

Esame di Regolazione e Controllo dei Sistemi Meccanici – 19–9–2001

Nome e Cognome:					
Anno di frequenza:					
Numero di matricola					
	-	-	= $\alpha - 1$	= $\beta - 1$	= $\gamma - 1$
	-	-	= $\alpha - 1$	= $\beta - 1$	= $\gamma - 1$

A (pt. 3) Tracciare i diagrammi di Bode, Nyquist e Nichols relativi al sistema:

$$G(s) = \frac{(\alpha s + 1)}{(0.5s + 1)(0.01\beta s + 1)(0.001s + 1)^2}$$

indicando i valori nei punti salienti del primo.

B (pt. 8) Per il sistema di cui al punto **A**, progettare un controllore che realizzi in prima approssimazione le seguenti specifiche:

- errore a regime al gradino nullo;
- errore a regime alla rampa $\leq 1\%$;
- margine di fase $\geq \pi/4$;
- banda passante in anello chiuso compresa tra 500 e 1500 rad/sec.
- Dato il sistema tempo-discreto caratterizzato dalla seguente f.d.t.:

$$G(z) = \frac{z + \delta}{(z^2 - 2z + 2)(z - 0.05\gamma)}$$

C (pt. 3) Scrivere le matrici **A**, **B**, **C**, **D** di una realizzazione nello spazio degli stati;

D (pt. 4) Discutere la stabilità del sistema; trovare i modi del sistema e descriverne graficamente l'evoluzione temporale;

E-N (pt. 4) Discutere la raggiungibilità e la osservabilità del sistema al variare dei parametri γ, δ .

E-V (pt. 4) Trovare la risposta al gradino unitario del sistema.

F (pt. 3) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici per il sistema $G(s) = \frac{Ks(s+2)}{(s+6)^2(s^2+2\gamma s+200)}$ nel caso di retroazione unitaria negativa e per guadagni K variabili fra 0 e $+\infty$.

Dato il sistema

$$\gamma \ddot{x} + \alpha \dot{x}^2 - \tan(x) = u$$

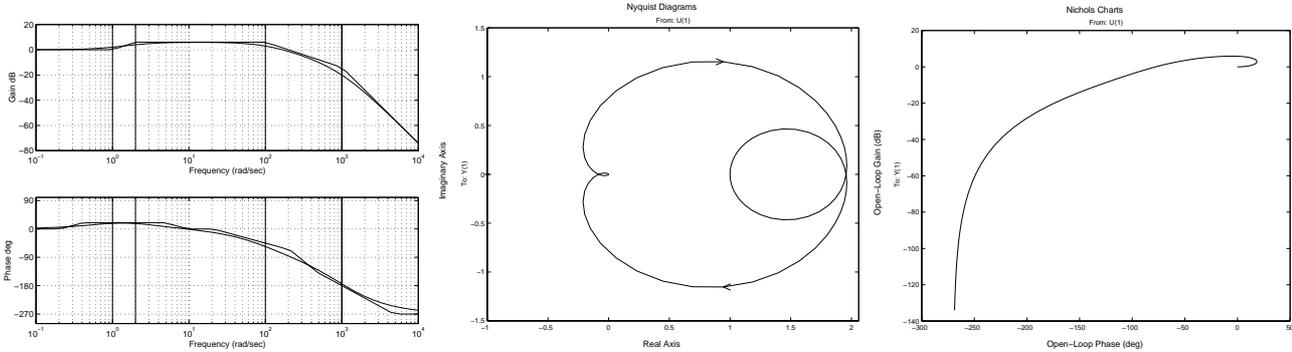
G (pt. 3) Trovare i punti di equilibrio con ingresso nullo e studiarne la stabilità.

H (pt. 3) Trovare una legge di retroazione che renda l'origine un punto di equilibrio globalmente asintoticamente stabile.

Soluzione

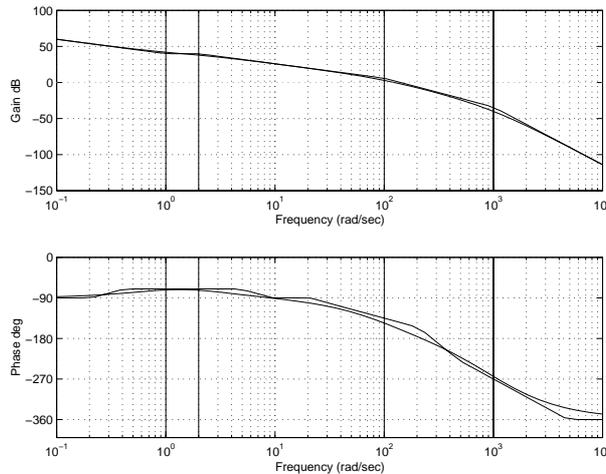
- A) Il sistema è già descritto in forma di Bode. La costante di guadagno statico è 1. Procedendo per pulsazioni crescenti, si trovano i contributi di uno zero in $-1/\alpha$, di un polo reale semplice in -2 , di un secondo polo reale semplice in $-100/\beta$ e di un polo reale doppio in -1000 . Il sistema è a fase minima, per cui il diagramma delle fasi potrebbe essere interamente dedotto a partire dalla conoscenza del diagramma delle ampiezze mediante la Formula di Bode. La pulsazione di taglio si ottiene risolvendo $20(\text{Log } 2 - \text{Log } \frac{1}{\alpha}) = 20(\text{Log } \omega_T - \text{Log } \frac{100}{\beta})$, cioè $\omega_T = \frac{200\alpha}{\beta}$.

I diagrammi di Nyquist e Nichols sono ottenuti da quello di Bode senza alcuna difficoltà. Le figure seguenti riportano esempi di diagrammi di Bode, Nyquist e Nichols per $\alpha = \beta = 1$.



- B) Poiché il sistema è a fase minima, si può procedere semplicemente con la sintesi sui diagrammi di Bode. Fissiamo un controllore $C(s) = \frac{K}{s^t} C_0(s)$, con $C_0(0) = 1$. Per soddisfare le specifiche statiche è necessario un polo nell'origine, quindi poniamo $t = 1$. La costante K viene determinata in base al requisito sull'errore a regime sul gradino: tale errore è pari a $\frac{1}{K}$, quindi occorre che sia $K \geq 100$.

Se scegliamo $K = 100$, il sistema (dopo la compensazione statica) ha un diagramma di Bode rappresentato nella figura seguente.



La pulsazione di taglio è sicuramente maggiore del secondo polo reale. Infatti alla pulsazione unitaria la $G(j\omega)$ assume il valore $40 + 20 \text{Log } \alpha$ dB, mentre alla pulsazione $\omega = \frac{100}{\beta}$ la $G(j\omega)$ assume il valore $40 + 20 \text{Log } \alpha - 20(\text{Log } \frac{100}{\beta} - \text{Log } 2) = 40 - 20 \text{Log } \left(\frac{100}{2\alpha\beta} \right) = 20 \text{Log } (2\alpha\beta)$ dB e tale valore è sicuramente positivo. La pulsazione di taglio ω'_T si desume dalla relazione $20 \text{Log } (2\alpha\beta) = 40 \left(\text{Log } \omega'_T - \text{Log } \left(\frac{100}{\beta} \right) \right)$ da cui $\omega'_T = 100\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}$. Il valore massimo di tale pulsazione si raggiunge per $\alpha = 10$ e $\beta = 1$ ed è pari a circa 447 rad/sec; inoltre a tale valore corrisponde una pendenza pari a -2 . Dunque le specifiche riguardanti i margini di stabilità e la pulsazione di taglio non sono soddisfatte.

Una possibile soluzione consiste nel porre due zeri a cancellare il polo in $-\frac{100}{\beta}$ ed il polo in -2 . Volendo collocare la pulsazione di taglio in $\omega''_T = 1000$ rad/sec, occorre inserire un polo reale semplice in $-\frac{10}{\alpha}$. Tuttavia occorre anche eliminare uno dei due poli in -1000 per rispettare il requisito sul margine di fase. In tal modo si avrà il "ginocchio," ossia il passaggio da pendenza -1 a pendenza -2 , in corrispondenza della pulsazione di taglio.

Infine, per rendere causale il controllore, occorre inserire un ulteriore polo ad alta frequenza, ad esempio in -10000 rad/sec. Il controllore avrà dunque funzione di trasferimento pari a

$$C(s) = 100 \frac{(0.5s + 1)(0.01\beta s + 1)(0.001s + 1)}{s(0.1\alpha s + 1)(0.0001s + 1)}$$

La funzione di trasferimento del sistema compensato é pari a:

$$G(s)C(s) = 100 \frac{(\alpha s + 1)}{s(0.1\alpha s + 1)(0.001s + 1)(0.0001s + 1)}$$

C) Esprimendo la funzione di trasferimento nella forma:

$$G(z) = \frac{z - \delta}{z^3 + (0.05\gamma - 2)z^2 + (2 - 0.1\gamma)z + 0.1\gamma}$$

si può scrivere una rappresentazione di stato ad esempio in forma canonica di controllo, ossia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.1\gamma & (0.1\gamma - 2) & (2 - 0.05\gamma) \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [-\delta \quad 1 \quad 0] \quad \mathbf{D} = 0$$

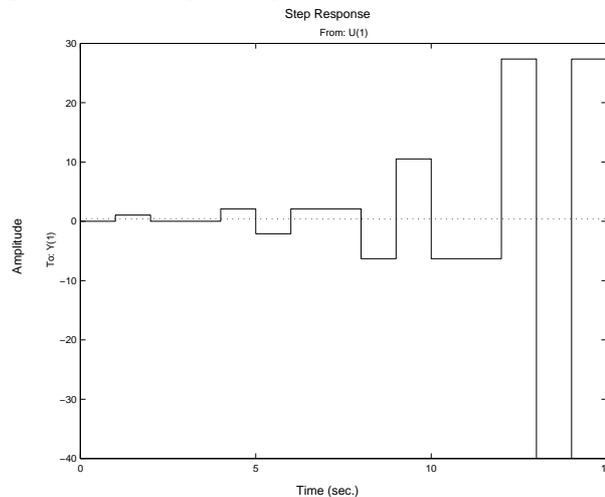
D) Il sistema presenta un polo reale negativo in -0.05γ ed una coppia di poli complessi coniugati immaginari puri in $1 \pm i = \sqrt{2}e^{\pm i\pi/4}$. Il polo reale a modulo minore di 1 per qualsiasi valore di γ , e dunque non dá problemi di instabilità, mentre i poli complessi coniugati hanno modulo maggiore di 1, pertanto rendono il sistema instabile. Il modo del sistema corrispondenti al polo reale negativo é $e^{-0.05\gamma t}$. I modi corrispondenti ai poli complessi coniugati sono $\sqrt{2}^t \sin(\frac{\pi}{4}t)$ e $\sqrt{2}^t \cos(\frac{\pi}{4}t)$.

E-N) Il sistema scritto in una delle forme canoniche di raggiungibilità o di osservabilità ha, per definizione, la corrispondente proprietà caratteristica, mentre risulta avere anche l'altra se e solo se é una realizzazione minima, ovvero se non ci sono cancellazioni nella f.d.t.. Pertanto, usando ad esempio la realizzazione di cui sopra, oltre ad essere completamente raggiungibile, é anche completamente osservabile, in quanto, per qualunque valore dei parametri γ e δ non é possibile alcuna cancellazione.

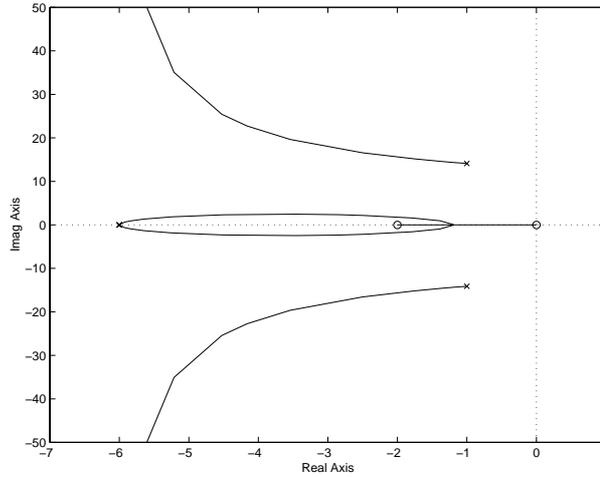
E-V) Essendo l'eccesso poli-zeri pari a 2, i primi 2 campioni $y(0)$ e $y(1)$ della risposta al gradino sono nulli. Inoltre la risposta al gradino presenta un termine costante pari a $G(1) = \frac{1-\delta}{3(1+0.05\gamma)}$. Vi compare inoltre un termine esponenziale decrescente dovuto al polo reale ed un'oscillazione di ampiezza crescente dovuta ai poli complessi coniugati. Applicando lo sviluppo di Heaviside per l'antitrasformazione di $Y(z) = \frac{G(z)z}{z-1}$ si ottiene, nel caso $\gamma = \delta = 1$, la seguente espressione:

$$y(t) = 2.105 + 0,581 * (0.05)^t + 1.132\sqrt{2}^t \cos(\frac{\pi}{4}t - 2.665)$$

cui corrisponde il grafico riportato nella figura seguente:



F) Il sistema presenta 2 zeri, uno nell'origine e l'altro in -2 , e 4 poli, due in -6 e due complessi coniugati in $-\gamma \pm i\sqrt{200 - \gamma^2}$. Non potendovi essere in alcun caso cancellazione poli-zeri, l'eccesso poli-zeri risulta sempre pari a 2, per cui il luogo presenta 2 asintoti, perpendicolari all'asse reale. Fa parte del luogo delle radici solo la parte del semiasse reale negativo che è compresa fra i due zeri. Gli asintoti si intersecano nel punto dell'asse reale di ascissa pari a $(-2\gamma - 12 + 2)/2 = -\gamma - 5$. Nella figura seguente è riportato il luogo richiesti nei caso $\gamma = 1$.



G) Ponendo $z_1 = x$ e $z_2 = \dot{x}$ si ottiene la rappresentazione nello spazio degli stati

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \frac{1}{\gamma} \tan(z_1) - \frac{\alpha}{\gamma} z_2^2 + \frac{1}{\gamma} u \end{aligned}$$

I punti di equilibrio sono rappresentati da tutte le coppie $z_1 = k\pi$, $z_2 = 0$ con k intero. Per studiare la stabilità degli equilibri si può utilizzare il metodo indiretto di Lyapunov, che richiede di scrivere la matrice dinamica del modello linearizzato. Questa vale

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{\gamma} & 0 \end{bmatrix}$$

in ogni equilibrio, dunque gli equilibri sono tutti instabili.

H) Si osserva immediatamente nella seconda equazione della forma di stato che tutte le nonlineari del sistema possono essere cancellate ponendo $u = \alpha z_2^2 - \tan(z_1) + v$. Si ottiene così un sistema linearizzato esattamente (non si fa alcuna approssimazione) che è descritto da

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\gamma} \end{bmatrix} v$$

che è in forma canonica di controllo, con autovalori nulli. La ulteriore retroazione lineare $v = -k_1 z_1 - k_2 z_2$ con $k_1, k_2 > 0$ rende il sistema quindi asintoticamente stabile globalmente (infatti il sistema originale è esattamente equivalente a quello linearizzato, per il quale la stabilità locale implica quella globale).