . La specifica sul margine di fase è ampiamente soddisfatta. Concludendo si ha che il controllore richiesto è

$$C_2(s) = \frac{1 + 1.7s}{s}$$

La funzione di trasferimento del sistema controllato è

$$G_2(s) = \frac{5000(s + 0.3)^2(s + 0.6)}{(s + 43.42)(s + 0.5358)(s^2 + 0.522s + 0.07103)(s^2 + 15.52s + 163.4)}$$

e i relativi diagrammi di bode sono riportati in figura 7.

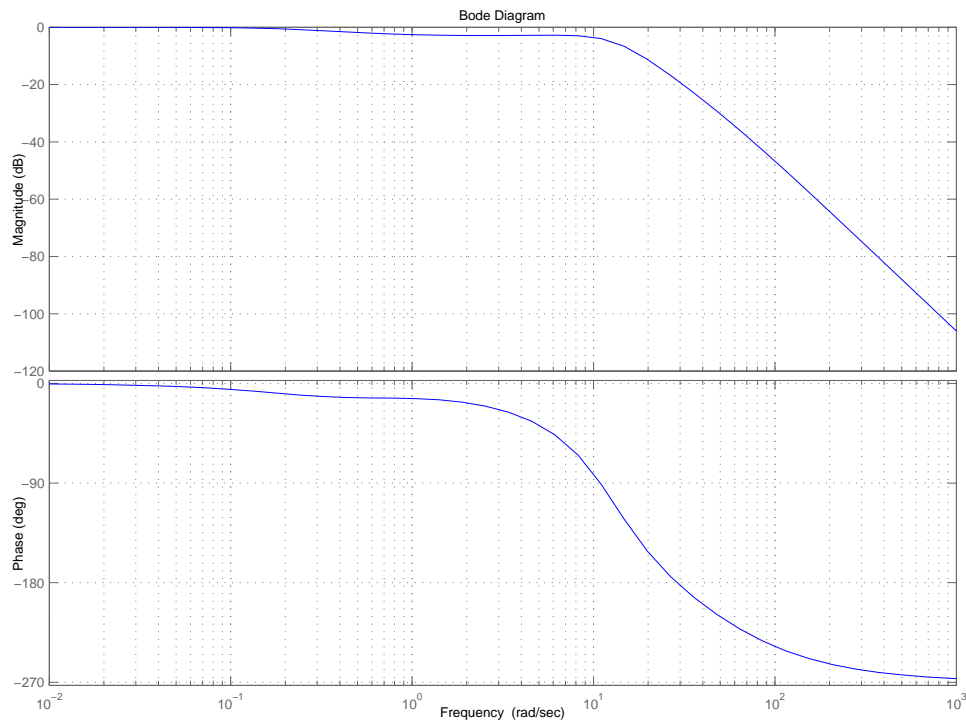


Figure 7: Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento del sistema controllato.