

Numero di matricola

-	-	$= 10\alpha - 1$	$= 10\beta - 1$
		$= 10\gamma - 1$	-

Si consideri il modello dinamico di un sistema “ball and beam” composto da una sbarretta e da una sfera come illustrato in fig.1. Il sistema è descritto dalle equazioni

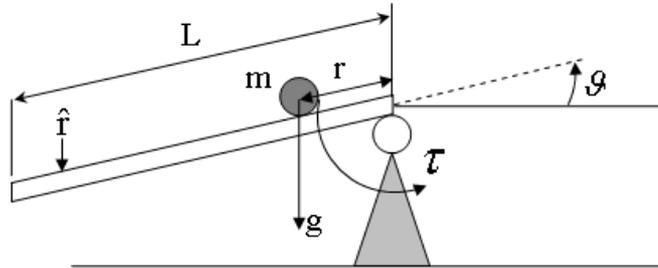


Figure 1: Modello del sistema

$$\begin{cases} (I + mr^2)\ddot{\theta} + mgr \cos(\theta) + 2mr\dot{r}\dot{\theta} + b\dot{\theta} = \tau \\ (m + \frac{J}{R^2})\ddot{r} + mg \sin(\theta) - mr\dot{\theta}^2 = 0 \end{cases}$$

dove  $I = 0.5 \text{ kgm}^2$  è il momento di inerzia della barra,  $m = 2 + \frac{\alpha}{10} \text{ kg}$  e  $J = 25 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$ , rispettivamente, la massa e il momento di inerzia della sfera,  $\tau$  la coppia di ingresso,  $g = 9.8 \text{ m/sec}$  l'accelerazione di gravità,  $b = 5 + \frac{\gamma}{100} \text{ kgm}^2/\text{sec}$  è il coefficiente di attrito viscoso agente sul perno al quale è vincolata la barra ed  $R = 5 + \frac{\beta}{10} \text{ cm}$  è il raggio della sfera.

Il modello linearizzato del sistema attorno al punto di equilibrio con ingresso nominale  $\hat{\tau}$  nullo, e con la scelta delle variabili di stato  $[x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [\theta, \dot{\theta}, r, \dot{r}]^T$ , è il seguente:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{b}{I}x_2 - \frac{mg}{I}x_3 + \frac{1}{I}\tau \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -\frac{mgR^2}{mR^2 + J}x_1 \end{cases}$$

- A V.O.)** Si studi la raggiungibilità del modello linearizzato considerando come ingresso la coppia  $\tau$ , e la osservabilità del modello linearizzato considerando come uscita la posizione della sfera  $r$ .
- B)** Si consideri il problema del controllo della posizione della sfera mediante l'ingresso  $\tau$ , si specifichi la funzione di trasferimento del sistema e si disegnino i diagrammi di Bode asintotici. Si delinei una procedura di progetto del controllore che possa portare a realizzare la stabilizzazione e a soddisfare le tipiche specifiche di un servomeccanismo. Si disegni lo schema a blocchi del sistema controllato.
- C)** Si progetti un controllore che, usando la misura del valore di uscita  $r$ , regoli la coppia  $\tau$  in modo da garantire l'asintotica stabilità del punto di equilibrio. Si determini la funzione di trasferimento del sistema controllato.

SUGGERIMENTO: si usi un controllore della forma

$$C_1(s) = k \frac{\left(\frac{s^2}{\omega_z^2} + \frac{2\delta_z s}{\omega_z} + 1\right)}{\left(\frac{s^2}{\omega_p^2} + \frac{2\delta_p s}{\omega_p} + 1\right)} \quad (1)$$

- D)** Basandosi sul risultato del progetto ottenuto al punto C, si progetti un secondo controllore che garantisca che: 1) la sfera, a partire dal punto di equilibrio  $r = 0$ , raggiunga esattamente la posizione  $\hat{r} = 80 \text{ cm}$ ; 2) dopo al più 75 secondi, la posizione della sfera non si allontani da  $\hat{r}$  di più di  $4 \text{ cm}$ ; 3) la sfera non cada dalla barra la cui lunghezza è  $L = 1 \text{ m}$ .
- E V.O.)** Al fine di confrontare tecniche diverse di analisi e sintesi del controllore, si delinei il progetto di un controllore basato su regolatore per lo stesso sistema dinamico in modo da renderlo asintoticamente stabile.

**Soluzione** Per semplicità, la soluzione del compito è stata sviluppata considerando  $\alpha, \beta, \gamma = 0$ .

**A V.O.)** Dal sistema in forma di stato si ottengono le matrici  $A, B, C, D$ :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{I} & -\frac{mg}{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -mgM & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{I} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \ 0 \ 1 \ 0], \quad D = 0$$

La matrice di raggiungibilità del sistema

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{I} & \frac{b}{I^2} & -\frac{b^2}{I^3} \\ -\frac{1}{I} & \frac{b}{I^2} & -\frac{b^2}{I^3} & \frac{b^3}{I^4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{mgM}{I} \\ 0 & 0 & \frac{mgM}{I} & -\frac{mgMb}{I^2} \end{bmatrix}$$

ha rango pieno, pertanto il sistema così ottenuto è completamente raggiungibile.

Nel caso in cui l'uscita sia  $y = r = x_3$  si ha ovviamente  $\mathbf{C}_r = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$ , da cui la matrice di osservabilità

$$\mathbf{O}_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -mgM & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -mgM & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che ha rango pieno. Pertanto il sistema così ottenuto è completamente osservabile.

Si osservi che il termine di attrito viscoso  $b$  non influenza le proprietà di raggiungibilità ed osservabilità del sistema.

**B)** Il calcolo della  $G(s)$  può essere fatto esplicitando le matrici  $A, B$  e  $C$  della forma di stato:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B\tau \\ y = Cx \end{cases} \Rightarrow G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

Alternativamente, per calcolare la funzione di trasferimento si L-trasforma il sistema, ottenendo:

$$\begin{aligned} sX_1 &= X_2 \\ sX_2 &= -\frac{b}{I}X_2 - \frac{mg}{I}X_3 + \frac{1}{I}\tau(s) \\ sX_3 &= X_4 \\ sX_4 &= -mgMX_1 \end{aligned}$$

Dalla seconda equazione si ottiene  $X_2(s) = \frac{-mg}{sI+b}X_3(s) + \frac{1}{sI+b}\tau(s)$ , mentre dalle altre si ha  $s^3X_3(s) = -mgMX_2(s)$ , quindi:  $s^3X_3(s) = \frac{m^2g^2M}{sI+b}X_3(s) - \frac{mgM}{sI+b}\tau(s)$  e  $X_3(s) = -\frac{mgM}{(s^3(sI+b) - m^2g^2M)}\tau(s) = G(s)\tau(s)$ .

Inserendo i valori dati si ha  $G(s) = -1.633 \frac{1}{.5s^4 + 5s^3 - 32.01333333}$ . Il sistema risulta quindi instabile per la presenza di un polo a parte reale positiva. I diagrammi di Bode della  $G(s)$  sono riportati in figura 2.

Il sistema considerato è instabile in anello aperto, quindi il progetto del suo controllore non può essere fatto direttamente con metodi basati sui diagrammi di Bode (si osservi che da tali diagrammi, risulterebbero erroneamente un margine di guadagno e di fase infinito, mentre il sistema è chiaramente instabile in anello chiuso).

Il progetto può essere fatto ad esempio ricorrendo alla tecnica del doppio anello di retroazione in cascata (vedi figura 3). L'anello interno ha lo scopo di rendere il sistema stabile, e si può progettare ad esempio mediante il metodo del luogo delle radici. Una volta reso il sistema retroazionato asintoticamente stabile, l'anello esterno viene progettato per soddisfare le specifiche richieste, basandosi sui diagrammi di Bode.

**C)** Si noti che nel luogo delle radici del sistema non controllato (riportato a sinistra in figura 4) è presente un asintoto reale positivo. Per ovviare a questo problema è opportuno considerare una retroazione positiva (che equivarrà sostanzialmente a porre negativo il guadagno del controllore), ottenendo il luogo riportato a destra in figura 4.

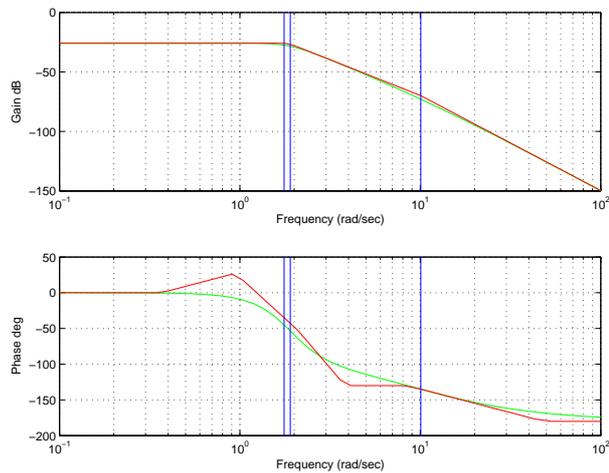


Figure 2: Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento  $G(s)$

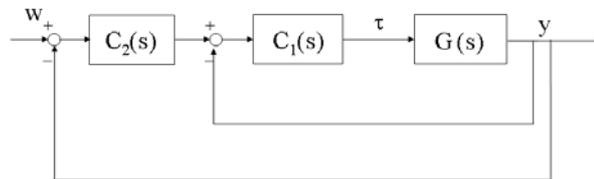


Figure 3: Schema a blocchi del progetto del controllore

Il controllore suggerito è composto da una coppia di poli e zeri complessi e da un guadagno. I due zeri complessi possono essere usati per cancellare (anche solo approssimativamente) i due poli complessi dell'impianto, che sono stabili, ottenendo il nuovo luogo riportato a sinistra in figura 5. Per la causalità del controllore, è necessario introdurre i due poli complessi coniugati, che possono essere posti con parte reale negativa molto maggiore di quella degli zeri. A destra in figura 5 è riportato il risultato dopo aver posto i due poli due decadi dopo gli zeri.

Per ottenere la stabilità, è ancora necessario aumentare il guadagno: nell'esempio è sufficiente porre  $k = 25$ . Il luogo delle radici ottenuto complessivamente con il controllore  $C_1(s) = -25 \frac{1+0.73s+0.964s^2}{1+0.02s+10^{-4}s^2}$  è rappresentato in figura 6. La funzione di trasferimento in anello chiuso risulta:

$$G_1(s) = 770773.90 \frac{s^2 + 0.772s + 1.052}{(s^2 + 0.8047s + 0.2518)(s^2 + 7.47s + 68.31)(s^2 + 200.7s + 1.018e004)}$$

i cui diagrammi di Bode sono riportati in figura 7.

- D)** Per soddisfare la prima specifica è necessario fare in modo che l'errore a regime in risposta ad un gradino sia nullo: nel nostro caso, si sceglierà un controllore di tipo uno,  $K_v/s\hat{C}(s)$ . Le specifiche statiche non impongono un valore alla costante di guadagno di velocità del controllore  $k_v$ .

La seconda specifica equivale (essendo 4 cm il 5% di 80 cm), a chiedere che il tempo di assestamento del sistema sia inferiore a 75 sec. La terza specifica infine equivale ad una condizione sulla sovraelongazione massima, ed in particolare che questa non superi il valore  $(L - \hat{r})/\hat{r} = 25\%$ .

In altre parole, ammettendo che il sistema in anello chiuso abbia una coppia di poli dominanti, il loro coefficiente di smorzamento deve essere  $\delta > 0.4$  e quindi il margine di fase deve essere maggiore di 40deg. Dalla relazione  $T_a = \frac{3}{\delta\omega_n}$  si ottiene che la pulsazione di taglio deve essere maggiore di  $\frac{3}{75 \cdot 0.4} = 0.1$  radianti al secondo.

Osservando il diagramma di Bode ottenuto per  $\frac{K_v}{s}G_1(s)$ , si nota che entrambe le specifiche possono essere soddisfatte semplicemente attenuando il sistema, ad esempio ponendo  $K_v = 0.7$  (vedi figura 8).

La risposta al gradino di ampiezza 0.8 del sistema ottenuto con la compensazione in cascata è riportato in figura 9.

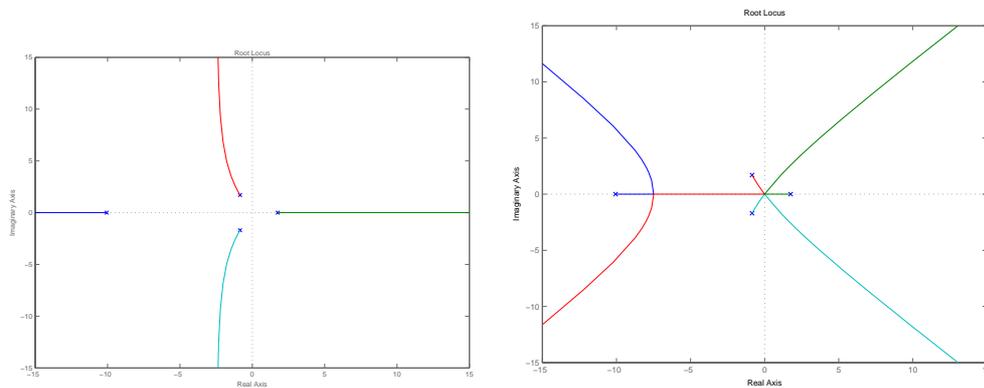


Figure 4: Luogo delle radici della  $G(s)$  con retroazione negativa e positiva.

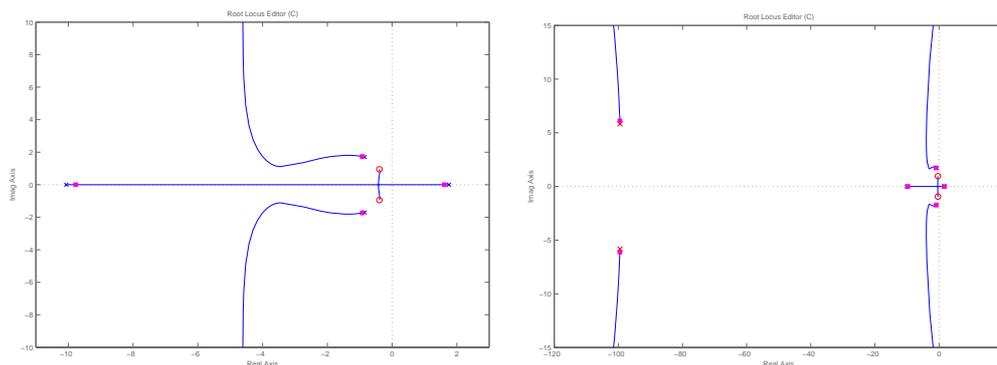


Figure 5: Luogo delle radici dopo l'aggiunta degli zeri (sinistra) e dei poli (destra)

**E** Si considerino le matrici ottenute al punto A. Si richiede di calcolare una retroazione degli stati  $K$  e una iniezione delle uscite  $G$  che portano tutti gli autovalori del sistema regolato nel semipiano a parte reale negativa.

Ad esempio cerchiamo  $K$  e  $G$  tali che  $A - BK$  e  $A - GC$  abbiano autovalori in  $-1$ . Dato  $p = [-1, -1, -1, -1]$ , con il comando Matlab  $K = \text{acker}(A, B, p)$  si ottiene  $K = [3 \quad -3 \quad -19.90 \quad -1.22]$ , mentre con il comando  $G = \text{transpose}(\text{acker}(A', C', p))$  si ottiene  $G = [401.63 \quad 4056.13 \quad -6 \quad 66]'$ . Un controllore stabilizzante, basato sullo schema del regolatore così progettato, si ottiene poi semplicemente col comando  $C1 = \text{reg}(\text{sys}, K, G)$ , dove  $\text{sys} = \text{ss}(A, B, C, D)$ .

Se si vuole costruire un regolatore che non solo stabilizza il sistema ma che verifica anche le specifiche richieste nel punto D, si può procedere come segue.

Come visto nella soluzione del punto D, le specifiche richiedono che in anello aperto ci sia un polo nell'origine e che in anello chiuso ci siano due poli dominanti con coefficiente di smorzamento  $\delta > 0.4$  e pulsazione  $\omega_n > 0.1 \text{ rad/sec}$ . I poli in anello chiuso devono quindi appartenere alla zona di piano rappresentata in figura 10. Ad esempio, nel seguito, progettiamo un controllore per cui in anello aperto il sistema abbia un polo nell'origine e in anello chiuso abbia poli in  $-2 \pm i0.5, -100 \pm i50$  e  $-120$ .

Per ottenere un regolatore con un polo nell'origine, si considera come sistema da regolare il sistema originale posto in serie con un integratore (vedi figura 11 a sinistra). Il sistema da regolare si ottiene con il comando Matlab  $\text{sysr} = \text{series}(\text{integ}, \text{sys})$  dove  $\text{integ}$  è l'integratore ottenuto con  $\text{integ} = \text{ss}(0, 1, 1, 0)$ . Con il comando  $[As, Bs, Cs, Ds] = \text{ssdata}(\text{sysr})$  si ottengono le matrici dinamiche del sistema con le quali si può progettare il regolatore  $R(s)$ , considerando  $p = [-2 - i * 0.5 - 2 + i * 0.5 - 100 - i * 50 - 100 + i * 50 - 120]$  (si noti che il sistema  $\text{sysr}$  formato dalla connessione in serie del sistema originale e dall'integratore ha dimensione 5). Il regolatore si ottiene quindi con  $K = \text{acker}(A, B, p)$ ,  $G = \text{transpose}(\text{acker}(A', C', p))$  e  $R = \text{reg}(\text{sys}, K, G)$ .

Il regolatore finale è formato dalla connessione in serie del regolatore  $R(s)$  trovato con l'integratore  $\frac{1}{s}$  (vedi figura 11 a destra), e si ottiene con  $\text{Reg} = \text{series}(R, \text{integ})$ . Per ottenere la funzione di trasferimento in anello chiuso si inseriscono i comandi  $\text{fsys} = \text{feedback}(\text{series}(\text{Reg}, \text{sys}), 1, +1)$  e  $\text{fin} = \text{tf}(\text{fsys})$  di cui si può poi richiedere la risposta al gradino di ampiezza 0.8 con il comando  $\text{step}(-0.8 * \text{fin})$ . Si noti che, avendo effettuato una retroazione positiva con il comando

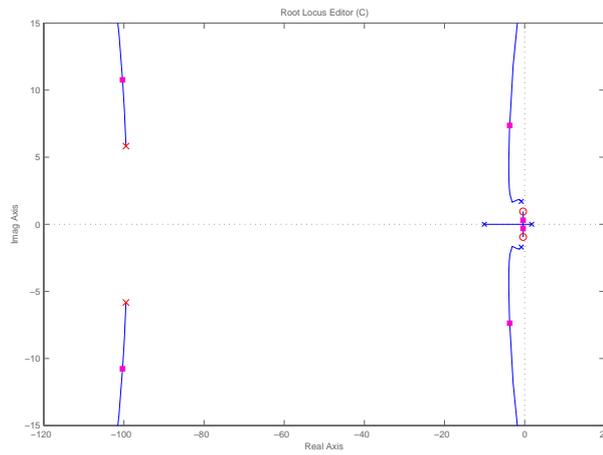


Figure 6: Luogo delle radici del sistema una volta inserito il controllore  $C_1(s)$ .

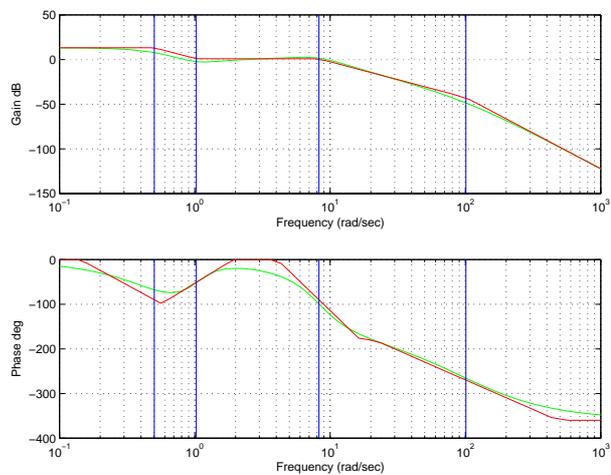


Figure 7: Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento con l'anello interno chiuso.

`fsys=feedback(series(Reg,sys),1,+1)` (richiesta dal comando `reg`), è necessario cambiare il segno al riferimento. Inoltre, il comando `step` disegna la risposta del sistema al gradino unitario, se si vuole ottenere, come nel nostro caso, la risposta ad un gradino di ampiezza  $A$  è sufficiente usare il comando `step(A*fin)`.

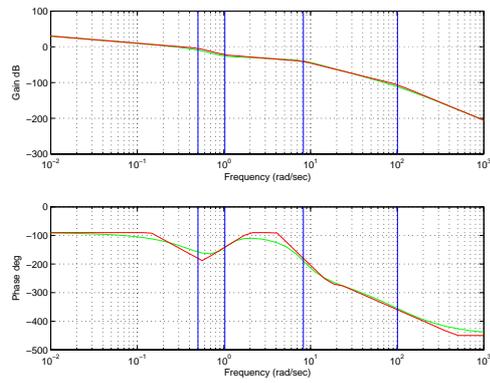


Figure 8: Diagrammi di Bode di  $C_2(s)G_1(s)$  in anello aperto.

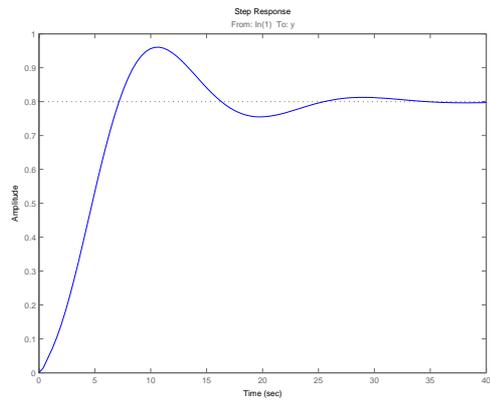


Figure 9: Risposta al gradino del sistema retroazionato

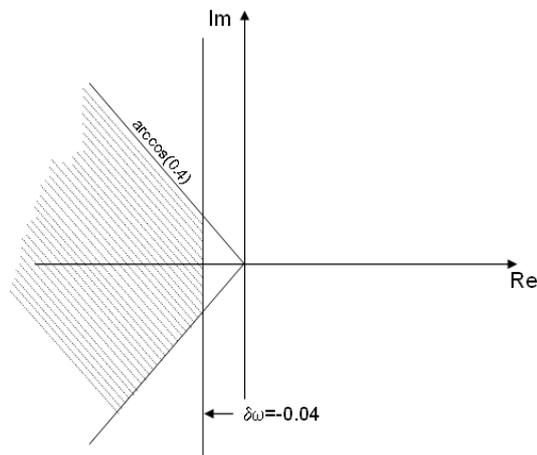


Figure 10: Zona del piano complesso in cui si vogliono posizionare i poli in anello chiuso

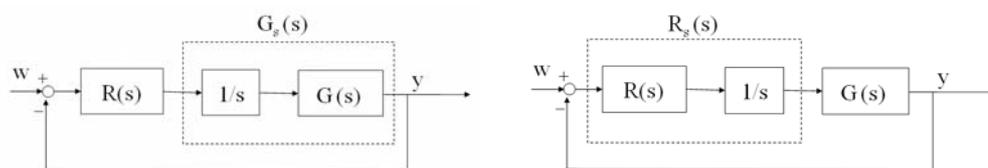


Figure 11: Schema a blocchi per il progetto del regolatore